

Stochastische Fixpunktgleichungen über D

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von
Sebastian Hallmann

Kiel, 2019

Erstgutachter: Prof. Dr. Uwe Rösler
Zweitgutachter: Prof. Dr. Sören Christensen

Tag der mündlichen Prüfung: 28.06.2019

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Uwe Rösler für die intensive Betreuung dieser Arbeit. Mit seinen hilfreichen Anregungen und stets lehrreichen Diskussionen stand er mir immer unterstützend zur Seite. Meinen Kollegen aus den Arbeitsgruppen Finanzmathematik und Stochastik möchte ich für die freundliche Aufnahme, die netten Gespräche und die gute Zusammenarbeit danken.

Ein besonderer Dank geht an Adrian Theopold, mit dem ich mir die letzten drei Jahre ein Büro teilte. Danke für die abwechslungsreiche Zeit.

Anje Ostermann und Tobias Sohr danke ich für das Korrekturlesen dieser Arbeit, die hilfreichen Hinweise und die kritischen Anmerkungen.

Ich möchte auch meiner Familie und meinen Freunden danken, die mich während meines Studiums und meiner Promotionszeit immer unterstützt und ermuntert haben, an meinen Zielen festzuhalten.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir Prozessgleichungen der Form

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j \geq 1} T_j X_j(\tau_j(t)) + C(t) \right)_{t \in [0,1]}$$

und untersuchen diese in Hinblick auf Lösungen mit Pfaden in D , dem Raum der càdlàg-Funktionen über dem Einheitsintervall $[0, 1]$.

Unsere Motivation solche Gleichungen zu studieren ist die zum QUICKSORT-Algorithmus assoziierte Prozessgleichung

$$(Q(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(U Q_1(1 \wedge \frac{t}{U}) + (1 - U) Q_2(0 \vee \frac{t-U}{1-U}) + C(U, t) \right)_{t \in [0,1]}.$$

Zu einer gegebenen Folge $(C, (T_1, \tau_1), (T_2, \tau_2), \dots)$ charakterisieren wir die Menge aller D -wertigen Lösungen der allgemeinen Gleichung und zeigen, dass diese als Faltung einer Lösung der inhomogenen Prozessgleichung und einer allgemeinen Lösung der homogenen Prozessgleichung dargestellt werden können.

Abstract

In this thesis we consider process equations of the form

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j \geq 1} T_j X_j(\tau_j(t)) + C(t) \right)_{t \in [0,1]}$$

and investigate them in regard to solutions with paths in D , the space of càdlàg functions on the unit interval $[0, 1]$.

Our motivation to study such kind of equations is the process equation associated with the QUICKSORT algorithm, i.e.

$$(Q(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(U Q_1(1 \wedge \frac{t}{U}) + (1 - U) Q_2(0 \vee \frac{t-U}{1-U}) + C(U, t) \right)_{t \in [0,1]}.$$

Given a sequence $(C, (T_1, \tau_1), (T_2, \tau_2), \dots)$ we characterize all D -valued solutions of the generalized equation and show that every solution can be represented as the convolution of a solution to the inhomogeneous equation and a general solution of the homogeneous equation.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
Quicksort und der Quicksort-Prozess: ein kurzer Überblick	6
Gegenstand und Aufbau der Arbeit	11
1 Mathematische Grundlagen und Notation	13
1.1 Der Raum D	14
1.2 Stochastische Fixpunktgleichungen in \mathbb{R}	16
1.2.1 Der homogene Fall	18
1.2.2 Der inhomogene Fall	19
1.3 Stabile Verteilungen und stabile Lévy-Prozesse	20
1.3.1 Stabile Verteilungen	20
1.3.2 Stabile Lévy-Prozesse	22
1.4 Der gewichtete Verzweigungsprozess	24
1.4.1 Der Ulam-Harris-Baum	24
1.4.2 Gewichtete Verzweigung	26
1.4.3 Beispiel: Intervalle	29
1.4.4 Beispiel: Der endogene Fixpunkt W	31
2 Die homogene Gleichung auf D_-	33
2.1 Existenz von Lösungen	36
2.1.1 Eine heuristische Betrachtung	36
2.1.2 Formal: Die Existenz einer Lösung	41
2.2 Eindeutigkeit der Lösung	50
2.2.1 Eine heuristische Betrachtung	50
2.2.2 Formal: Die Eindeutigkeit der Lösung	51
2.3 Beispiel: Eine Charakterisierung der Brown'schen Bewegung	59
3 Die inhomogene Gleichung auf D_-	61
3.1 Existenz von Lösungen	62
3.1.1 Eine spezielle Lösung an der Stelle $t = 1$	62
3.1.2 Eine spezielle Lösung der inhomogenen Prozessgleichung	65

3.2	Alle Lösungen der inhomogenen Gleichung	73
3.2.1	Beispiel: Alle Lösungen der Quicksort-Prozess-Gleichung (Beweis von Theorem 0.1)	75
3.3	Der Übergang von D_- zu D	77
A	Mathematische Hilfsmittel	81
A.1	Projektive Familien und der Satz von Kolmogorov	81
A.2	Reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten	83

Einleitung

Gegenstand der Arbeit

Eine *stochastische Fixpunktgleichung* ist eine Verteilungsgleichung, d.h. wir betrachten den Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen \mathcal{P} über einem Raum S . In der vorliegenden Arbeit ist S in der Regel \mathbb{R} , eine Teilmenge von \mathbb{R} oder D , der Raum der càdlàg-Funktionen über dem Einheitsintervall $[0, 1]$. Zu einer gegebenen gemeinsamen Verteilung einer Familie von Zufallsgrößen $(\xi_j)_{j \geq 1}$ und einer gegebenen S -wertigen Funktion g mit passendem Definitionsbereich betrachten wir eine Abbildung der Form

$$\mathcal{S} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}, \quad \mu \mapsto \mathcal{L}(g((\xi_j, X_j)_{j \geq 1})). \quad (0.1)$$

Diese bildet eine Verteilung μ über S auf die Verteilung von $g((\xi_j, X_j)_{j \geq 1})$ ab, wobei die X_1, X_2, \dots unabhängige Zufallsgrößen mit Verteilung μ und unabhängig von der Familie $(\xi_j)_{j \geq 1}$ sind.

Unter einem stochastischen Fixpunkt verstehen wir also eine Verteilung μ , sodass $\mathcal{S}(\mu) = \mu$ gilt.

In Termen von Zufallsgrößen können wir eine solche Fixpunktgleichung auch als

$$X \stackrel{d}{=} g((\xi_j, X_j)_{j \geq 1}) \quad (0.2)$$

schreiben. Hier ist X eine Kopie von X_1, X_2, \dots und $\stackrel{d}{=}$ bezeichnet Gleichheit in Verteilung.

Die Verteilung von X nennen wir dann eine *Lösung* von (0.2). Oft behandeln wir den Begriff der Lösung etwas missbräuchlich und bezeichnen eine Zufallsgröße X ebenfalls als Lösung, falls die Verteilung von X eine Lösung von (0.2) ist.

Die natürliche Fragestellung ist nun, ob bzw. unter welchen Bedingungen solche Fixpunkte *existieren* oder in einem geeigneten Sinne sogar *eindeutig* sind.

Für einen umfassenderen Überblick zum Themenkomplexes “stochastische Fixpunktgleichungen” sei auf den Übersichtsartikel von Aldous und Bandyopadhyay [1] verwiesen.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir prozesswertige stochastische Fixpunktgleichungen vom Summen-Typ der Form

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j \geq 1} T_j X_j(\tau_j(t)) + C(t) \right)_{t \in [0,1]}. \quad (0.3)$$

Dabei ist $(C, (T_j, \tau_j)_{j \geq 1})$ eine gegebene Folge von Zufallsgrößen, wobei C Werte in den Funktionen über dem Einheitsintervall $[0, 1]$ hat, die $(T_j)_{j \geq 1}$ sind Zufallsgrößen mit Werten in den nicht-negativen reellen Zahlen, die $(\tau_j)_{j \geq 1}$ sind Zufallsgrößen mit Werte in den stetigen monoton steigenden Funktionen über dem Einheitsintervall $[0, 1]$ und die $(X_j)_{j \geq 1}$ sind unabhängige Kopien einer Zufallsgröße X ebenfalls mit Werten in den Funktionen über dem Einheitsintervall $[0, 1]$ und unabhängig von $(C, (T_j, \tau_j)_{j \geq 1})$.

Unter passenden Bedingungen an die Folge $(C, (T_j, \tau_j)_{j \geq 1})$ geben wir eine vollständige Beschreibung der Menge aller Lösungen von (0.3) an. Diese können als Faltung einer Lösung der inhomogenen Prozessgleichung und einer allgemeinen Lösung der homogenen Prozessgleichung dargestellt werden.

Unser Ansatz stützt sich auf Ergebnisse zu verwandten reellwertigen Gleichungen, genauer betrachten wir die Gleichung (0.3) zunächst an der Stelle $t = 1$. Dies liefert uns eine reellwertige Fixpunktgleichung von der Form

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j \geq 1} T_j X_j + C \quad (0.4)$$

zu einer reellwertigen Folge $(C, (T_j)_{j \geq 1})$ von Zufallsgrößen.

Wir beziehen uns speziell auf eine Arbeit von Alsmeyer und Meiners [2]. Diese stellt die jüngste Erweiterung einer Jahrzehnte andauernden Entwicklung auf dem Gebiet der reellwertigen Fixpunktgleichungen vom Summen-Typ dar [3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 17].

Unter milden Bedingungen an die Folge $(C, (T_j)_{j \geq 1})$ geben sie eine vollständige Beschreibung der Menge aller Lösungen von (0.4) an.

Für unseren Ansatz nutzen wir die Ergebnisse von Alsmeyer und Meiners [2] in Kombination mit der rekursiven Struktur von (0.3).

Bevor wir die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit vorstellen, wollen wir eine kurze Motivation zur Betrachtung stochastischer Fixpunktgleichungen für Prozesse geben.

Stochastische Fixpunktgleichungen für Prozesse

Die Motivation stochastische Fixpunktgleichungen für Prozesse auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1]$ zu studieren, ergab sich aus der Laufzeitanalyse zufälliger Sortieralgorithmen.

Ein erstes Beispiel: QUICKSELECT oder FIND

QUICKSELECT oder FIND ist ein von Hoare [15] eingeführter Algorithmus, um aus einer n -elementigen Menge S das k -kleinste Element zu finden.

Wir präsentieren an dieser Stelle einige ausgewählte Ergebnisse von Grübel und Rösler [12] bzw. Knof und Rösler [21]. Für weitere Details sei auf [12, 20, 21] verwiesen.

Der 2-FIND-Algorithmus kann wie folgt beschrieben werden:

- Ist S einelementig, so enthält S das gesuchte Element.
- Anderenfalls wähle zufällig ein Pivot-Element s .
- Vergleiche alle Elemente aus S mit dem Pivot-Element s und bilde die Menge $S_{<}$ der strikt kleineren Elemente und die Menge S_{\geq} der größeren Elemente (inklusive s).
- – Ist $|S_{<}| \geq k$, wende den Algorithmus auf $S_{<}$ an.
– Ist $|S_{<}| < k$, wende den Algorithmus auf S_{\geq} an.

Von Interesse ist die zufällige Laufzeit des Algorithmus (gemessen durch die Anzahl der benötigten Vergleiche). Der Zufall entsteht hierbei durch die Wahl des Pivot-Elements.

Wir betrachten den Fall, dass das Pivot-Element mit einer Gleichverteilung aus den n Elementen von S gewählt wird.

Für $n, k \in \mathbb{N}$ gebe die Zufallsgröße $X(n, k)$ die Anzahl der nötigen Vergleiche an, um aus einer n -elementigen Menge das k -kleinste Element zu finden.

In [12] wurde gezeigt, dass passend normiert durch

$$Y(n, \frac{k-1}{n}) := \frac{X(n, k)}{n}$$

und zu einer rechts-stetigen Treppenfunktion

$$\tilde{Y}(n, s) := Y(n, \lfloor \frac{sn}{n} \rfloor)$$

auf $[0, 1)$ erweitert, die $\tilde{Y}(n, \cdot)$ in Verteilung gegen einen Prozess Y mit Werten in D , dem Raum der càdlàg-Funktionen, konvergieren.

Der Grenzprozess Y wird durch die Fixpunktgleichung

$$(Y(t))_{t \in [0,1)} \stackrel{d}{=} \left(\mathbf{1}_{U \geq t} U Y_1\left(\frac{t}{U}\right) + \mathbf{1}_{t < U} (1 - U) Y_2\left(\frac{t-U}{1-U}\right) + 1 \right)_{t \in [0,1)} \quad (0.5)$$

charakterisiert, wobei U, Y_1, Y_2 unabhängig, U gleich-verteilt auf $(0, 1)$ und Y_1, Y_2 wie Y verteilt sind mit Werten in D , siehe [20, 21].

In seiner Dissertation hat Knof [20] (siehe auch [21]) Fixpunktgleichungen vom FIND-Typ (0.5) in allgemeinerer Form studiert. Knof betrachtete Gleichungen von der Form

$$(Y(t))_{t \in I} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{t \in I_j} A_j(t) Y_j(B_j(t)) + C(t) \right)_{t \in I},$$

wobei $(X_j)_{j \geq 1}, ((I_j)_{j \geq 1}, (A_j)_{j \geq 1}, (B_j)_{j \geq 1}, C)$ unabhängig sind. Die $(X_j)_{j \geq 1}$ sind unabhängig und verteilt wie X mit Werten in D , die $(I_j)_{j \geq 1}$ sind Zufallsgrößen mit Werten in den Teilintervallen von I , die $(A_j)_{j \geq 1}$ und C sind Zufallsgrößen mit Werten in den stetigen Funktionen über I und die $(B_j)_{j \geq 1}$ sind Zufallsgrößen mit Werten in den stetigen, monoton steigenden Funktionen über I .

QUICKSORT: ein kurzer Überblick

QUICKSORT ist ein von Hoare [14, 16] eingeführter Sortieralgorithmus, der nach dem *divide and conquer* Prinzip arbeitet. Die grundlegende Vorgehensweise nach der Quicksort eine Liste S von n verschiedenen Elementen sortiert, kann wie folgt beschrieben werden:

- Wähle ein (zufälliges) Pivot-Element s aus der Liste S .
- Teile die Liste S in drei Unterlisten:
 - $S_{<}$ alle Elemente die echt kleiner sind als das Pivot-Element
 - Das Pivot-Element

- $S_>$ alle Elemente die echt größer sind als das Pivot-Element
- Ordne die Listen $(S_<, s, S_>)$.
- Wiederhole den Vorgang für die Teillisten mit mindestens zwei Elementen.

Der Algorithmus terminiert und gibt eine sortierte Liste aus.

Die Laufzeit des Algorithmus (gemessen an der Anzahl der nötigen Vergleiche) hängt damit von der Wahl des Pivot-Elements ab. Wir betrachten den Fall, dass das Pivot-Element mit einer Gleichverteilung aus den n Elementen von S gewählt wird.

Für $n \in \mathbb{N}$ gebe die Zufallsgröße $X(n)$ die Anzahl der nötigen Vergleiche an, um eine n -elementige Menge zu sortieren. Passend normiert durch

$$Y(n) := \frac{X(n) - \mathbb{E}(X(n))}{n}, \quad n \geq 2,$$

konvergiert $Y(n)$ für $n \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen eine Zufallsgröße Y , die folgende Verteilungsgleichung

$$Y \stackrel{d}{=} UY_1 + (1 - U)Y_2 + C(U)$$

erfüllt [27].

Dabei sind U, Y_1, Y_2 unabhängig, U ist gleich-verteilt auf $(0, 1)$ und Y_1, Y_2 sind wie Y verteilt. Die Funktion C ist gegeben durch

$$C(u) = 2u \log u + 2(1 - u) \log(1 - u) + 1, \quad u \in (0, 1), \quad (0.6)$$

und erweitert durch $C(u) = 1$ für $u = 0, 1$.

Die sogenannte **Quicksort-Verteilung** [26, 27] ist charakterisiert als die eindeutige Lösung Q mit $\mathbb{E}Q = 0$ und $\text{Var } Q < \infty$ der stochastischen Fixpunktgleichung

$$Q \stackrel{d}{=} UQ_1 + (1 - U)Q_2 + C(U). \quad (0.7)$$

Dabei sind U, Q_1, Q_2 unabhängig, U ist gleich-verteilt auf $[0, 1]$ und Q_1, Q_2 sind verteilt wie Q mit C aus (0.6).

Mittels Einbettung in ein passendes gewichtetes Verzweigungsmodell kann eine Version von Q als fast sicherer Grenzwert eines L_2 -Martingals

$R_n = \sum_{|v|<n} L_v C_v$ gewählt werden [25, 26, 29]. Die fast sichere Konvergenz der

$$R_n^v = \sum_{|v|<n} L_{v,vw} C_{vw}, \quad v \in \mathbb{V}$$

liefert die Existenz von

$$Q^v = \sum_{w \in \mathbb{V}} L_{v,vw} C_{vw}, \quad v \in \mathbb{V},$$

die fast sicher

$$Q^v = U^v Q^{v1} + (1 - U^v) Q^{v2} + C(U^v) \quad (0.8)$$

für alle $v \in \mathbb{V}$ erfüllen.

Partial Quicksort und der Quicksort-Prozess

Der Algorithmus PARTIAL QUICKSORT geht auf Martínez [24] zurück und ist eine Kombination aus QUICKSELECT und QUICKSORT. Aus einer Liste S mit n verschiedenen Einträgen sollen die l kleinsten Elemente gefunden und sortiert werden:

- Wähle ein Pivot-Element s mit Gleichverteilung.
- Teile die Liste S in Unterlisten:
 - $S_{<}$ alle Elemente die echt kleiner sind als das Pivot-Element
 - Das Pivot-Element s
 - $S_{>}$ alle Elemente die echt größer sind als das Pivot-Element
- Ordne die Listen $(S_{<}, s, S_{>})$.
- Ist das Pivot-Element strikt kleiner als l :
 - Sortiere die Unterliste $S_{<}$ mit Quicksort.
 - Wende Partial Quicksort auf die Unterliste $S_{>}$ an.
- Ist das Pivot-Element größer-gleich l :
 - Wende Partial Quicksort auf die Unterliste $S_{<}$ an.

Für den Fall $l = n$ entspricht PARTIAL QUICKSORT dem gewöhnlichen QUICKSORT.

Für $n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}_0$ gebe die Zufallsgröße $X(n, l)$ die Anzahl der Vergleiche an, die nötig sind um die $0 \leq l \leq |S| = n$ kleinsten Elemente von S zu finden und zu sortieren, wobei $X(n, 0) = 0$ ist.

In [25] betrachten Ragab und Rösler l als Zeit-Index:
Nach einer Normierung

$$\left(Y(n, \frac{l}{n})\right)_{l \leq n} = \left(\frac{X(n, l) - a(n, l)}{n + 1}\right)_{l \leq n}$$

mit $a(n, l) = \mathbb{E}(X(n, l))$ erweitern sie $Y(n, \cdot)$ zu einem càdlàg-Prozess

$$\left(\tilde{Y}(n, t)\right)_{t \in [0, 1]} = \left(\frac{X(n, \lfloor tn \rfloor) - a(n, \lfloor tn \rfloor)}{n + 1}\right)_{t \in [0, 1]}$$

der links-stetig in 1 ist.

Für $n \rightarrow \infty$ konvergieren die endlich-dimensionalen Verteilungen (ohne 0) von $\tilde{Y}(n, \cdot)$ gegen die eines Grenzprozesses Y mit Werten in D . Dieser Grenzprozess Y heißt **Quicksort-Prozess** [25, 29] und seine Verteilung wird durch die stochastische Fixpunktgleichung

$$\left(Y(t)\right)_{t \in [0, 1]} \stackrel{d}{=} \left(\mathbb{1}_{t < U} U Y_1\left(\frac{t}{U}\right) + \mathbb{1}_{t \geq U} (U Y_1(1) + (1 - U) Y_2\left(\frac{t - U}{1 - U}\right)) + C(U, t)\right)_{t \in [0, 1]} \quad (0.9)$$

charakterisiert, wobei U, Y_1, Y_2 unabhängig sind, U gleich-verteilt auf $(0, 1)$ ist und Y_1, Y_2 verteilt sind wie Y mit Werten in D .

Die Funktion $C = C(\cdot, \cdot)$ ist durch

$$\begin{aligned} C(s, t) &:= \mathbb{1}_{t \geq s} C(s) + \mathbb{1}_{t < s} (2s - 1 + 2(1 - t) \log(1 - t) \\ &\quad - 2(s - t) \log(s - t) + 2s \log s) \\ C(s) &:= 1 + 2s \log s + 2(1 - s) \log(1 - s) \end{aligned} \quad (0.10)$$

gegeben.

Alle Lösungen der Quicksort-Prozessgleichung

In der vorliegenden Arbeit knüpfen wir an die Ergebnisse zur Quicksort-Prozessgleichung aus einer gemeinsamen Arbeit von Hallmann, Rösler und Wnuk [13] an. Sie untersuchen die Quicksort-Prozessgleichung (0.9) auf Lösungen mit Werten in D .

Genauer arbeiten sie auf dem Raum D_- der càglàd Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$. Die zugrundeliegende Topologie ist dieselbe (siehe z.B. [8]).

Der Quicksort-Prozess (0.9) wie in [25] hat keine deterministischen Sprünge,

i.e. $\mathbb{P}(Y(t+) \neq Y(t-)) = 0$ für alle $t \in (0, 1)$ (siehe [29]) und die càdlàg- bzw. càglàd-Version haben dieselbe Verteilung.

Der Quicksort-Prozess wird charakterisiert durch

$$(Y(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(UY_1(1 \wedge \frac{t}{U}) + (1-U)Y_2(0 \vee \frac{t-U}{1-U}) + C(U, t) \right)_{t \in [0,1]}, \quad (\text{Q})$$

wobei U, Y_1, Y_2 unabhängig sind, U gleich-verteilt auf $(0, 1)$ ist und Y_1, Y_2 wie Y verteilt sind mit Werten in D_- .

Die Funktion $C : [0, 1] \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$\begin{aligned} C(s, t) &:= \mathbf{1}_{t>s}C(s) + \mathbf{1}_{t \leq s}(2s - 1 + 2(1-t)\log(1-t) \\ &\quad - 2(s-t)\log(s-t) + 2s\log s) \\ C(s) &:= 1 + 2s\log s + 2(1-s)\log(1-s) \end{aligned} \quad (0.11)$$

gegeben und wir erweitern C durch $C(\cdot, 0) := 0$.

Das Hauptergebnis ihrer Arbeit ist das folgende Theorem:

Theorem 0.1 (Theorem 1.1 in [13]).

Jede Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung (Q) in D_- ist eindeutig als die Verteilung von

$$R + aY + bI, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0 \quad (0.12)$$

darstellbar¹. Dabei ist R der Quicksort-Prozess, Y ein unabhängiger standard-Cauchy-Prozess und I bezeichnet die Identität.

Eine Standard-Rechnung zeigt, dass die Prozesse in (0.12) tatsächlich eine Lösung von (Q) definieren. Der anspruchsvollere Teil ist die Eindeutigkeit: Diese kann auf das folgende Lemma reduziert werden.

Lemma 0.2 (Lemma 3.1 in [13]).

Die homogene stochastische Fixpunktgleichung

$$(Y(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(UY_1(1 \wedge \frac{t}{U}) + (1-U)Y_2(0 \vee \frac{t-U}{1-U}) \right)_{t \in [0,1]} \quad (0.13)$$

in D_- hat genau eine Lösung so, dass $Y(1)$ standard-Cauchy-verteilt ist.

¹d.h. Zu jeder Lösung X von (Q) in D_- ex. eindeutige $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$, sodass $X \stackrel{d}{=} R + aY + bI$ gilt.

Aufbau und Ergebnisse der Arbeit

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir allgemeinere Gleichungen von QUICKSORT-Typ (Q) auf Lösungen in D_- .

Wir betrachten dabei Gleichungen von der Form

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j \geq 1} T_j X_j(\tau_j(t)) + C(t) \right)_{t \in [0,1]}. \quad (0.14)$$

Dabei sind die $(X_j)_{j \geq 1}$ und $(T_j, \tau_j)_{j \geq 1}$ unabhängig, die $(X_j)_{j \geq 1}$ sind verteilt wie X mit Werten in D_- , die $(T_j)_{j \geq 1}$ sind nicht-negative reell-wertige Zufallsgrößen, die $(\tau_j)_{j \geq 1}$ Zufallsgrößen mit Werten in den stetigen monoton steigenden Funktionen in $[0, 1]$ und C ist eine Zufallsgröße mit Werten in D_- .

In Kapitel 1 stellen wir die benötigten Grundlagen für unsere Untersuchungen bereit und führen Notationen ein.

Wir betrachten in Kapitel 2 zunächst die homogene Version von (0.14), i.e. $C \equiv 0$, also Gleichungen der Form

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j \geq 1} T_j X_j(\tau_j(t)) \right)_{t \in [0,1]}. \quad (0.15)$$

Unter Bedingungen an die Folge $(T_j, \tau_j)_{j \geq 1}$ geben wir eine vollständige Beschreibung der Menge aller Lösungen von (0.15) an.

Um die Lösungen der homogenen Gleichung zu charakterisieren, konstruieren wir zunächst unter den technischen Bedingungen des Kapitels an die Folge $(T_j, \tau_j)_{j \geq 1}$ eine Funktion f (siehe (2.12)) mit Werten in D_- .

f kann in Termen von $(T_j, \tau_j)_{j \geq 1}$ und einer speziellen Lösung W (siehe (1.14)) der assoziierten reell-wertigen Fixpunktgleichung

$$W \stackrel{d}{=} \sum_{j \geq 1} T_j^\alpha W_j$$

angegeben werden.

Das Hauptresultat des zweiten Kapitels ist eine Charakterisierung der Lösungen der homogenen Gleichung (0.15) in Termen von f . Diese ergibt sich aus den folgenden zwei Theoremen:

Theorem (Existenz: siehe Theorem 2.1). *Unter technischen Voraussetzungen definiert $Y \circ f$ (siehe (2.13)) eine Lösung von (0.15).*

Hier sind Y und f unabhängig, Y ist ein α -stabiler Lévy-Prozess, der unabhängig von der Folge $(T_j, \tau_j)_{j \geq 1}$ ist, und f (siehe (2.12)) ist durch $(T_j, \tau_j)_{j \geq 1}$ eindeutig bestimmt.

Für die Eindeutigkeit der Lösungen von (0.15) geben wir die Verteilung μ , die eine Lösung X an der Stelle $t = 1$ haben soll, vor.

Die Lösungen μ der resultierenden reell-wertigen Gleichung sind nach Alsmeyer und Meiners [2] eindeutig bestimmt. Wir zeigen, dass die Lösungen X von (0.15), die $X(1) \stackrel{d}{=} \mu$ erfüllen, ebenfalls eindeutig bestimmt sind.

Theorem (Eindeutigkeit: siehe Theorem 2.5). *Unter technischen Voraussetzungen und zu einer gegebenen Lösung μ von (0.15) an der Stelle $t = 1$ sind alle Lösungen X der homogenen Fixpunktgleichung (0.15) in D_- mit $X(1) \stackrel{d}{=} \mu$ eindeutig als die Verteilung von $Y \circ f$ darstellbar.*

Dabei sind Y und f unabhängig, Y ein α -stabiler Lévy-Prozess und f wie in (2.12).

In Kapitel 3 erweitern wir unsere Betrachtungen aus Kapitel 2 auf inhomogene Gleichungen (0.14)

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j \geq 1} T_j X_j(\tau_j(t)) + C(t) \right)_{t \in [0,1]}.$$

Auch hier geben wir unter Bedingungen an die Folge $(C, (T_j, \tau_j)_{j \geq 1})$ eine vollständige Beschreibung der Menge aller Lösungen von (0.14) an.

Wir konstruieren zunächst eine spezielle Lösung \mathcal{Z} von (0.14) (siehe (3.6)) als Grenzwert eines gewichteten Verzweigungsprozesses und zeigen anschließend, dass wir alle Lösungen von (0.14) in Termen von \mathcal{Z} eindeutig beschreiben können.

Das Hauptresultat des dritten Kapitels ist das folgende Theorem:

Theorem (Alle Lösungen: siehe Theorem 3.8). *Unter technischen Voraussetzungen ist jede Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung (0.14) in D_- eindeutig als die Verteilung von*

$$\mathcal{Z} + (Y \circ f)$$

gegeben. Hier ist \mathcal{Z} die spezielle Lösung von (0.14) (siehe (3.6)) und $(Y \circ f)$ eine unabhängige Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (0.15).

Kapitel 1

Mathematische Grundlagen und Notation

In diesem einleitenden Kapitel schaffen wir eine Basis für die weiterführenden Kapitel dieser Arbeit und stellen die Grundlagen und Hilfsmittel bereit, die nötig sind, um stochastische Fixpunktgleichungen über dem Raum D_- der càglàd-Funktionen zu studieren.

Zunächst geben wir eine kurze Einführung in den Raum D der càdlàg-Funktionen und definieren den Raum D_- der càglàd-Funktionen. Die präsentierten Standards zum Raum D sind unter Anderem im Standardwerk von Billingsley [8] zu finden.

Anschließend geben wir eine kleine Übersicht über bekannte Ergebnisse zu stochastischen Fixpunktgleichungen der *Smoothing Transformation* oder *glättender Gleichungen* über den reellen Zahlen.

Wir geben hier lediglich die benötigten Resultate aus einer Arbeit von Alsmeyer und Meiners an und folgen in der Darstellung [2]. Für eine ausführlichere Darstellung und weiterführende Resultate sei auf ebendiese Arbeit und die Literaturverweise darin verwiesen.

In diesem Kontext führen wir den Begriff der *stabilen Verteilung* ein und zeigen einen Zusammenhang zu den Fixpunkten *glättender Gleichungen* in \mathbb{R} auf.

Das Konzept der stabilen Verteilung lässt sich in der Form von *stabilen Prozessen* auf Prozesse übertragen.

Wir geben weiter ein allgemeines gewichtetes Verzweigungsmodell an, das später noch spezialisiert werden kann.

Abschließend untersuchen wir eine spezielle homogene reelle Gleichung auf Lösungen und stellen einen direkten Bezug zwischen dem Verzweigungsmodell

dell und Lösungen her. Die in diesem Kapitel eingeführte Notation wird in der vorliegenden Arbeit durchgehend Verwendung finden.

1.1 Der Raum D

In diesem Abschnitt führen wir den Raum D der càdlàg-Funktionen, sowie den Raum \mathcal{F} der messbaren Funktionen über D ein. Wir definieren die Skorokhod-Metrik d_0 , die die Skorokhod-Topologie erzeugt und (D, d_0) zu einem vollständigen, separablen metrischen Raum macht. Auf einem Teilraum $\mathcal{F}_p \subset \mathcal{F}$ definieren wir nach Äquivalenzklassenbildung eine Norm $\|\cdot\|_{\infty, p}$ und damit ein Analogon zu L_p .

Sei $D = D[0, 1]$ der Raum der reellen, rechts-stetigen Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ deren linksseitige Grenzwerte existieren:

- (i) Für $0 \leq t < 1$ existiert $f(t+) = \lim_{s \searrow t} f(s)$ und $f(t+) = f(t)$.
- (ii) Für $0 < t \leq 1$ existiert $f(t-) = \lim_{s \nearrow t} f(s)$.

Funktionen mit diesen zwei Eigenschaften heißen **càdlàg**-Funktionen.¹

Bezeichne mit Λ die Menge der streng monoton wachsenden, stetigen Abbildungen $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\lambda(0) = 0$ und $\lambda(1) = 1$. Für $\lambda \in \Lambda$ sei

$$\|\lambda\|_{\circ} := \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \left| \log \left(\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right) \right|$$

und bezeichne mit $\|\cdot\|_{\infty}$ die Supremums-Norm auf D

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|.$$

Wir definieren die **Skorokhod-Metrik** $d_0 : D \times D \rightarrow [0, \infty]$ durch

$$d_0(f, g) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda\|_{\circ} \vee \|f - g \circ \lambda\|_{\infty} \}.$$

Wir bezeichnen mit \mathcal{D} die **Borel- σ -Algebra** auf D (bzgl. d_0).

Weitere Details und die folgenden Grundlagen zu D können unter Anderem in [8] gefunden werden.

Theorem 1.1. *Der Raum (D, d_0) versehen mit der Skorokhod-Metrik ist ein vollständiger, separabler metrischer Raum.*

¹Französisch für *continu à droite, limites à gauche*.

Lemma 1.2. Die Maße auf \mathcal{D} sind durch ihre endlich-dimensionalen Verteilungen eindeutig bestimmt.

Zufallsgrößen mit Werten in D können wie folgt charakterisiert werden:

Lemma 1.3. Sei $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (D, \mathcal{D})$ eine Abbildung, dann ist X genau dann messbar, wenn für alle $s \in [0, 1]$ die Abbildung

$$X_s : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \quad \omega \mapsto X(\omega)(s),$$

messbar ist.

Für $0 < p < \infty$ sei $\|\cdot\|_p$ die erweiterte L_p -Norm für reell-wertige Zufallsgrößen, d.h.

$$\|\cdot\|_p := (\mathbb{E}|\cdot|^p)^{(1 \wedge \frac{1}{p})}.$$

Bemerkung. Wir sprechen von einer *erweiterten* L_p -Norm, da die klassische Definition

$$\|\cdot\|_p = (\mathbb{E}|\cdot|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

für $0 < p < 1$ nur eine Halbnorm definiert.

Bezeichne \mathcal{F} den Raum der messbaren Funktionen $X : \Omega \rightarrow D$ und sei

$$\|\cdot\|_{\infty, p} := \|\|\cdot\|_{\infty}\|_p.$$

Auf

$$\mathcal{F}_p := \{X \in \mathcal{F} : \|X\|_{\infty, p} < \infty\}$$

definiert $\|\cdot\|_{\infty, p}$ eine Halbnorm und mittels Äquivalenzklassenbildung auf \mathcal{F}_p bezüglich der Äquivalenzrelation \simeq

$$X \simeq Y :\Leftrightarrow \mathbb{P}(X(t) \neq Y(t)) = 0 \text{ für alle } t \in [0, 1]$$

erhalten wir eine Norm auf der Menge der Äquivalenzklassen, die wir mit F_p bezeichnen.

Weiter bezeichnen wir mit $[X]_{\simeq} := \{Y \in \mathcal{F}_p : X \simeq Y\}$ die Äquivalenzklasse von $X \in \mathcal{F}_p$ und definieren unter leichtem Notationsmissbrauch

$$F_p := \{[X]_{\simeq} : X \in \mathcal{F}_p\} \text{ sowie } \|[X]_{\simeq}\|_{\infty, p} =: \|X\|_{\infty, p}.$$

Im Folgenden unterscheiden wir nicht zwischen Zufallsgrößen und Äquivalenzklassen.

Lemma 1.4. Für alle $0 < p < \infty$ ist $(F_p, \|\cdot\|_{\infty, p})$ ein Banachraum.

Wir bezeichnen mit D_- den Raum der reellen, links-stetigen Funktionen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ deren rechtsseitige Grenzwerte existieren. Funktionen mit diesen Eigenschaften bezeichnen wir im Folgenden als **càglàd-Funktionen**.²

Bemerkung. Die Eigenschaften und Definitionen aus diesem Abschnitt übertragen sich von D auf D_- .

1.2 Stochastische Fixpunktgleichungen in \mathbb{R}

Die Ergebnisse von Alsmeyer und Meiners [2] zu Fixpunkten glättender Gleichungen in \mathbb{R} sind für unsere Untersuchungen von zentraler Bedeutung. Aus Gründen der Lesbarkeit der vorliegenden Arbeit fassen wir die Resultate aus [2] zusammen und führen gleichzeitig wichtige Begriffe und Notationen ein. Unsere Ausführungen orientieren sich dabei an denen in [2].

Sei $(C, T) = (C, T_1, T_2, \dots)$ eine Folge reell-wertiger Zufallsgrößen mit $T_j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ für $N = \sup\{j \geq 1 : T_j > 0\}$. Sei $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} . Die zu (C, T) gehörige **Smoothing Transformation** oder **glättende Gleichung** ist definiert als

$$\Upsilon : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}), \quad P \mapsto \mathcal{L}\left(C + \sum_{j \geq 1} T_j X_j\right),$$

wobei X_1, X_2, \dots eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit Verteilung P unabhängig von (C, T) ist und $\mathcal{L}(X)$ die Verteilung einer Zufallsgröße X bezeichnet.

Ein Fixpunkt dieser glättenden Gleichung ist ein $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, sodass für X mit Verteilung P folgende **inhomogene Gleichung**

$$X \stackrel{d}{=} C + \sum_{j \geq 1} T_j X_j \tag{1.1}$$

erfüllt ist. Für den Fall $C = 0$, also

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j \geq 1} T_j X_j, \tag{1.2}$$

nennen wir diese Gleichung **homogen**. Die Wohldefiniertheit der rechten Seite in (1.1) und (1.2) ist durch $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ gegeben.

²Französisch für *continu à gauche, limites à droite*.

Die Resultate von Alsmeyer und Meiners [2] sind in Termen von charakteristischen Funktionen gegeben. Die charakteristische Funktion ϕ einer Zufallsgröße X ist gegeben als

$$\phi(t) = \mathbb{E}(\exp(itX)), \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei i die imaginäre Einheit bezeichnet. Durch die charakteristische Funktion ϕ einer Zufallsgröße X ist deren Verteilung eindeutig bestimmt. Die Gleichungen (1.1) bzw. (1.2) haben die äquivalente Formulierung

$$\phi(t) = \mathbb{E}(\exp(iCt) \prod_{j \geq 1} \phi(T_j t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

im inhomogenen Fall, bzw.

$$\phi(t) = \mathbb{E}(\prod_{j \geq 1} \phi(T_j t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

im homogenen Fall.

Wir nehmen hier ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass

$$N = \sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\{T_j > 0\}}$$

gilt und definieren die Funktion

$$m : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty], \quad \theta \mapsto \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N T_j^\theta\right). \quad (1.5)$$

Details zur Umordnung folgen in Kapitel 2.

Wir machen folgende Annahmen:

$$\mathbb{P}(T_j \in \{0\} \cup r^{\mathbb{Z}} \text{ für alle } j \geq 1) < 1 \text{ für alle } r \geq 1. \quad (\text{A1})$$

$$m(0) = \mathbb{E}N > 1. \quad (\text{A2})$$

$$1 = m(\alpha) < m(\beta) \text{ für ein } \alpha > 0 \text{ und alle } \beta \in [0, \alpha). \quad (\text{A3})$$

Wesentlich ist an dieser Stelle die Existenz eines solchen α . Die Eindeutigkeit von α folgt aus geometrischen Eigenschaften von m , i.e. m ist strikt logkonvex [28]. α wird **charakteristischer Exponent** (von T) genannt. Dieser ist für unsere Untersuchungen von zentraler Bedeutung.

Um die Resultate formulieren zu können, benötigen wir noch etwas Notation: Wir fixieren im Folgenden eine Folge $T = (T_1, T_2, \dots)$. Bezeichne \mathfrak{F} die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße $\neq \delta_0$ auf \mathbb{R} und

$$\mathcal{S}(\mathfrak{F})(C) := \{\phi \in \mathfrak{F} : \phi \text{ ist Lösung von (1.3)}\}. \quad (1.6)$$

Wir schreiben kurz $\mathcal{S}(\mathfrak{F})$ für $\mathcal{S}(\mathfrak{F})(0)$. Um die Mengen $\mathcal{S}(\mathfrak{F})(C)$, bzw. $\mathcal{S}(\mathfrak{F})$ vollständig beschreiben zu können, benötigen wir noch Bedingungen an T im homogenen Fall, bzw. an (C, T) im inhomogenen Fall.

1.2.1 Der homogene Fall

Um im homogenen Fall die Existenz von Lösungen gewährleisten zu können, stellen wir die folgenden zusätzlichen Bedingungen an T : Sei α der charakteristische Exponent (von T).

$$(A4a) \text{ oder } (A4b) \text{ gelten} \quad (A4)$$

wobei

$$\mathbb{E} \sum_{j=1}^N T_j^\alpha \log T_j \in (-\infty, 0) \text{ und } \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^N T_j^\alpha \right) \log^+ \left(\sum_{j=1}^N T_j^\alpha \right) < \infty. \quad (A4a)$$

$$\text{Es existiert ein } \theta \in [0, \alpha), \text{ sodass } m(\theta) < \infty. \quad (A4b)$$

$$\mathbb{E} \sum_{j=1}^N T_j^\alpha (\log^- T_j)^2 < \infty. \quad (A5)$$

Betrachte die homogene Gleichung

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j \geq 1} T_j^\alpha X_j, \quad (1.7)$$

wobei die X_1, X_2, \dots unabhängig identisch verteilte Kopien von X sind und unabhängig von T und α der charakteristische Exponent (von T). Die Lösungen von (1.7) spielen eine fundamentale Rolle in unseren Untersuchungen. An dieser Stelle nehmen wir an, dass nicht-triviale, also von Null verschiedene, nicht-negative Lösungen von (1.7) existieren und ihre Verteilungen bis auf Skalierung eindeutig sind. Für eine detailliertere Untersuchung verweisen wir auf Abschnitt 1.4.4. Im Folgenden fixieren wir eine spezielle Lösung (wie in (1.14) definiert) und bezeichnen diese mit W .

Wir können nun die Hauptresultate dieses Unterabschnittes formulieren.

Theorem 1.5 (Theorem 2.1 in [2]).

Seien (A1)-(A4) für ein $\alpha \in (0, 2] \setminus \{1\}$ erfüllt. Dann ist die Familie $\mathcal{S}(\mathfrak{F})$ gegeben durch

$$\phi(t) = \begin{cases} \mathbb{E} \exp(-\sigma^\alpha W |t|^\alpha [1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan(\frac{\pi\alpha}{2})]) & \text{für } \alpha \neq 2, \\ \mathbb{E} \exp(-\sigma^2 W t^2) & \text{für } \alpha = 2, \end{cases} \quad (1.8)$$

wobei $\sigma > 0, \beta \in [-1, 1]$ falls $\alpha \neq 2$ und $\sigma > 0$ falls $\alpha = 2$.

Theorem 1.6 (Theorem 2.2 in [2]).

Seien (A1)-(A5) mit $\alpha = 1$ erfüllt. Dann ist die Familie $\mathcal{S}(\mathfrak{F})$ gegeben durch

$$\phi(t) = \mathbb{E} \exp(i\mu W t - \sigma W |t|), \quad (1.9)$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ und $(\mu, \sigma) \neq (0, 0)$.

1.2.2 Der inhomogene Fall

Um im inhomogenen Fall die Existenz von Lösungen gewährleisten zu können, stellen wir zusätzlich zu den Forderungen an T die folgenden Bedingungen an C :

$$m(1) < \infty, \mathbb{E}|C| < \infty \text{ und} \\ (\Upsilon^n(\delta_0))_{n \geq 0} \text{ ist beschränkt in } \mathcal{L}^p \text{ für ein } p \geq 1. \quad (C1)$$

$$m(\beta) < 1 \text{ und } \mathbb{E}|C|^\beta < \infty \text{ für ein } 0 < \beta \leq 1. \quad (C2)$$

Theorem 1.7 (Theorem 2.3 in [2]).

Sei $\mathbb{P}(C \neq 0) > 0$. Seien (A1)-(A4) und eine der Bedingungen (C1) oder (C2) erfüllt. Für den Fall $\alpha = 1$ sei zusätzlich (A5) erfüllt. Dann existiert ein Paar (W^*, W) von Zufallsgrößen, sodass W^* eine Lösung von (1.1) ist und W eine nicht-triviale, nicht-negative Lösung von (1.7).

Die Familie $\mathcal{S}(\mathfrak{F})(C)$ ist gegeben durch

$$\phi(t) = \begin{cases} \mathbb{E} \exp(iW^* t - \sigma^\alpha W |t|^\alpha [1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan(\frac{\pi\alpha}{2})]) & \text{für } \alpha \notin \{1, 2\}, \\ \mathbb{E} \exp(i(W^* + \mu W)t - \sigma W |t|) & \text{für } \alpha = 1, \\ \mathbb{E} \exp(iW^* t - \sigma^2 W t^2) & \text{für } \alpha = 2, \end{cases} \quad (1.10)$$

wobei $\sigma \geq 0, \beta \in [-1, 1]$ für $\alpha \notin \{1, 2\}$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ für $\alpha = 1$ und $\sigma \geq 0$ für $\alpha = 2$.

1.3 Stabile Verteilungen und stabile Lévy-Prozesse

In diesem Abschnitt führen wir die Begriffe *stabile Verteilung* und *stabiler Lévy-Prozess* ein und zeigen einen Zusammenhang zwischen stabilen Verteilungen und den Resultaten aus Abschnitt 1.2 auf. Wir folgen dabei den Ausführungen in [2] und [30].

1.3.1 Stabile Verteilungen

Wir sagen, dass eine Zufallsgröße Y eine **stabile Verteilung** $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ für ein $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$ und $\mu \in \mathbb{R}$ besitzt, falls ihre charakteristische Funktion von der Form

$$\mathbb{E}(\exp(itY)) = \begin{cases} \exp\left(i\mu t - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)\right) & \text{für } \alpha \neq 1, \\ \exp\left(i\mu t - \sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} \log |t|\right)\right) & \text{für } \alpha = 1, \end{cases}$$

ist. Der Index α wird **Stabilitätsindex** genannt und stabile Verteilungen entsprechend oft als **α -stabile Verteilungen** bezeichnet.

Bemerkung. Für den Fall $\alpha = 2$ können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\beta = 0$ annehmen, da der Parameter keinen Einfluss hat, i.e.

$$\mathbb{E}(\exp(itY)) = \exp\left(i\mu t - \sigma^2 |t|^2 \left(1 - i\beta \frac{t}{|t|} \underbrace{\tan\left(\frac{2\pi}{2}\right)}_{=0}\right)\right).$$

Wir geben kurz einige Eigenschaften von stabilen Verteilungen an und erhalten eine anschauliche Interpretation der Parameter σ , β und μ . Die folgenden Standards zu stabilen Verteilungen können unter Anderem in [30] gefunden werden.

Der Parameter μ ist ein **Verschiebungsparameter**:

Eigenschaft 1. Sei $Y \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ und $b \in \mathbb{R}$. Dann ist $Y + b \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu + b)$.

Der Parameter σ wird **Skalierungsparameter** genannt:

Eigenschaft 2. Sei $Y \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ und $a > 0$. Dann ist

$$aY \sim \begin{cases} \mathcal{S}_\alpha(a\sigma, \beta, a\mu) & \text{für } \alpha \neq 1, \\ \mathcal{S}_\alpha(a\sigma, \beta, a\mu - \frac{2}{\pi}a(\log a)\sigma\beta) & \text{für } \alpha = 1. \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = 1$ beeinflusst die Multiplikation mit einer Konstanten die Verschiebung auf nicht-lineare Weise. Der Ausdruck ‘‘Skalierungsparameter’’ für σ ist in diesem Fall entsprechend etwas irreführend.

Der Parameter β beschreibt die **Schiefe** der Verteilung:

Eigenschaft 3. $Y \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ist symmetrisch genau dann, wenn $\beta = 0$ und $\mu = 0$ sind. Sie ist symmetrisch um μ genau dann, wenn $\beta = 0$ ist.

Eine stabile Verteilung $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ heißt **strikt stabile Verteilung**

$$\begin{cases} \Leftrightarrow \mu = 0 & \text{für } \alpha \neq 1, \\ \Leftrightarrow \beta = 0 & \text{für } \alpha = 1. \end{cases}$$

Bei strikt stabilen Verteilungen kann σ also tatsächlich als Skalierung interpretiert werden und wir können eine beliebige strikt stabile Verteilung $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ für $\alpha \neq 1$ bzw. $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, 0, \mu)$ für $\alpha = 1$ durch Reskalierung und Verschiebung auf eine ‘‘standardisierte’’ Verteilung $\mathcal{S}_\alpha(1, \beta, 0)$ für $\alpha \neq 1$ bzw. $\mathcal{S}_\alpha(1, 0, 0)$ für $\alpha = 1$ zurückführen.

Ein Zusammenhang zu Lösungen glättender Gleichungen in \mathbb{R}

Wie von Alsmeyer und Meiners in [2] ausgeführt, besteht eine Verbindung zwischen stabilen Verteilungen und Lösungen glättender Gleichungen. Diese wird im Folgenden kurz beschrieben.

Sei Y eine Zufallsgröße, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert ist wie das Paar (W^*, W) aus Theorem 1.7 und von (W^*, W) unabhängig ist. Sei weiter die Verteilung von Y eine strikt α -stabile Verteilung $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ für $\alpha \in (0, 2) \setminus \{1\}$, $\sigma > 0$ und $\beta \in [-1, 1]$. Dann kann man leicht einsehen, dass die charakteristische Funktion ϕ von $W^* + W^{1/\alpha}Y$ von der Form wie in (1.10) ist. Analoge Konstruktionen können für die Fälle $\alpha = 1$ und $\alpha = 2$ gemacht werden.

Unter den Voraussetzungen und mit der Notation aus Theorem 1.7 folgt also, dass jede Lösung X von (1.1) eine Darstellung der Form

$$X \stackrel{d}{=} W^* + W^{1/\alpha}Y \tag{1.11}$$

besitzt für eine Zufallsgröße Y mit einer strikt α -stabilen Verteilung. Der charakteristische Exponent (von T) α ist hier auch gleichzeitig der Stabilitätsindex α der α -stabilen Verteilung von Y .

Dasselbe gilt für den homogenen Fall mit $W^* = 0$.

1.3.2 Stabile Lévy-Prozesse

Um den Begriff des stabilen Lévy-Prozesses einführen zu können, definieren wir zunächst allgemeine Lévy-Prozesse und geben einige Eigenschaften bzw. Charakterisierungen an. Hierbei beschränken wir uns stets auf reell-wertige Prozesse ohne es explizit zu sagen.

Wir nennen einen stochastischen Prozess $X = (X(t))_{t \geq 0}$ **Lévy-Prozess**, falls er die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) X hat fast sicher càdlàg-Pfade.
- (ii) $X(0) = 0$ fast sicher.
- (iii) X hat unabhängige Zuwächse, d.h. $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ sind unabhängig für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$.
- (iv) X hat stationäre Zuwächse, d.h. die Verteilung von $X(t) - X(s)$ hängt nur von $t - s$ ab für alle $0 \leq s < t$.

Weitere Details und die folgenden Standards zu Lévy-Prozessen können unter Anderem in [22] und [31] gefunden werden.

Für einen Lévy-Prozess X heißt die Funktion

$$\Psi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, u \mapsto -\log \mathbb{E} \exp(iuX(1))$$

charakteristischer Exponent von X und charakterisiert die Verteilung des Prozesses durch die Lévy-Kintchin Formel (vgl. [31, Kap. 1, Theorem 8.1]):

Theorem 1.8. (i) Ist $(X(t))_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess, so existieren eindeutige $a \in \mathbb{R}, s \geq 0$ und ein Lévy-Maß π , sodass

$$\Psi_X(u) = iau + \frac{s^2}{2}u^2 + \int (1 - e^{iux} + iux\mathbf{1}_{\{|x|<1\}})\pi(dx) \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R}.$$

(ii) Für $a \in \mathbb{R}, s \geq 0$ und ein Lévy-Maß π existiert ein Lévy-Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ mit charakteristischem Exponenten wie in (i).

Ein **Lévy-Maß** ist ein Maß π auf \mathbb{R} mit Masse auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $\int (1 \wedge x^2)\pi(dx) < \infty$. Das Tripel (a, s, π) wird **charakteristisches Tripel** von $(X(t))_{t \geq 0}$ genannt.

Lemma 1.9. Sei $(X(t))_{t \geq 0}$ ein Lévy-Prozess, dann gilt für alle $t \geq 0$

$$\mathbb{E} \exp(iuX(t)) = \exp(-t\Psi_X(u)).$$

Ein Lévy-Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ heißt **stabiler Lévy-Prozess**, wenn der charakteristische Exponent Ψ_X von X der einer stabilen Verteilung ist, d.h.:

Für ein $\alpha \in (0, 2]$, $\sigma \geq 0$, $\beta \in [-1, 1]$ und $\mu \in \mathbb{R}$ ist Ψ_X gegeben durch

$$\Psi_X(u) = \begin{cases} -i\mu u + \sigma^\alpha |u|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{u}{|u|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) & \text{für } \alpha \neq 1, \\ -i\mu u + \sigma |u| \left(1 + i\beta \frac{u}{|u|} \frac{2}{\pi} \log |u|\right) & \text{für } \alpha = 1. \end{cases}$$

Analog zu den strikt stabilen Verteilungen sprechen wir von **strikt stabilen Lévy-Prozessen**, wenn die assoziierte stabile Verteilung eine strikt stabile Verteilung ist.

Eine wichtige Eigenschaft der strikt stabilen Lévy-Prozesse ist die Selbstähnlichkeit:

Wir sagen ein Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ ist **selbstähnlich** mit Index $H > 0$, falls für alle $a > 0$ die endlich-dimensionalen Verteilungen von $(X(at))_{t \geq 0}$ mit denen von $(a^H X(t))_{t \geq 0}$ übereinstimmen, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ und alle $a > 0$ gilt

$$(X(at_1), X(at_2), \dots, X(at_n)) \stackrel{d}{=} (a^H X(t_1), a^H X(t_2), \dots, a^H X(t_n)).$$

Lemma 1.10. Die strikt α -stabilen Lévy-Prozesse sind selbstähnlich mit Index H für

$$H = \frac{1}{\alpha}.$$

Bemerkung. Die Unterscheidung zwischen stabilen Prozessen und stabilen Lévy-Prozessen ist in der Literatur uneinheitlich (vgl. [30] und [22]). Es sei darauf hingewiesen, dass wir im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich (strikt) α -stabile Lévy-Prozesse betrachten. Im Folgenden verwenden wir die Begriffe **(strikt) stabile Verteilung** und **(strikt) α -stabile Verteilung**, sowie die Begriffe **(strikt) α -stabiler Prozess** und **(strikt) α -stabiler Lévy-Prozess** jeweils synonym.

1.4 Der gewichtete Verzweigungsprozess

In diesem Abschnitt führen wir den gewichteten Verzweigungsprozess ein und geben einige Beispiele gewichteter Verzweigungsprozesse, die in den späteren Kapiteln eine Rolle spielen.

1.4.1 Der Ulam-Harris-Baum

Wir betrachten den **unendlichen Ulam-Harris-Baum**

$$\mathbb{V} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathbb{N}^n,$$

wobei $\mathbb{N}^0 := \{\emptyset\}$ die Menge ist, die nur das leere Tupel \emptyset enthält. Für einen Vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{N}^n$ schreiben wir kurz $v_1 \dots v_n$. Dabei ist n die Länge von v , kurz $|v| = n$ mit $|\emptyset| := 0$. Für einen weiteren Vektor $w = w_1 \dots w_m \in \mathbb{V}$ sei $vw = v_1 \dots v_n w_1 \dots w_m$.

Wir nennen die Elemente von \mathbb{V} auch **Knoten**, da wir \mathbb{V} in kanonischer Weise als Graph auffassen können, wobei die **Kantenmenge** dann genau aus den Tupeln der Gestalt (v, vi) , $v \in \mathbb{V}$, $i \in \mathbb{N}$, besteht. Dabei fungiert \emptyset als Wurzel und jeder Knoten v ist über den eindeutigen Pfad

$$\emptyset \rightarrow v_1 \rightarrow v_1 v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_1 \dots v_n = v$$

mit der Wurzel verbunden.

Wir bezeichnen für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit \mathbb{V}_n die Menge der Knoten v mit Länge $|v| = n$, d.h. $\mathbb{V}_n := \{v \in \mathbb{V} : |v| = n\}$ und analog $\mathbb{V}_{\leq n}$ bzw. $\mathbb{V}_{< n}$ die Menge der Knoten mit Länge kleiner gleich $|v| \leq n$ bzw. strikt kleiner $|v| < n$.

Für die Menge aller Kanten, die in einem Knoten v starten schreiben wir kurz $e_v := \{(v, vi) : i \in \mathbb{N}\}$.

Die **Menge aller Kantenmengen** von \mathbb{V} bezeichnen wir mit

$E := \{e_v : v \in \mathbb{V}\}$ und entsprechend die Menge der Kantenmengen des Teilgraphen $\mathbb{V}_{\leq n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ mit $E_{< n}$, also $E_{< n} := \{e_v : v \in \mathbb{V}_{< n}\}$.

Für alle $v \in \mathbb{V}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $v|_k$ die Einschränkung von v auf die ersten k Komponenten:

$$v|_k := \begin{cases} \emptyset & \text{für } k = 0, \\ v_1 \dots v_k & \text{für } 1 \leq k \leq |v|, \\ v & \text{für } k \geq |v|. \end{cases}$$

Für $v \in \mathbb{V}$ sei $v\mathbb{V}$ der in v verwurzelte Teilbaum von \mathbb{V} , d.h. $v\mathbb{V} = \{w \in \mathbb{V} : w|_{|v|} = v\}$.

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir noch eine Ordnung auf \mathbb{V} einführen. Seien $v = v_1 \dots v_n$ und $w = w_1 \dots w_m$ Elemente in \mathbb{V} und

$$\phi(v, w) = \inf\{k \geq 1 : v_k \neq w_k\}.$$

Für $v \neq w$ definieren wir

$$v \prec w :\Leftrightarrow \begin{cases} |v| < |w| & \text{für } |v| \neq |w|, \\ v_{\phi(v,w)} < w_{\phi(v,w)} & \text{für } |v| = |w| \end{cases}$$

und allgemein

$$v \preceq w :\Leftrightarrow v = w \text{ oder } v \prec w.$$

Offenbar gilt $\emptyset \preceq v$ für alle $v \in \mathbb{V}$.

Eingeschränkt auf $\mathbb{N} \subset \mathbb{V}$ stimmt die Relation " \preceq " mit der gewöhnlichen Ordnung " \leq " auf \mathbb{N} überein.

Sämtliche Definitionen aus diesem Abschnitt lassen sich auch auf Bäume mit endliche vielen Nachkommen pro Knoten, d.h. $\mathbb{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{1, 2, \dots, m\}^n$ für $m \in \mathbb{N}$, übertragen.

Beispiel. Zur Veranschaulichung betrachten wir den in Abbildung 1.1 dargestellten Baum $\mathbb{V}_{\leq 3}$ mit $\mathbb{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{1, 2, 3\}^n$:

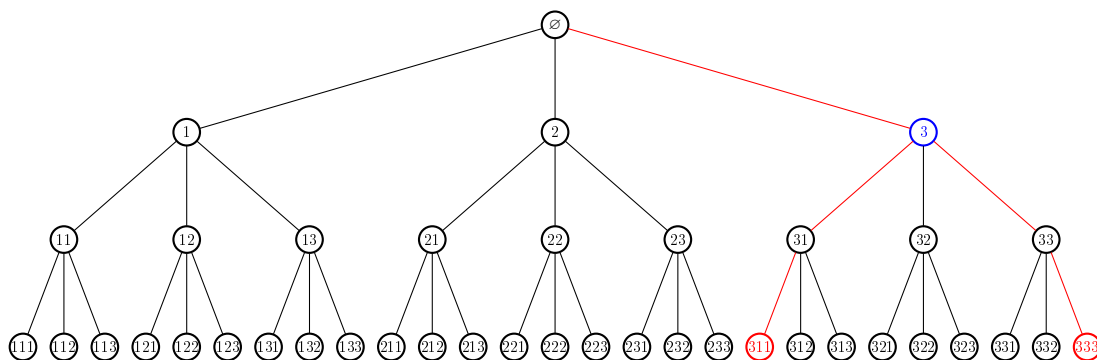


Abbildung 1.1: $\mathbb{V}_{\leq 3}$ für $\mathbb{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{1, 2, 3\}^n$

Wir nutzen die Gelegenheit und diskutieren kurz die Ordnung " \preceq ": In Abbildung 1.1 sind die Knoten $v = 311$ und $w = 333$ samt ihrer Pfade rot hervorgehoben. Wir wollen nun $v \prec w$ einsehen. Es gilt $|v| = 3 = |w|$. Die Pfade von v und w stimmen bis zum Knoten $x = 3$ (blau) überein, entsprechend ist

$$\phi(v, w) = \phi(311, 333) = 2$$

und weiter gilt

$$v_{\phi(v,w)} = v_2 = 1 < 3 = w_2 = w_{\phi(v,w)}.$$

Anschaulich durchlaufen wir mit “ \preceq ” den Baum von oben nach unten, also Generation für Generation und innerhalb der Generationen von links nach rechts.

1.4.2 Gewichtete Verzweigung

In diesem Abschnitt führen wir den allgemeinen *gewichteten Verzweigungsprozess* ein. Dieser ähnelt einem stochastischen Prozess mit einem Baum als Indexmenge, dabei tragen die Kanten des Baumes Gewichte, die in Form einer Vorwärts- bzw. Rückwärtstransformation weitergegeben werden, wenn man die Kante passiert.

Sei $(G, *)$ eine messbare Halbgruppe mit neutralem Element e und einem Grab Δ , für alle $g \in G$ gilt dann $g * e = g = e * g$ sowie $g * \Delta = \Delta = \Delta * g$. Die Halbgruppe $(G, *)$ operiere auf einem messbaren Raum H via $\circ : G \times H \rightarrow H$.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf dem die Familie $(T(v), C(v))_{v \in \mathbb{V}}$ von unabhängig identisch verteilten Zufallsgrößen

$$(T(v), C(v)) = ((T_i^v)_{i \in \mathbb{N}}, C^v) : \Omega \rightarrow G^{\mathbb{N}} \times H$$

definiert ist. Dabei lassen wir beliebige Abhängigkeiten innerhalb der Familien (für festes $v \in \mathbb{V}$) zu. Wir nutzen die Kurzschreibweise $(T, C) = ((T_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$ für $(T(\emptyset), C(\emptyset))$. Weiter sei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{A}_n := \sigma((T(v), C(v)) : |v| < n)$$

die von allen $(T(v), C(v))$ mit $|v| < n$ erzeugte σ -Algebra und

$$\mathcal{A}_\infty := \sigma(\mathcal{A}_n : n \geq 0) = \sigma((T(v), C(v)) : v \in \mathbb{V})$$

die von den $\mathcal{A}_n, n \geq 0$ erzeugte σ -Algebra.

Bemerkung. Wie schon im Abschnitt 1.4.1 zum Ulam-Harris-Baum, lassen sich die Definitionen auf Bäume mit endlich vielen Nachkommen pro Generation übertragen.

Jeder Kante $(v, vi), v \in \mathbb{V}, i \in \mathbb{N}$ wird ein **Gewicht** $L_{v,vi} = T_i^v$ zugeordnet, weiter sei $L_{v,v} := e$ für alle $v \in \mathbb{V}$ und wir definieren rekursiv **Pfadgewichte**:

$$L_{v,vwx} = L_{v,vw} * L_{vw,vwx}$$

für $v, w, x \in \mathbb{V}$. Dabei ist $L_{v,vw}$ das Gewicht auf dem Pfad von v nach vw und wir schreiben $L_v = L_{\emptyset,v}$ für das Pfadgewicht von der Wurzel \emptyset bis zum Knoten $v \in \mathbb{V}$.

Beispiel. Zur Veranschaulichung betrachten wir den in Abbildung 1.2 dargestellten Baum $\mathbb{V}_{\leq 3}$ mit $\mathbb{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{1, 2\}^n$, also die ersten drei Generationen des binären Baumes. An den Kanten sind die jeweiligen Kantengewichte notiert. Der Knoten $v = 212$ samt Pfad ist rot hervorgehoben.

Wir bestimmen das Pfadgewicht $L_v = L_{212}$ indem wir dem Pfad

$$\emptyset \rightarrow 2 \rightarrow 21 \rightarrow 212$$

folgen und die Kantengewichte entlang des Pfades verknüpfen, d.h in diesem Beispiel

$$L_v = L_{212} = T_2^\emptyset * T_1^2 * T_2^{21}.$$

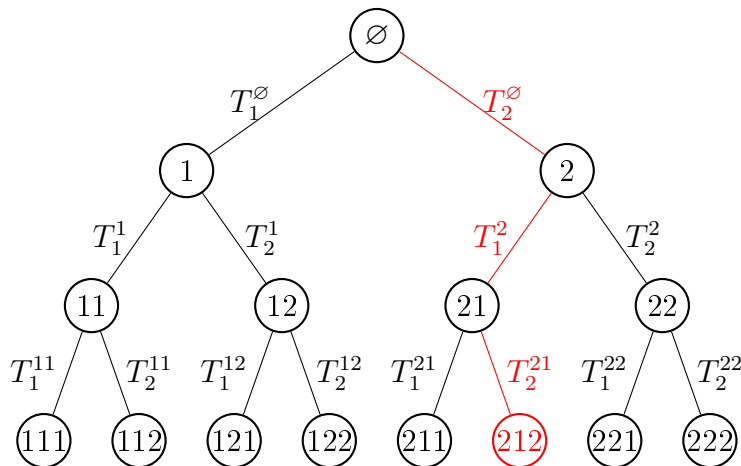


Abbildung 1.2: Die ersten drei Generationen des binären Baums mit Kantengewichten

Ein Tupel $(\mathbb{V}, (L_{v,vw})_{v,w \in \mathbb{V}}, (G, *))$ nennen wir **gewichteter Verzweigungsprozess**.

Wir schließen diesen Abschnitt mit der Definition des **Shiftoperators** $[\cdot]_v$. Sei $v \in \mathbb{V}$ fest, ψ eine Funktion von $(G^{\mathbb{N}} \times H)^{\mathbb{V}}$ in einen beliebigen messbaren Raum und

$$\varsigma := \psi((T(v), C(v))_{v \in \mathbb{V}}).$$

Dann bezeichne $[\varsigma]_v$ die Funktion

$$[\varsigma]_v = \psi((T(w), C(w))_{w \in v\mathbb{V}}) = \psi((T(vw), C(vw))_{w \in \mathbb{V}}).$$

Insbesondere gilt dann (mit $\psi = \text{id}$)

$$[(T(w), C(w))_{w \in \mathbb{V}}]_v = (T(vw), C(vw))_{w \in \mathbb{V}}.$$

1.4.3 Beispiel: Intervalle

Dieser Abschnitt dient sowohl als Beispiel eines gewichteten Verzweigungsprozesses, als auch als Vorbereitung für spätere Kapitel.

Motivation: Wenn wir stochastische Fixpunktgleichungen über D_- studieren, befinden wir uns in der Situation, dass wir eine zufällige Partition des halboffenen Einheitsintervalls $(0, 1]$ in ebenfalls halboffene Teilintervalle vorliegen haben.

Sei $(T_j)_{j \geq 1}$ eine Folge reell-wertiger Zufallsgrößen mit $T_j \geq 0, j \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{P}(N < \infty) = 1$ für $N = \sup\{j \geq 1 : T_j > 0\}$.

Wir bezeichnen mit J die zufällige Menge der Indizes $j \in \mathbb{N}$, sodass $T_j > 0$ für $j \in J$:

$$J := \{j \in \mathbb{N} : T_j > 0\}.$$

Weiter seien $c_j, d_j, j \in \mathbb{N}$ Zufallsgrößen mit Werten in $[0, 1]$ derart, dass

- (i) $I_j := (c_j, d_j] \neq \emptyset \Leftrightarrow j \in J$,
- (ii) $I_j \cap I_k = \emptyset$ für alle $j \neq k \in \mathbb{N}$,
- (iii) $\bigcup_{j \in J} I_j = (0, 1]$.

Die c_j, d_j induzieren also eine Partition von $(0, 1]$ in N nicht-leere Intervalle $I_j, j \in J$.

Bemerkung. Die Intervalle sind an dieser Stelle noch ungeordnet, d.h. aus $j < k$ folgt im Allgemeinen nicht $I_j < I_k$.

Wir nutzen die Ulam-Harris Notation aus Abschnitt 1.4.1:

Für alle $v \in \mathbb{V}$ seien $T(v) = (T_j^v)_{j \geq 1}$ unabhängige Kopien von $(T_j)_{j \geq 1}$ und J^v, c_j^v, d_j^v wie oben definiert.

Betrachte

$$H = \{(c, d] \subseteq (0, 1] : 0 \leq c < d \leq 1\} \cup \{\Delta_H\}$$

die Menge der halboffenen Intervalle in $(0, 1]$ mit dem Grab $\Delta_H := \emptyset$.

Sei $G \subset H^H$ erzeugt durch $g_{x,y} : H \rightarrow H, 0 \leq x < y \leq 1$

$$g_{x,y}((c, d]) := (c + (d - c)x, c + (d - c)y]$$

die Identität $\text{id}_G : H \rightarrow H, h \mapsto h$ und das Grab $\Delta_G : H \rightarrow H, h \mapsto \Delta_H$.

Dann bildet $(G, *)$ mit $g * h := h \circ g$ Hintereinanderausführung eine Halbgruppe.

Wir definieren die Pfadgewichte $\tilde{L}_{v,vw}$ durch

$$\tilde{L}_{v,v} := \text{id}_G \quad \text{sowie} \quad \tilde{L}_{v,vj} := \begin{cases} g_{c_j^v, d_j^v}, & T_j^v > 0, \\ \Delta_G & \text{sonst} \end{cases}$$

und rekursiv

$$\tilde{L}_{v,vwx} = \tilde{L}_{v,vw} * \tilde{L}_{vw,vwx}.$$

Das Pfadgewicht bis zum Knoten $v \in \mathbb{V}$, wenn wir mit dem halboffenen Einheitsintervall $(0, 1]$ starten, nennen wir I_v :

$$\tilde{L}_v((0, 1]) =: I_v = \begin{cases} (c_v, d_v], & \text{falls } I_v \neq \emptyset, \\ \Delta_H & \text{sonst .} \end{cases} \quad (1.12)$$

Insbesondere entsprechen die Intervalle $I_v \neq \emptyset, |v| = 1$ den $I_j, j \in J$ von oben. Für alle $m \in \mathbb{N}$ bilden die Intervalle $I_v, |v| = m$ wieder eine Partition von $(0, 1]$.

Bemerkung. Wie oben bereits angemerkt, sind die Intervalle innerhalb einer Generation $|v| = n$ an dieser Stelle noch nicht aufsteigend sortiert.

Wir können die Intervalle aufsteigend anordnen, indem wir eine neue Ordnung \preceq_I auf $\mathbb{V}^{\neq \emptyset} = \{v \in \mathbb{V} : I_v \neq \emptyset\}$ einführen:

Für $v \neq w$ definieren wir

$$v \prec_I w := \Leftrightarrow \begin{cases} |v| < |w| & \text{für } |v| \neq |w|, \\ I_v < I_w & \text{für } |v| = |w| \end{cases}$$

und allgemein

$$v \preceq_I w := \Leftrightarrow v = w \text{ oder } v \prec_I w.$$

Offenbar gilt $\emptyset \preceq_I v$ für alle $v \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset}$.

Anschaulich durchlaufen wir mit “ \preceq_I ” den Baum $\mathbb{V}^{\neq \emptyset}$ von oben nach unten, also Generation für Generation und ordnen innerhalb der Generationen die Knoten so um, dass die zugehörigen Intervalle aufsteigend geordnet sind.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit gehen wir in Kapitel 2 dazu über, die $T(v)$ so umzuordnen, dass stets $T_j^v > 0$ für $j \leq N^v$ und $T_j^v = 0$ für $j > N^v$. Die Ordnungen “ \preceq_I ” und “ \preceq ” stimmen dann auf $\mathbb{V}^{\neq \emptyset}$ überein.

1.4.4 Beispiel: Der endogene Fixpunkt W

In Abschnitt 1.2.1 haben wir die Gleichung (1.7)

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{j \geq 1} T_j^\alpha X_j$$

zu $(T_j)_{j \geq 1}$ mit charakteristischem Exponenten α betrachtet und gesagt, dass wir eine spezielle Lösung W von (1.7) wählen.

Mit den Voraussetzungen aus Abschnitt 1.2 betrachten wir $(G, *) = (R_{\geq 0}, \cdot)$ die multiplikative Halbgruppe mit $\Delta = 0$. Die Pfadgewichte $L_v, v \in \mathbb{V}$ sind entsprechend das Produkt der Gewichte aller Kanten, die auf dem Weg von der Wurzel \emptyset bis zum Knoten $v = v_1 \dots v_n \in \mathbb{V}$ passiert werden:

$$L_v = T_{v_1}^\emptyset * T_{v_2}^{v_1} * \dots * T_{v_n}^{v_{n-1}}$$

Um die Lösungen von (1.7) charakterisieren zu können, führen wir den Begriff der endogenen Fixpunkte ein (siehe auch [2, Def. 4.6]):

Bezeichne mit $\mathbf{L} := (L_v)_{v \in \mathbb{V}}$. Sei $\beta > 0$ und definiere $T^\beta := (T_j^\beta)_{j \geq 1}$. Eine Zufallsgröße W_β nennen wir **endogenen Fixpunkt** (der glättenden Gleichung bezüglich T^β), falls eine Borel-messbare Funktion $g : [0, \infty)^\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodass $W_\beta = g(\mathbf{L})$ und

$$W_\beta = \sum_{|v|=n} L_v^\alpha [W_\beta]_v \quad \text{f.s.} \quad (1.13)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter nennen wir W_β **nicht-trivial**, falls $\mathbb{P}(W_\beta \neq 0) > 0$.

Endogene Fixpunkte sind also spezielle Lösungen von (1.7) mit der Eigenschaft, dass ihr Zufall in Termen der Pfadgewichte ausgedrückt werden kann. Nach obiger Definition ist 0 stets ein (trivialer) endogener Fixpunkt.

Unter den Bedingungen (A1)-(A4) existiert ein (bis auf Skalierung mit einer Konstanten) eindeutiger nicht-trivialer, nicht-negativer endogener Fixpunkt bezüglich T^α :

Nach Proposition 2.1 in [3] existiert eine nicht-triviale, nicht-negative Lösung zu (1.7) und wir bezeichnen diese mit W .

Proposition 1.11 (Proposition 4.7 in [2]). *Es gelten (A1) - (A4). Sei W_α ein nicht-negativer endogener Fixpunkt bezüglich T^α . Dann gilt $W_\alpha = cW$ fast sicher für ein $c \geq 0$.*

W ist also ein endogener Fixpunkt bezüglich T^α und die Menge der Lösungen von (1.7) ist von der Form $\{\mathcal{L}(cW) : c \geq 0\}$.

Bezeichne mit φ die Laplace-Transformierte von W , i.e.

$$\varphi(t) := \mathbb{E}(\exp(-tW)), \quad t \geq 0.$$

W kann mittels φ explizit konstruiert werden (siehe (4.22) in [2]):

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|v|=n} (1 - \varphi(L_v^\alpha)) \quad \text{f.s.} \quad (1.14)$$

W als Grenzwert des Biggins' Martingals

Unter den Bedingungen (A1) - (A4a) kann W als Grenzwert des sogenannten **Biggins' Martingals** gewählt werden:

Die Bedingungen (A1) - (A3) implizieren, dass

$$W_n^{(\alpha)} := \sum_{|v|=n} L_v^\alpha, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

ein nicht-negatives Martingal definiert. Sei

$$W^{(\alpha)} := \lim_{n \rightarrow \infty} W_n^{(\alpha)} \quad \text{f.s.}$$

Es ist bekannt, dass unter den Bedingungen (A1)-(A4a) gilt $\mathbb{E}W^{(\alpha)} = 1$, siehe [23].

Weiter erfüllt $W^{(\alpha)}$

$$W^{(\alpha)} = \sum_{|v|=n} L_v^\alpha [W^{(\alpha)}]_v \quad \text{f.s.}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (siehe [2]).

In diesem Fall können wir wegen der Eindeutigkeit aus Proposition 1.11 annehmen, dass $W = W^{(\alpha)}$.

Kapitel 2

Die homogene Gleichung auf D_-

In diesem Kapitel untersuchen wir eine größere Klasse homogener Prozessgleichungen auf ihre Lösungen in D_- .

Wir betrachten dabei eine allgemeinere Form der Prozess-Gleichungen (0.13) in D_-

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j \geq 1} T_j X_j(\tau_j(t)) \right)_{t \in [0,1]}, \quad (2.1)$$

hierbei sind die $(X_j)_{j \geq 1}$ und $(T_j, \tau_j)_{j \geq 1}$ unabhängig, die $(X_j)_{j \geq 1}$ sind verteilt wie X mit Werten in D_- , die $(T_j)_{j \geq 1}$ sind nicht-negative reellwertige Zufallsgrößen und die $(\tau_j)_{j \geq 1}$ Zufallsgrößen mit Werten in den stetigen monoton steigenden Funktionen mit Werten in $[0, 1]$.

Wir nehmen an, dass die Anzahl der von Null verschiedenen T_j fast sicher endlich ist, i.e. $N := |\{j \in \mathbb{N} : T_j \neq 0\}| < \infty$ fast sicher.

Weiter nehmen wir an, dass die $(\tau_j)_{j \geq 1}$ eine Partition von $(0, 1]$ in halboffene Intervalle induzieren, wie folgt:

Wir bezeichnen mit J die zufällige Menge der Indizes $j \in \mathbb{N}$, sodass $T_j > 0$ für $j \in J$:

$$J := \{j \in \mathbb{N} : T_j > 0\}.$$

Weiter seien $c_j, d_j, j \in \mathbb{N}$ Zufallsgrößen mit Werten in $[0, 1]$ derart, dass

- (i) $I_j := (c_j, d_j] \neq \emptyset \Leftrightarrow j \in J$,
- (ii) $I_j \cap I_k = \emptyset$ für alle $j \neq k \in \mathbb{N}$,
- (iii) $\bigcup_{j \in J} I_j = (0, 1]$,

und die $\tau_j, j \in J$ seien von der Form

$$\tau_j = \begin{cases} 0 & \text{auf } I_j^- := (0, c_j], \\ \varphi_j & \text{auf } I_j, \\ 1 & \text{auf } I_j^+ := (d_j, 1], \end{cases}$$

mit $\varphi_j : I_j \rightarrow (0, 1]$ stetig und streng monoton wachsend. Insbesondere sind die φ_j bijektiv, dies folgt direkt aus der Stetigkeit der τ_j .

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wollen wir die Terme von (2.1) umordnen, sodass

- (i) $T_1, \dots, T_N > 0$ und $T_j = 0$ für alle $j > N$,
- (ii) $I_1 < \dots < I_N$.

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die abgeschnittene Summe

$$\sum_{j=1}^n T_j X_j \circ \tau_j$$

und ordnen diese um, sodass die ersten $M^{(n)}$ Summanden von Null verschieden sind, und die assoziierten Intervalle aufsteigend geordnet sind.

Dazu betrachten wir

$$J^{(n)} := \{j \leq n : T_j \neq 0\}$$

die Menge der Indizes $j \leq n$, für die die assoziierten Intervalle $I_j \neq \emptyset$ sind, und ordnen diese bezüglich \preceq_I zu

$$j_1^{(n)} \prec_I \dots \prec_I j_{|J^{(n)}|}^{(n)}$$

um. Insbesondere ist $M^{(n)} = |J^{(n)}|$.

Weiter definieren wir für $i \leq M^{(n)}$:

$$\tilde{T}_i^{(n)} := T_{j_i^{(n)}}, \quad \tilde{X}_i^{(n)} := X_{j_i^{(n)}}, \quad \tilde{\tau}_i^{(n)} := \tau_{j_i^{(n)}}.$$

Die assoziierte Abbildung

$$\pi^{(n)} : J^{(n)} \rightarrow J^{(n)}, \quad \pi^{(n)}(i) = j_i^{(n)}$$

ist messbar. Bezeichne die umgeordnete Summe mit

$$\sum_{i=1}^{M^{(n)}} \tilde{T}_i^{(n)} \tilde{X}_i^{(n)} \circ \tilde{\tau}_i^{(n)}.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{M^{(n)}} \tilde{T}_i^{(n)} \tilde{X}_i^{(n)} \circ \tilde{\tau}_i^{(n)} + \sum_{j>n} T_j X_j \circ \tau_j \stackrel{d}{=} \sum_{j \geq 1} T_j X_j \circ \tau_j.$$

Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\sum_{j>n} \mathbb{1}_{T_j>0} \longrightarrow 0, \quad \text{also} \quad M^{(n)} \rightarrow N,$$

und

$$\tilde{T}_i^{(n)} \longrightarrow \tilde{T}_i^{(\infty)}, \quad \tilde{X}_i^{(n)} \longrightarrow \tilde{X}_i^{(\infty)}, \quad \tilde{\tau}_i^{(n)} \longrightarrow \tilde{\tau}_i^{(\infty)}$$

jeweils fast sicher.

Insgesamt also

$$\sum_{i=1}^{M^{(n)}} \tilde{T}_i^{(n)} \tilde{X}_i^{(n)} \circ \tilde{\tau}_i^{(n)} + \sum_{j>n} T_j X_j \circ \tau_j \longrightarrow \sum_{i=1}^N \tilde{T}_i^{(\infty)} \tilde{X}_i^{(\infty)} \circ \tilde{\tau}_i^{(\infty)}$$

fast sicher.

Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass

- (i) $T_1, \dots, T_N > 0$ und $T_j = 0$ für alle $j > N$ und
- (ii) $I_1 < \dots < I_N$.

Die Prozess-Gleichung (2.1) lässt sich dann als

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^N T_j X_j(\tau_j(t)) \right)_{t \in [0,1]} \quad (2.2)$$

schreiben und die $(\tau_j)_{j=1}^N$ sind von der Form

$$\tau_j = \begin{cases} 0 & \text{auf } I_{<j}, \\ \varphi_j & \text{auf } I_j, \\ 1 & \text{auf } I_{>j}. \end{cases} \quad (2.3)$$

mit $I_{<j} := \bigcup_{i<j} I_i$ bzw. $I_{>j} := \bigcup_{i>j} I_i$ und $\varphi_j : I_j \rightarrow (0, 1]$ stetig und streng monoton wachsend, also insbesondere bijektiv.

In Termen von φ können wir (2.2) wie folgt schreiben:

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^N T_j (\mathbb{1}_{\{t \in I_j\}} X_j(\varphi_j(t)) + \mathbb{1}_{\{t \in I_{>j}\}} X_j(1)) \right)_{t \in [0,1]}. \quad (2.4)$$

2.1 Existenz von Lösungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Prozessgleichung (2.2) auf die Existenz von Lösungen in D_- . Wir gehen dabei in zwei Schritten vor. Im ersten Unterabschnitt diskutieren wir zunächst heuristisch, welche Eigenschaften eine potentielle Lösung X von (2.2) haben müsste. Dies liefert uns eine Vorstellung davon, wie ein Kandidat für eine Lösung aussieht. Im zweiten Unterabschnitt formalisieren wir unsere Erkenntnisse und formulieren eine formale Existenzaussage.

2.1.1 Eine heuristische Betrachtung

Wir untersuchen zunächst, welche Eigenschaften eine potentielle Lösung X von (2.2) erfüllen muss. Dazu gehen wir wie folgt vor:

- (1) Wir bestimmen die Verteilung von X an der Stelle $t = 1$.
- (2) Anschließend nutzen wir die rekursive Struktur aus (2.2), um eine Aussage über X an den Stellen $d_k, k = 1, \dots, N$ in Termen von $X(1)$ zu treffen.
- (3) Wir erweitern unseren Ansatz aus (2): Wir nutzen die Ulam-Harris Notation aus Abschnitt 1.4.1 und beschreiben das m -fache Iterieren der Gleichung (2.2).
- (4) Abschließend nutzen wir die Darstellung von X aus (3) um einen Kandidaten für eine Lösung von (2.2) zu definieren.

(1): Sei X eine Lösung von (2.2). Betrachten wir die Prozessgleichung (2.2) an der Stelle $t = 1$ erhalten wir mit $X(1) \stackrel{d}{=} V$ die reell-wertige Gleichung (mit denselben T_j)

$$V \stackrel{d}{=} \sum_{j \geq 1} T_j V_j, \quad (2.5)$$

wobei $(T_j)_{j \geq 1}, (V_j)_{j \geq 1}$ unabhängig und die $(V_j)_{j \geq 1}$ wie V verteilt sind.

Wir nehmen stets an, dass die Bedingungen (A1)-(A4) und im Fall $\alpha = 1$ zusätzlich (A5) erfüllt sind. Damit befinden wir uns in der Situation aus Kapitel 1.2 und die Lösung von (2.5) ist von der Form

$$V \stackrel{d}{=} W^{1/\alpha} Y. \quad (2.6)$$

Dabei ist W der (eindeutige) endogene Fixpunkt (bezüglich T^α) aus Abschnitt 1.4.4 und Y eine strikt α -stabile Zufallsgröße.

Damit kennen wir die Verteilung einer Lösung X an der Stelle $t = 1$.

(2): Seien X_1, \dots, X_N unabhängige Lösungen von (2.2), die auf demselben Raum definiert und unabhängig von $\mathcal{A}_1 = \sigma((T, \tau)(\emptyset))$ sind. Dann erfüllt

$$(X(t))_{t \in [0,1]} := \left(\sum_{j=1}^N T_j X_j(\tau_j(t)) \right)_{t \in [0,1]}$$

die Gleichung (2.2) nicht nur in Verteilung, sondern punktweise fast sicher. Entsprechend kennen wir X an den zufälligen Stellen $d_k, k = 1, \dots, N$.

Es gilt

$$X(d_k) = \sum_{j=1}^k T_j X_j(1), \quad k = 1, \dots, N.$$

(3): Seien $m \in \mathbb{N}$. Mit der Ulam-Harris Notation aus Abschnitt 1.4.1 erweitern wir unser Vorgehen aus (2) und betrachten die m -fache Iteration der Gleichung (2.2).

Hierzu seien $X_v, |v| = m$ unabhängige Lösungen von (2.2), die auf demselben Raum definiert und unabhängig von $\mathcal{A}_m = \sigma((T, \tau)(v) : |v| < m)$ sind.

Setze

$$(X^{(m)}(t))_{t \in [0,1]} := \left(\sum_{|v|=m} L_v X_v(\tau_v(t)) \right)_{t \in [0,1]}. \quad (2.7)$$

(4): Mit den Intervallen $I_v, v \in \mathbb{V}$ aus Abschnitt 1.4.3 sind für $v \in \mathbb{V}$ mit $I_v \neq \emptyset$ durch die $(\tau_v)_{v \in \mathbb{V}}$ dann implizit stetige streng monoton wachsende (bijektive)

$$\varphi_v : I_v \rightarrow (0, 1]$$

gegeben.

Für festes $t \in (0, 1]$ erfüllt $X^{(m)}$ aus (2.7) dann

$$X^{(m)}(t) = \left(\sum_{\substack{|v|=m \\ v \prec w_{m,t}}} L_v X_v(1) \right) + L_{w_{m,t}} X_{w_{m,t}}(\varphi_{w_{m,t}}(t)), \quad (2.8)$$

wobei $w_{m,t}$ das Element $w \in \mathbb{V}_m$ ist, sodass $t \in I_w$ und wir summieren über alle $v \in \mathbb{V}_m$, die bezüglich der Ordnung “ \preceq ” aus Abschnitt 1.4.1 strikt kleiner sind als $w_{m,t}$.

Anschaulich nähern wir uns mit dem ersten Summanden aus (2.8) für größer werdendes m von links an $X^{(m)}(t)$ an, während gleichzeitig der zweite Summand aus (2.8) “klein” wird.

Für den ersten Summanden aus (2.8) nutzen wir, dass wir die Verteilung von $X_v(1)$ kennen.

Sei $(Y(t))_{t \geq 0}$ der zu Y aus (2.6) assoziierte strikt α -stabile Lévy-Prozess, i.e. $Y(1) \stackrel{d}{=} Y$, der auf demselben Raum wie die X_v definiert und unabhängig von \mathcal{A}_m ist. Weiter seien $Y_v, |v| = m$ unabhängige Kopien von $(Y(t))_{t \geq 0}$, die ebenfalls auf demselben Raum wie die X_v definiert und unabhängig von \mathcal{A}_m sind.

Wir ersetzen $X_v(1)$ durch $[W]_v^{1/\alpha} Y_v(1)$ und erhalten

$$\sum_{\substack{|v|=m \\ v \prec w_{m,t}}} L_v X_v(1) \stackrel{d}{=} \sum_{\substack{|v|=m \\ v \prec w_{m,t}}} L_v [W]_v^{1/\alpha} Y_v(1) \stackrel{d}{=} Y \left(\sum_{\substack{|v|=m \\ v \prec w_{m,t}}} L_v^\alpha [W]_v \right).$$

Im nächsten Schritt wollen wir den oben angedeuteten Grenzübergang “ $m \rightarrow \infty$ ” formulieren.

Wir nutzen die spezielle Struktur von W , genauer, dass

$$W = \sum_{|v|=n} L_v^\alpha [W]_v \quad \text{f.s.} \quad (2.9)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, um uns von der m -ten Generation zu lösen:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für festes $t \in (0, 1]$ wählen wir $v_n(t) \in \mathbb{V}$ wie folgt

$$v_1(t) := \inf_{\succeq} \{v : I_v \neq \emptyset, d_v \leq t\}$$

und rekursiv

$$v_{n+1}(t) := \inf_{\succeq} \{v \succ v_n(t) : I_v \neq \emptyset, d_{v_n(t)} < d_v \leq t\}.$$

Wir durchlaufen den Baum Generation für Generation von links nach rechts und suchen das erste Intervall I_w , das vollständig links von t liegt und nennen den assoziierten Knoten $v_1(t)$. Das jeweils nächste Intervall $I_{v_{n+1}(t)}$ wählen wir dann an das vorherige Intervall $I_{v_n(t)}$ angrenzend, d.h. $d_{v_n(t)} = c_{v_{n+1}(t)}$, sodass $I_{v_{n+1}(t)}$ vollständig links von t liegt.

Anschaulich erhalten wir dann den angedeuteten Grenzübergang “ $m \rightarrow \infty$ ”

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\substack{|v|=m \\ v \prec w_{m,t}}} L_v^\alpha[W]_v = \sum_{n \in \mathbb{N}} L_{v_n(t)}^\alpha[W]_{v_n(t)},$$

indem wir die Partitionierung der Intervalle I_v , die in jedem Iterationsschritt entsteht, mittels (2.9) rückgängig machen. Wir setzen also das Intervall $I_{v_n(t)}$ aus den Intervallen $I_{v_n(t)1}, \dots, I_{v_n(t)N^{v_n(t)}}$ wieder zusammen.

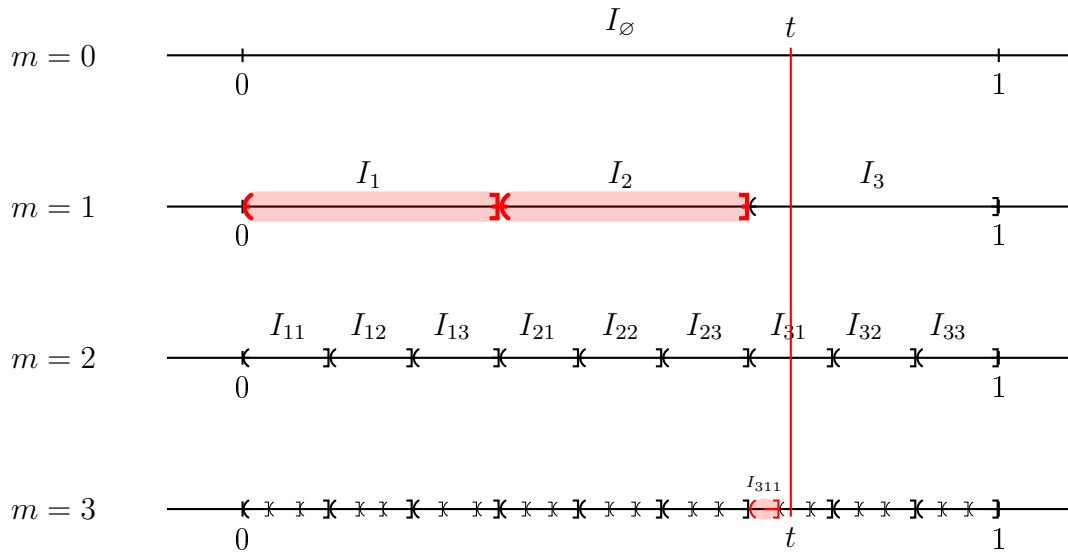


Abbildung 2.1: Auswahl der Knoten $v_i(t)$

Beispiel. *Abbildung 2.1 veranschaulicht die Auswahl der Knoten $v_i(t)$ anhand der deterministischen Teilung in jeweils drei Intervalle. Gemäß der Ordnung “ \preceq ” durchlaufen wir den Baum generationenweise.*

In Generation $m = 1$ liegt t im Intervall I_3 und die Intervalle I_1 und I_2 entsprechend vollständig links von t . Wir wählen $v_1(t) := 1$ und $v_2(t) := 2$.

Für die Wahl von $v_3(t)$ kommen nun lediglich jene Knoten v in Frage, deren zugehörige Intervalle I_v rechts von $I_{v_2(t)}$ liegen. Diese sind $I_3, I_{31}, I_{32}, I_{33}, I_{311}$ usw..

Da t in I_3 liegt gehen wir zur Generation $m = 2$ über. Dort liegen I_{31}, I_{32} und I_{33} rechts von $I_{v_2(t)}$, allerdings liegt t in I_{31} und entsprechend liegt keines der in Frage kommenden Intervalle vollständig links von t .

In Generation $m = 3$ ist also I_{311} das erste Intervall, das sowohl rechts von $I_{v_2(t)}$, als auch vollständig links von t liegt. Wir wählen $v_3(t) := 311$.

Da t in I_{312} liegt, müssen wir für die Wahl von $v_4(t)$ zu einer höheren Generation übergehen.

Bemerkung. Wie in Abbildung 2.1 veranschaulicht, können durchaus mehrere Knoten $v_i(t)$ in einer Generation ausgewählt werden, genauso kann es vorkommen, dass in einer Generation kein Knoten ausgewählt wird.

Beispiel. Die Abbildung 2.2 zeigt den zu Abbildung 2.1 gehörigen Baum. Die ausgewählten Knoten $v_1(t)$, $v_2(t)$ und $v_3(t)$ sind dabei rot hervorgehoben.

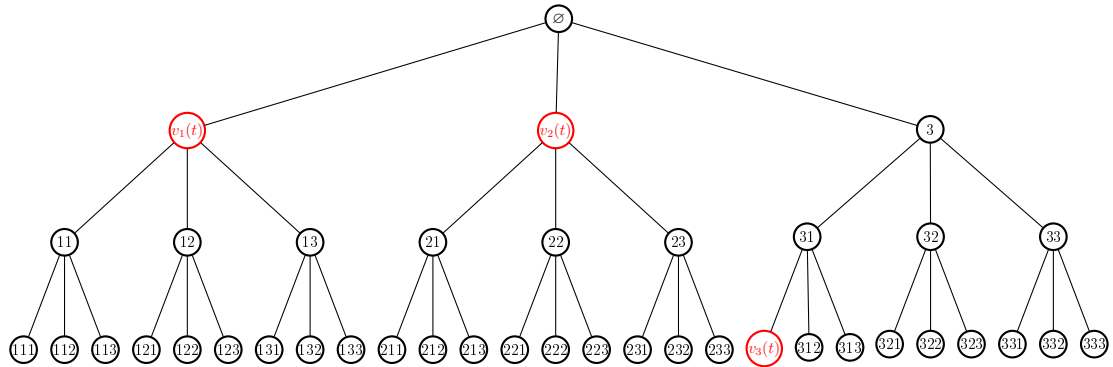


Abbildung 2.2: Der zur Auswahl der $v_i(t)$ gehörige Baum

2.1.2 Formal: Die Existenz einer Lösung

In diesem Abschnitt formalisieren wir die Erkenntnisse des vorangegangenen Abschnitts.

Wir betrachten die Gleichung (2.2)

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^N T_j X_j(\tau_j(t)) \right)_{t \in [0,1]}.$$

Wir nehmen stets an, dass die Bedingungen (A1) - (A4) und für den Fall $\alpha = 1$ zusätzlich (A5) erfüllt sind.

Mit der Ulam-Harris Notation aus Abschnitt 1.4.1 und den Intervallen aus Abschnitt 1.4.3 definieren wir:

$$\mathbb{V}^{\neq \emptyset} := \{v \in \mathbb{V} : I_v \neq \emptyset\}$$

sowie für $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{V}_m^{\neq \emptyset} := \{v \in \mathbb{V}_m : I_v \neq \emptyset\}.$$

Für festes $t \in (0, 1]$ definieren wir $v_n(t) \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset}$, $n \in \mathbb{N}$, wie folgt:

$$v_1(t) := \inf_{\preceq} \{v \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset} : d_v \leq t\} \quad (2.10)$$

und rekursiv

$$v_{n+1}(t) := \inf_{\preceq} \{v \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset} : v \succ v_n(t), d_{v_n(t)} < d_v \leq t\}. \quad (2.11)$$

Abschließend definieren wir $f(0) := 0$ und für $t \in (0, 1]$

$$f(t) := \sum_{n \in \mathbb{N}} L_{v_n(t)}^\alpha [W]_{v_n(t)}, \quad (2.12)$$

wobei α der charakteristische Exponent (von T) ist und W aus (1.14).

Bemerkung. Nach Konstruktion ist f streng monoton wachsend in t . Für $s < t \in (0, 1]$ existieren für hinreichend großes m Knoten $w \prec v \in \mathbb{V}_m^{\neq \emptyset}$ derart, dass $s \in I_w$ und $t \in I_v$. Weiter sind die Pfadgewichte $L_{v_n(t)} > 0$. Nach Konstruktion hat f Pfade in D_- .

Sei α der charakteristische Exponent (von T) und Y ein strikt α -stabiler Lévy-Prozess mit càglàd-Pfaden, der auf dem gleichen Raum wie f definiert und unabhängig von $\mathcal{A}_\infty = \sigma((T, \tau)(v) : v \in \mathbb{V})$ ist.

Unser Kandidat für eine Lösung von (2.2) ist dann

$$(R(t))_{t \in [0,1]} := (Y(f(t)))_{t \in [0,1]}. \quad (2.13)$$

Theorem 2.1. *Seien (A1)-(A4) und für den Fall $\alpha = 1$ zusätzlich (A5) erfüllt. Sei f durch (2.12) gegeben. Dann definiert $(R(t))_{t \in [0,1]}$ aus (2.13) eine Lösung von (2.2) in D_- .*

Den Beweis von Theorem 2.1 unterteilen wir in zwei Schritte.

- (1) Wir bestimmen die endlich-dimensionalen Verteilungen von R aus (2.13).
- (2) Wir bestimmen die endlich-dimensionalen Verteilungen von R eingesetzt in die rechte Seite von (2.2), i.e.

$$\left(\sum_{j=1}^N T_j R_j(\tau_j(t)) \right)_{t \in [0,1]},$$

wobei die R_j unabhängige Kopien von R und unabhängig von $(T, \tau)(\emptyset)$ sind.

Seien $n \in \mathbb{N}$, sowie $t_0 := 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$. Bedingt auf \mathcal{A}_∞ kennen wir die Positionen der Intervalle $I_j, j = 1, \dots, N$ und entsprechend die Positionen der t_k in den jeweiligen Intervallen:

Formal sei S_j für alle $j \in \mathbb{N}$ definiert als $S_j := \{k \leq n : t_k \in I_j\} \subset \{1, \dots, n\}$ und wir setzen $S_{>j} := \bigcup_{i>j} S_i$. Für $S_j \neq \emptyset$ existieren dann weiter $\underline{s}_j \leq \bar{s}_j \in S_j$ derart, dass für alle $k \in S_j$ gilt $\underline{s}_j \leq k \leq \bar{s}_j$.

Beispiel. *Zur Veranschaulichung betrachten wir den in Abbildung 2.3 dargestellten Fall $N = 3, n = 5$.*

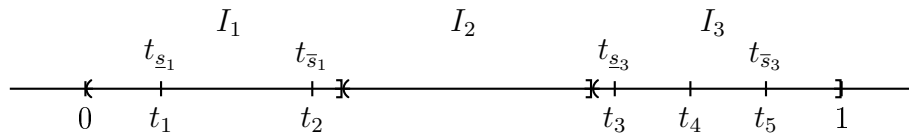


Abbildung 2.3: $S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \emptyset, S_3 = \{3, 4, 5\}$

Nach obiger Definition der S_j ist $S_1 = \{1, 2\}$ und entsprechend $t_1 = t_{\underline{s}_1}$ sowie $t_2 = t_{\bar{s}_1}$. $S_2 = \emptyset$, da kein t_k in I_2 liegt und $S_3 = \{3, 4, 5\}$ mit $t_3 = t_{\underline{s}_3}$ und $t_5 = t_{\bar{s}_3}$.

Notation:

- (1) Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir für Vektoren der Form $(\beta_k, \dots, \beta_l)$ kurz $(\beta_i)_{k:l}$ für $k \leq l$.
- (2) Wir schreiben $\phi_X^{|\mathcal{A}'}$ für die charakteristische Funktion der bedingten Verteilung von X bedingt auf \mathcal{A}' , i.e. $\mathbb{P}(X \in \cdot | \mathcal{A}')$ für eine Unter- σ -Algebra $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ (siehe Anhang A.2).
- (3) Für $n \in \mathbb{N}$ und Vektoren $X = (X_1, \dots, X_n)$ und $\theta \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\phi_X(\theta) = \phi_{(X_i)_{1:n}}((\theta_k)_{1:n}) = \mathbb{E}[\exp(i\langle (X_i)_{1:n}, (\theta_k)_{1:n} \rangle)] = \mathbb{E}[\exp(i \sum_{j=1}^n X_j \theta_j)].$$

Proposition 2.2. *Sei X eine Lösung von (2.2) mit Werten in D_- . Weiter seien X_1, X_2, \dots unabhängige Kopien von X und unabhängig von \mathcal{A}_∞ . Bezeichne*

$$(Z(t))_{t \in [0,1]} := \left(\sum_{j=1}^N T_j X_j(\tau_j(t)) \right)_{t \in [0,1]}$$

mit $(T, \tau)(\emptyset)$ wie oben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi_{(Z(t_i))_{1:n}}(\theta) &= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{S_j \neq \emptyset\}} \phi_{((X_j(\varphi_j(t_k)))_{\underline{s}_j: \bar{s}_j}, X_j(1))}^{|\mathcal{A}_\infty}((\theta_k)_{\underline{s}_j: \bar{s}_j} T_j, \sum_{k \in S_{>j}} \theta_k T_j) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{\{S_j = \emptyset\}} \phi_{X_j(1)}^{|\mathcal{A}_\infty}(\sum_{k \in S_{>j}} \theta_k T_j) \right]. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\theta \in \mathbb{R}^n$. Mit der Darstellung der τ_j als φ_j aus (2.3) gilt

$$\begin{aligned} \phi_{(Z(t_i))_{1:n}}(\theta) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n Z(t_k) \theta_k \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N T_j X_j(\tau_j(t_k)) \right) \theta_k \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^N [\mathbb{1}_{t_k \in I_j} T_j X_j(\varphi_j(t_k)) + \mathbb{1}_{t_k \in I_{>j}} T_j X_j(1)] \right) \theta_k \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^N \exp \left(i \sum_{k=1}^n [\mathbb{1}_{t_k \in I_j} T_j X_j(\varphi_j(t_k)) + \mathbb{1}_{t_k \in I_{>j}} T_j X_j(1)] \theta_k \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \right] \end{aligned}$$

bedingt auf \mathcal{A}_∞ hängen die Faktoren des Produkts jeweils nur von einem der X_j ab und sind entsprechend unabhängig voneinander. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^N \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n [\mathbb{1}_{t_k \in I_j} T_j X_j(\varphi_j(t_k)) + \mathbb{1}_{t_k \in I_{>j}} T_j X_j(1)] \theta_k \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^N \mathbb{E} \left[\exp \left(i \left[\sum_{k \in S_j} T_j X_j(\varphi_j(t_k)) \theta_k + \sum_{k \in S_{>j}} T_j X_j(1) \theta_k \right] \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^N \mathbb{1}_{\{S_j \neq \emptyset\}} \phi_{((X_j(\varphi_j(t_k)))_{\underline{s}_j; \bar{s}_j}, X_j(1))}^{\mathcal{A}_\infty} \left((\theta_k)_{\underline{s}_j; \bar{s}_j} T_j, \sum_{k \in S_{>j}} \theta_k T_j \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathbb{1}_{\{S_j = \emptyset\}} \phi_{X_j(1)}^{\mathcal{A}_\infty} \left(\sum_{k \in S_{>j}} \theta_k T_j \right) \right].
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich aus der Unterscheidung ob $S_j \neq \emptyset$ ist, also die Summe $\sum_{k \in S_j} T_j X_j(\varphi_j(t_k)) \theta_k \neq 0$ und entsprechend X_j auftaucht, oder ob $S_j = \emptyset$ und entsprechend $\sum_{k \in S_j} T_j X_j(\varphi_j(t_k)) \theta_k = 0$ ist. \square

Für die endlich-dimensionalen Verteilungen von $(R(t))_{t \in [0,1]}$ aus (2.13) gehen wir ähnlich vor:

Proposition 2.3. *Sei $(R(t))_{t \in [0,1]} = (Y(f(t)))_{t \in [0,1]}$ wie in (2.13), also Y ein strikt α -stabiler Prozess unabhängig von f und \mathcal{A}_∞ sowie f wie in (2.12), also insbesondere \mathcal{A}_∞ -messbar. Dann gilt*

$$\phi_{(R(t_i))_{1:n}}(\theta) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t_{k-1})) \Psi_Y \left(\sum_{l=k}^n \theta_l \right) \right) \right], \quad (2.15)$$

wobei Ψ_Y der charakteristische Exponent von Y ist.

Beweis. Aus der Definition der charakteristischen Funktion erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi_{(R(t_i))_{1:n}}(\theta) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n R(t_k) \theta_k \right) \right] = \mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n Y(f(t_k)) \theta_k \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n Y(f(t_k)) \theta_k \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\phi_{(Y(f(t_i)))_{1:n}}^{\mathcal{A}_\infty}(\theta) \right].
\end{aligned}$$

Es genügt also die charakteristische Funktion der bedingten Verteilung $\phi_{(Y(f(t_i)))_{1:n}}^{\mathcal{A}_\infty}$ zu kennen. Hier nutzen wir, dass Y ein stabiler Prozess ist und somit unabhängige Zuwächse hat. Da weiter f streng monoton in t ist, bleiben

Zuwächse unter f erhalten, d.h. $f(t) - f(s) > 0$ für $t - s > 0$.

Betrachten wir die charakteristische Funktion der Zuwächse

$$\mathbb{E} \left[\phi_{(Y(f(t_k)) - Y(f(t_{k-1})))_{1:n}}^{\mathcal{A}_\infty}(\theta) \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left(i \sum_{k=1}^n (Y(f(t_k)) - Y(f(t_{k-1}))) \theta_k \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \right]$$

bedingt auf \mathcal{A}_∞ sind die Zuwächse von Y unabhängig und wir erhalten

$$= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\exp \left(i (Y(f(t_k)) - Y(f(t_{k-1}))) \theta_k \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \right]$$

weiter kennen wir die Verteilung der Zuwächse

$$= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n \mathbb{E} \left[\exp \left(i (Y(f(t_k) - f(t_{k-1}))) \theta_k \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \right]$$

$$= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n \phi_{(Y(f(t_k) - f(t_{k-1})))}^{\mathcal{A}_\infty}(\theta_k) \right]$$

in Termen von Ψ_Y erhalten wir

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E} \left[\prod_{k=1}^n \exp \left(- (f(t_k) - f(t_{k-1})) \Psi_Y(\theta_k) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t_{k-1})) \Psi_Y(\theta_k) \right) \right]. \end{aligned}$$

Wir nutzen die Identität

$$\mathbf{A}(Y(f(t_i)) - Y(f(t_{i-1})))_{1:n} = (Y(f(t_i)))_{1:n}$$

mit

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Mit der Eigenschaft charakteristischer Funktionen

$$\phi_{(Y(f(t_i)))_{1:n}}(\theta) = \phi_{\mathbf{A}(Y(f(t_i)) - Y(f(t_{i-1})))_{1:n}}(\theta) = \phi_{(Y(f(t_i)) - Y(f(t_{i-1})))_{1:n}}(\mathbf{A}^T \theta)$$

folgt insgesamt also

$$\begin{aligned} \phi_{(R(t_i))_{1:n}}(\theta) &= \mathbb{E} \left[\phi_{(Y(f(t_i)))_{1:n}}^{\mathcal{A}_\infty}(\theta) \right] = \mathbb{E} \left[\phi_{(Y(f(t_k)) - Y(f(t_{k-1})))_{1:n}}^{\mathcal{A}_\infty}(\mathbf{A}^T \theta) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \sum_{k=1}^n (f(t_k) - f(t_{k-1})) \Psi_Y \left(\sum_{l=k}^n \theta_l \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

□

Beweis (Theorem 2.1). Wir zeigen, dass die charakteristische Funktion aus (2.14), also die Verteilung der rechten Seite von (2.2), und die charakteristische Funktion aus (2.14), wenn wir X_j durch unabhängige Kopien $(Y_j \circ f_j)$ ersetzen, übereinstimmen.

Sei $(Z(t))_{t \in [0,1]} = \left(\sum_{j=1}^N T_j X_j(\tau_j(t)) \right)_{t \in [0,1]}$ wie in Proposition 2.2. Weiter seien Y_1, Y_2, \dots unabhängige Kopien von Y , die unabhängig von \mathcal{A}_∞ sind, sowie f_1, f_2, \dots unabhängige Kopien von f , die auf demselben Raum wie die Y_j definiert, unabhängig von den Y_j und \mathcal{A}_∞ -messbar sind.

Wir betrachten $\phi_{(Z(t_i))_{1:n}}$. Analog zu Beweis von Proposition 2.2 ist

$$\phi_{(Z(t_i))_{1:n}}(\theta) = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^N \mathbb{E} \left[\exp \left(i \left[\sum_{k \in S_j} T_j X_j(\varphi_j(t_k)) \theta_k + \sum_{k \in S_{>j}} T_j X_j(1) \theta_k \right] \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \right].$$

Wir ersetzen X_j durch $Y_j \circ f_j$ und erhalten

$$\phi_{(Z(t_i))_{1:n}}(\theta) = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^N \mathbb{E} \left[\exp \left(i \left[\sum_{k \in S_j} T_j Y_j(f_j(\varphi_j(t_k))) \theta_k + \sum_{k \in S_{>j}} T_j Y_j(f_j(1)) \theta_k \right] \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \right].$$

Für ein festes $j \in \{1, \dots, N\}$ betrachten wir die Faktoren gesondert

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(i \left[\sum_{k \in S_j} T_j Y_j(f_j(\varphi_j(t_k))) \theta_k + \sum_{k \in S_{>j}} T_j Y_j(f_j(1)) \theta_k \right] \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] = (*)$$

Ähnlich zum Beweis von Proposition 2.2 unterscheiden wir die Fälle $S_j = \emptyset$ und $S_j \neq \emptyset$.

Für $S_j = \emptyset$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (*) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i \left[\sum_{k \in S_{>j}} T_j Y_j(f_j(1)) \theta_k \right] \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] = \phi_{Y_j(f_j(1))}^{\mathcal{A}_\infty} \left(\sum_{k \in S_{>j}} \theta_k T_j \right) \\ &= \exp \left(- f_j(1) \Psi_Y \left(\sum_{k \in S_{>j}} \theta_k T_j \right) \right) = \exp \left(- f_j(1) T_j^\alpha \Psi_Y \left(\sum_{k \in S_{>j}} \theta_k \right) \right). \end{aligned}$$

Für $S_j \neq \emptyset$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (*) &= \mathbb{E} \left[\exp \left(i \left[\sum_{k \in \underline{s}_j}^{\bar{s}_j} T_j Y_j(f_j(\varphi_j(t_k))) \theta_k + \sum_{k \in S_{>j}} T_j Y_j(f_j(1)) \theta_k \right] \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right] \\ &= \phi_{((Y_j(f_j(t_l)))_{\underline{s}_j: \bar{s}_j}, Y_j(f_j(1)))}^{\mathcal{A}_\infty} \left((\theta_l)_{\underline{s}_j: \bar{s}_j} T_j, \sum_{k \in S_{>j}} \theta_k T_j \right). \end{aligned}$$

analog zum Beweis von Proposition 2.3 gehen wir zu den Zuwächsen über

$$= \phi_{((Y_j(f_j(\varphi_j(t_l))) - Y_j(f_j(\varphi_j(t_{l-1}))))_{\underline{s}_j: \bar{s}_j}, Y_j(f_j(1)) - Y_j(f_j(\varphi_j(t_{\bar{s}_j}))) \left(\left(\sum_{k=l}^n \theta_k T_j \right)_{\underline{s}_j: \bar{s}_j}, \sum_{k \in S_{>j}} \theta_k T_j \right)$$

und mit der Darstellung aus (2.15) erhalten wir

$$= \exp \left(- \left[f_j(\varphi_j(t_{\underline{s}_j})) T_j^\alpha \Psi_Y \left(\sum_{l=\underline{s}_j}^n \theta_l \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=\underline{s}_j+1}^{\bar{s}_j} (f_j(\varphi_j(t_k)) - f_j(\varphi_j(t_{k-1}))) T_j^\alpha \Psi_Y \left(\sum_{l=k}^n \theta_l \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (f_j(1) - f_j(\varphi_j(t_{\bar{s}_j}))) T_j^\alpha \Psi_Y \left(\sum_{l \in S_{>j}} \theta_l \right) \right] \right).$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\phi_{(Z(t_i))_{1:n}}(\theta) = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^N \exp \left(- \left[\mathbb{1}_{\{S_j \neq \emptyset\}} \left((f_j(\varphi_j(t_{\underline{s}_j})) T_j^\alpha \Psi_Y \left(\sum_{l=\underline{s}_j}^n \theta_l \right) \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{k=\underline{s}_j+1}^{\bar{s}_j} (f_j(\varphi_j(t_k)) - f_j(\varphi_j(t_{k-1}))) T_j^\alpha \Psi_Y \left(\sum_{l=k}^n \theta_l \right) \right) \right. \right. \\ \left. \left. + (f_j(1) - \mathbb{1}_{\{S_j \neq \emptyset\}} f_j(\varphi_j(t_{\bar{s}_j}))) T_j^\alpha \Psi_Y \left(\sum_{l \in S_{>j}} \theta_l \right) \right] \right] \right). \quad (2.16)$$

Wir wählen spezielle Versionen von f_j

$$f_j(t) = (f(\varphi_j^{-1}(t)) - f(c_j)) T_j^{-\alpha}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Diese sind wohldefiniert, da die φ_j nach Konstruktion stetige Bijektionen von $I_j \rightarrow (0, 1]$ sind. φ_j^{-1} bildet $(0, 1]$ auf I_j ab und $f(\varphi_j^{-1}(t)) - f(c_j)$ ist der Zuwachs von f auf I_j . f_j "startet" also in c_j statt in 0. Wir skalieren mit $T_j^{-\alpha}$, dem Inversen des Pfadgewichts zu I_j aus der Definition von f . Die f_j unabhängig und verteilt wie f .

Setzen wir die f_j in die rechte Seite von (2.16) ein, erhalten wir Gleichheit mit der rechten Seite aus (2.15).

Liegen t_k und t_{k-1} in einem Intervall I_j , also $k-1, k \in S_j$ ist offenbar

$$(f_j(\varphi_j(t_k)) - f_j(\varphi_j(t_{k-1}))) T_j^\alpha \Psi_Y \left(\sum_{l=k}^n \theta_l \right) = (f(t_k) - f(t_{k-1})) \Psi_Y \left(\sum_{l=k}^n \theta_l \right).$$

Bleibt also zu klären, was beim Überschreiten der Intervallgrenzen passiert. Am Übergang von I_j zu I_{j+1} für ein $j \in \{1, \dots, N-1\}$ kann jeweils einer der folgenden Fälle eintreten:

- (1) $S_j = \emptyset = S_{j+1}$
- (2) $S_j = \emptyset$ und $S_{j+1} \neq \emptyset$
- (3) $S_j \neq \emptyset$ und $S_{j+1} = \emptyset$
- (4) $S_j \neq \emptyset \neq S_{j+1}$

Wir behandeln zunächst die Fälle (2) und (3) gemeinsam. Dazu betrachten wir für ein festes $j \in \{2, \dots, N-1\}$ die aufeinander folgenden Intervalle I_{j-1}, I_j und I_{j+1} und nehmen an, dass $S_{j-1} \neq \emptyset \neq S_{j+1}$ und $S_j = \emptyset$.

Abbildung 2.4 stellt die oben beschriebene Situation dar:

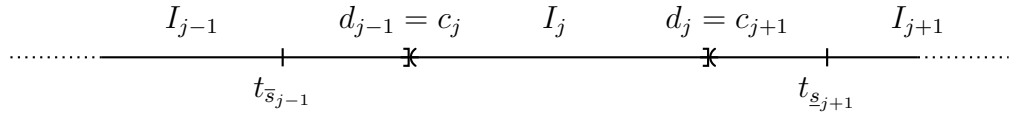


Abbildung 2.4: Ausschnitt der Intervalle I_{j-1}, I_j und I_{j+1}

Dann gilt $S_{>j-1} = S_{>j} = \{\underline{s}_{j+1}, \dots, n\}$, insbesondere ist also

$$\Psi_Y\left(\sum_{l \in S_{>j-1}} \theta_l\right) = \Psi_Y\left(\sum_{l \in S_{>j}} \theta_l\right) = \Psi_Y\left(\sum_{l=\underline{s}_{j+1}}^n \theta_l\right).$$

Der letzte Zuwachs in I_{j-1} ist durch

$$\begin{aligned} (*_{j-1}) &= (f_{j-1}(1) - f_{j-1}(\varphi_{j-1}(t_{\underline{s}_{j-1}})))T_{j-1}^\alpha \Psi_Y\left(\sum_{l \in S_{>j-1}} \theta_l\right) \\ &= (f(d_{j-1}) - f(t_{\underline{s}_{j-1}}))\Psi_Y\left(\sum_{l=\underline{s}_{j+1}}^n \theta_l\right) \end{aligned}$$

gegeben.

Da $S_j = \emptyset$, trägt das Intervall I_j

$$(*_j) = f_j(1)T_j^\alpha \Psi_Y\left(\sum_{k \in S_{>j}} \theta_k\right) = (f(d_j) - f(c_j))\Psi_Y\left(\sum_{l=\underline{s}_{j+1}}^n \theta_l\right)$$

bei. Der erste Zuwachs in I_{j+1} ist durch

$$\begin{aligned} (*_{j+1}) &= (f_{j+1}(\varphi_{j+1}(t_{\underline{s}_{j+1}})))T_{j+1}^\alpha \Psi_Y\left(\sum_{l=\underline{s}_{j+1}}^n \theta_l\right) \\ &= (f(t_{\underline{s}_{j+1}}) - f(c_{j+1}))\Psi_Y\left(\sum_{l=\underline{s}_{j+1}}^n \theta_l\right) \end{aligned}$$

gegeben.

Da $d_{j-1} = c_j$ und $d_j = c_{j+1}$ gilt, bleibt insgesamt der gewünschte Zuwachs

$$(*_{j-1}) + (*_j) + (*_{j+1}) = (f(t_{\underline{s}_{j+1}}) - f(t_{\underline{s}_{j-1}}))\Psi_Y\left(\sum_{l=\underline{s}_{j+1}}^n \theta_l\right).$$

Die nötigen Rechnungen für die Fälle (1) und (4) lassen sich nun leicht aus Obigem ableiten.

□

2.2 Eindeutigkeit der Lösung

Aus dem vorangegangenen Abschnitt 2.1 geht bereits hervor, wie wir eine explizite Lösung der Prozess-Gleichung (2.2) mit Werten in D_- konstruieren können. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass sich alle Lösungen von (2.2) mit Werten in D_- wie in (2.13) beschrieben darstellen lassen. Wie schon in Abschnitt 2.1 vollziehen wir dies in zwei Schritten. Im ersten Unterabschnitt beschreiben wir heuristisch unser Vorgehen und formalisieren unsere Überlegungen im zweiten Unterabschnitt.

2.2.1 Eine heuristische Betrachtung

Wir adaptieren unser Vorgehen aus der heuristischen Vorbetrachtung zur Existenz von Lösungen aus Abschnitt 2.1.1 und greifen auf die dort etablierten Ergebnisse und Notationen zurück:

Sei X eine Lösung von (2.2) mit Werten in D_- .

- (1) Wir bestimmen/kennen die Verteilung von X an der Stelle $t = 1$.
- (2) Anschließend nutzen wir die rekursive Struktur aus (2.2), um eine Aussage über X an den Stellen $d_k, k = 1, \dots, N$ in Termen von $X(1)$ zu treffen.
- (3) Wir erweitern unseren Ansatz aus (2): Wir nutzen die Ulam-Harris Notation aus Abschnitt 1.4.1 und beschreiben das m -fache Iterieren der Gleichung (2.2).
Damit kennen wir X auf der zufälligen Menge $\mathcal{D}_m = \{d_v : v \in \mathbb{V}_m^{\neq \emptyset}\}$.
- (4) Im Grenzwert kennen wir X dann auf einer zufälligen abzählbaren Menge $\mathcal{D} = \{d_v : v \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset}\}$, die in $(0, 1]$ dicht ist. Mit der Forderung, dass X Werte in D_- , also insbesondere links-stetige Pfade hat, sind diese dadurch eindeutig bestimmt.

Die Schritte **(1)**-**(3)** sind hierbei identisch zu denen in Abschnitt 2.1.1.

Eine Ergänzung zu **(3)**: In (2.7) haben wir $X^{(m)}$ geschrieben als

$$(X^{(m)}(t))_{t \in [0,1]} = \left(\sum_{|v|=m} L_v X_v(\tau_v(t)) \right)_{t \in [0,1]}$$

und für festes $t \in (0, 1]$ erfüllte $X^{(m)}$ dann

$$X^{(m)}(t) = \left(\sum_{\substack{|v|=m \\ v \prec w_{m,t}}} L_v X_v(1) \right) + L_{w_{m,t}} X_{w_{m,t}}(\varphi_{w_{m,t}}(t)),$$

wobei $w_{m,t}$ das Element $w \in \mathbb{V}_m$ war, sodass $t \in I_w$ und wir summieren über alle $v \in \mathbb{V}_m$, die bezüglich der Ordnung “ \prec ” aus Abschnitt 1.4.1 strikt kleiner sind als $w_{m,t}$.

Für $v^* \in \mathbb{V}_m^{\neq \emptyset}$ erhalten wir daraus

$$X^{(m)}(d_{v^*}) = \sum_{\substack{|v|=m \\ v \prec v^*}} L_v X_v(1),$$

da d_{v^*} gerade die rechte Intervallgrenze von I_{v^*} ist.

(4): Es ist also zu zeigen, dass eine Version von X_v zu $(T, \tau)(v)$, $v \in \mathbb{V}$ existiert, sodass

$$(X_v(t))_{t \in [0,1]} = \left(\sum_{j \geq 1} T_j^v X_{v_j}(\tau_j^v(t)) \right)_{t \in [0,1]} \quad (2.17)$$

fast sicher für alle $v \in \mathbb{V}$ gleichzeitig erfüllt ist.

2.2.2 Formal: Die Eindeutigkeit der Lösung

Wir beginnen mit der Konstruktion der in (2.17) beschriebenen Version einer Lösung von (2.2). Hierzu nutzen wir den Erweiterungssatz von Kolmogorov:

Sei (D_-, \mathcal{D}, ρ) der Raum der càglàd-Funktionen mit Wert 0 an der Stelle $t = 0$ versehen mit der Borel- σ -Algebra \mathcal{D} und einem Wahrscheinlichkeitsmaß ρ , das eine Lösung von (2.2) ist. Bezeichne mit $D_{-\nearrow} \subset D_-$ die Teilmenge der monoton wachsenden Funktionen.

Weiter sei auf $((\mathbb{R}_{\geq 0} \times D_{-\nearrow})^{\mathbb{N}}, (\mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathcal{D})^{\mathbb{N}})$ das Wahrscheinlichkeitsmaß ν durch die gemeinsame Verteilung von $(T, \tau)(\emptyset)$ gegeben.

Wir definieren

$$(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) := \begin{cases} (D_-, \mathcal{D}, \rho) & \text{für } i \in \mathbb{V}, \\ ((\mathbb{R}_{\geq 0} \times D_{-\nearrow})^{\mathbb{N}}, (\mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}) \otimes \mathcal{D})^{\mathbb{N}}, \nu) & \text{für } i \in E. \end{cases}$$

Für eine Menge $J \subset \mathbb{V} \cup E$ definieren wir weiter den Produktraum

$$(\Omega_J, \mathcal{A}_J, \mu_J) := \left(\prod_{j \in J} \Omega_j, \bigotimes_{j \in J} \mathcal{A}_j, \bigotimes_{j \in J} \mu_j \right)$$

mit der Produkt- σ -Algebra und dem Produktmaß. Die Projektionen bezeichnen wir mit $\Phi_{J,K} : \Omega_J \rightarrow \Omega_K$ für $K \subset J \subset \mathbb{V} \cup E$.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und setze $I_m := \mathbb{V}_m \cup E_{<m}$ sowie $\bar{I}_m := \mathbb{V}_{\leq m} \cup E_{<m}$.

Wir schreiben für den zu I_m gehörigen Produktraum kurz

$(\Omega_m, \mathcal{A}_m, \mu_m) := (\Omega_{I_m}, \mathcal{A}_{I_m}, \mu_{I_m})$ und analog für den zu \bar{I}_m gehörigen Produktmessraum $(\bar{\Omega}_m, \bar{\mathcal{A}}_m) := (\Omega_{\bar{I}_m}, \mathcal{A}_{\bar{I}_m})$.

Die Abbildung $h : D_-^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{R}_{\geq 0} \times D_{-\nearrow})^{\mathbb{N}} \rightarrow D_-$

$$h((x_j)_{j \geq 1}, (a_j, b_j)_{j \geq 1})(t) := \sum_{j \geq 1} a_j x_j(b_j(t))$$

sei wohldefiniert. Für $w \in \mathbb{V}_m$ sei

$$X_w^{(m)} := \Phi_{\bar{I}_m, \{w\}} \in (D_-)^{\bar{I}_m}$$

sowie für $e_w \in E_{<m}$

$$(T, \tau)(w) = ((T_j^w, \tau_j^w))_{j \geq 1} := (\Phi_{\bar{I}_m, \{(w, w_j)\}})_{j \geq 1} \in ((\mathbb{R}_{\geq 0} \times D_{-\nearrow})^{\mathbb{N}})^{\bar{I}_m}$$

und wir definieren rekursiv für alle $v \in \mathbb{V}_{<m}$

$$X_v^{(m)} := h((X_{v_j}^{(m)})_{j \geq 1}, ((T_j^v, \tau_j^v))_{j \geq 1}).$$

Auf $(\bar{\Omega}_m, \bar{\mathcal{A}}_m)$ definieren wir ein Maß $\bar{\mu}_m$, indem wir die Werte von $\bar{\mu}_m$ auf den Zylindermengen

$$\prod_{j \in J} \Phi_{\bar{I}_m, \{j\}}^{-1}(A_j), \quad A_j \in \mathcal{A}_j, J \subset \bar{I}_m \text{ endlich,}$$

angeben.

Für $J \subset \bar{I}_m$ endlich und $A_j \in \mathcal{A}_j, j \in J$ sei

$$\bar{\mu}_m \left(\prod_{j \in J} \Phi_{\bar{I}_m, \{j\}}^{-1}(A_j) \right) := \mu_m \left(\bigcap_{j \in J \cap \mathbb{V}_{\leq m}} \{X_j^{(m)} \in A_j\} \cap \bigcap_{j \in J \cap E_{<m}} \{(T, \tau)(j) \in A_j\} \right).$$

Lemma 2.4. *Die Wahrscheinlichkeitsräume $(\bar{\Omega}_m, \bar{\mathcal{A}}_m, \bar{\mu}_m), m \in \mathbb{N}$ bilden eine projektive Familie.*

Der projektive Grenzwert existiert und kann als $(\Omega_{\mathbb{V} \cup E}, \mathcal{A}_{\mathbb{V} \cup E}, \mu_{\mathbb{V} \cup E})$ gewählt werden.

Beweis. Für den Nachweis einer projektiven Familie müssen wir zeigen, dass die $(\bar{\mu}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaft (A.1) erfüllen. Es reicht also zu zeigen, dass

$$\bar{\mu}_{m+1}(\Phi_{\bar{I}_{m+1}, \bar{I}_m}^{-1}(A)) = \bar{\mu}_m(A)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle Zylindermengen $A \in \bar{\mathcal{A}}_m$ gilt.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Nach Konstruktion reicht es zu zeigen, dass die $X_v^{(m+1)}, v \in \mathbb{V}_m$ unter $\bar{\mu}_{m+1}$ unabhängig und wie ρ verteilt sind.

Wir betrachten also für $J \subset \mathbb{V}_m$

$$A = \prod_{v \in J} \Phi_{\bar{I}_m, \{v\}}^{-1}(A_v), \quad A_v \in \mathcal{A}_v.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{m+1}(\Phi_{\bar{I}_{m+1}, \bar{I}_m}^{-1}(A)) &= \bar{\mu}_{m+1}(\Phi_{\bar{I}_{m+1}, \bar{I}_m}^{-1}(\prod_{v \in J} \Phi_{\bar{I}_m, \{v\}}^{-1}(A_v))) \\ &= \bar{\mu}_{m+1}(\prod_{v \in J} \Phi_{\bar{I}_{m+1}, \bar{I}_m}^{-1}(\Phi_{\bar{I}_m, \{v\}}^{-1}(A_v))) \\ &= \bar{\mu}_{m+1}(\prod_{v \in J} \Phi_{\bar{I}_{m+1}, \{v\}}^{-1}(A_v)) \\ &= \mu_{m+1}(\bigcap_{v \in J} \{X_v^{(m+1)} \in A_v\}) \\ &= \mu_{m+1}(\bigcap_{v \in J} \{h((X_{vj}^{(m+1)})_{j \geq 1}, (T_j^v, \tau_j^v)_{j \geq 1}) \in A_v\}) \\ &= \prod_{v \in J} \mu_{m+1}(\{h((X_{vj}^{(m+1)})_{j \geq 1}, (T_j^v, \tau_j^v)_{j \geq 1}) \in A_v\}). \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit folgt dabei direkt aus der Konstruktion über das Produktmaß μ_{m+1} , also der Unabhängigkeit der $X_{vj}^{(m+1)}, j \in \mathbb{N}$ und $(T_j^v, \tau_j^v)_{j \geq 1}$. Da ρ als Lösung von (2.2) gewählt war, sind die $X_v^{(m+1)}, v \in \mathbb{V}_m$ ebenfalls nach ρ verteilt.

Die Räume $(\bar{\Omega}_m, \bar{\mathcal{A}}_m), m \in \mathbb{N}$ sind als abzählbare Produkträume polnischer Räume wiederum polnische Räume. Mit dem Kolmogorov'schen Erweiterungssatz (Theorem A.1) folgt die Behauptung. \square

Theorem 2.5. *Es seien (A1) - (A4) erfüllt und weiter sei (A5) erfüllt, falls $\alpha = 1$.*

Die stochastische Fixpunktgleichung (2.2)

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^N T_j X_j(\tau_j(t)) \right)_{t \in [0,1]}$$

hat dann genau eine Lösung in D_- , sodass die Verteilung von $X(1)$ gegeben ist durch

$$\phi_{X(1)}(\theta) = \begin{cases} \mathbb{E} \exp \left(-\sigma^\alpha W |\theta|^\alpha \left[1 - i\beta \frac{\theta}{|\theta|} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right] \right) & \text{für } \alpha \notin \{1, 2\}, \\ \mathbb{E} \exp(i\mu W \theta - \sigma W |\theta|) & \text{für } \alpha = 1, \\ \mathbb{E} \exp(-\sigma^2 W \theta^2) & \text{für } \alpha = 2, \end{cases} \quad (2.18)$$

wobei $\sigma \geq 0, \beta \in [-1, 1]$ für $\alpha \notin \{1, 2\}$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \geq 0$ für $\alpha = 1$ und $\sigma \geq 0$ für $\alpha = 2$ und W eine nicht-triviale, nicht-negative Lösung von (1.7).

Beweis. Sei $(X(t))_{t \in [0,1]}$ eine Lösung von (2.2) in D_- mit $\mathcal{L}(X(1))$ wie in (2.18) mit α dem charakteristischen Exponenten (von T).

Wir nutzen die Konstruktion aus Lemma 2.4:

Sei $X_v = \Phi_{\mathbb{V} \cup E, \{v\}}$ für $v \in \mathbb{V}$ und $((T_j^v, \tau_j^v)_{j \geq 1}) = \Phi_{\mathbb{V} \cup E, \{e_v\}}$ für $e_v \in E$.

Diese erfüllen dann

$$(X_v(t))_{t \in [0,1]} = \left(\sum_{j \geq 1} T_j^v X_{vj}(\tau_j^v(t)) \right)_{t \in [0,1]}$$

fast sicher für alle $v \in \mathbb{V}$ gleichzeitig (unter $\mu_{\mathbb{V} \cup E}$).

Weiter sei Y ein zur rechten Seite in (2.18) assoziierter strikt α -stabiler Lévy-Prozess, der auf demselben Raum definiert und unabhängig von \mathcal{A}_∞ ist, sowie $(Y_v)_{v \in \mathbb{V}}$ unabhängige Kopien von Y , die ebenfalls auf demselben Raum definiert und unabhängig von \mathcal{A}_∞ sind.

Notation: Wir schreiben $\stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=}$ für $\stackrel{d}{=}$ bezüglich $\mathbb{P}^{|\mathcal{A}_\infty}$ (siehe Anhang A.2).

Dann gilt

$$X(1) \stackrel{d}{=} Y(W) \quad \text{sowie} \quad X_v(1) \stackrel{d}{=} Y_v([W]_v)$$

und

$$X(1) \stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=} Y(W) \quad \text{sowie} \quad X_v(1) \stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=} Y_v([W]_v)$$

für alle $v \in \mathbb{V}$, da W und $[W]_v$ messbar sind bezüglich \mathcal{A}_∞ .

Seien $I_v = (c_v, d_v]$, $v \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset}$ die Intervalle aus Abschnitt 1.4.3. Wir bezeichnen die (zufällige) Menge der Intervallgrenzen mit

$$\mathcal{D} := \{d_v : v \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset}\} \quad (2.19)$$

und für $m \in \mathbb{N}$ bezeichnet

$$\mathcal{D}_m := \{d_v : v \in \mathbb{V}_m^{\neq \emptyset}\} \quad (2.20)$$

die (zufällige) Menge der Intervallgrenzen in der m -ten Generation. Offenbar gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}_m \subset \mathcal{D}_{m+1}.$$

(i): Wir zeigen zunächst, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und $v^m, w^m \in \mathbb{V}_m^{\neq \emptyset}$ mit $d_{w^m} < d_{v^m}$ gilt

$$X(d_v) - X(d_w) \stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=} Y(f(d_v) - f(d_w)).$$

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $w^m \prec v^m \in \mathbb{V}_m^{\neq \emptyset}$. Dann gilt

$$X(d_{v^m}) - X(d_{w^m}) = \sum_{\substack{|v|=m \\ w^m \prec v \preceq v^m}} L_v X_v(1)$$

sowie für alle $\theta \in \mathbb{R}$

$$\phi_{X(d_{v^m}) - X(d_{w^m})}^{|\mathcal{A}_\infty}(\theta) = \mathbb{E} \left(\exp \left(i\theta \sum_{\substack{|v|=m \\ w^m \prec v \preceq v^m}} L_v X_v(1) \right) \middle| \mathcal{A}_\infty \right)$$

die L_v sind messbar bezüglich \mathcal{A}_∞ und bedingt auf \mathcal{A}_∞ sind die $X_v(1)$ -Terme unabhängig voneinander

$$= \prod_{\substack{|v|=m \\ w^m \prec v \preceq v^m}} \mathbb{E}(\exp(i\theta L_v X_v(1)) | \mathcal{A}_\infty)$$

wir nutzen $X_v(1) \stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=} [W]_v^{1/\alpha} Y_v(1)$

$$\begin{aligned} &= \prod_{\substack{|v|=m \\ w^m \prec v \preceq v^m}} \mathbb{E}(\exp(i\theta L_v [W]_v^{1/\alpha} Y_v(1)) | \mathcal{A}_\infty) \\ &= \prod_{\substack{|v|=m \\ w^m \prec v \preceq v^m}} \phi_{Y_v(1)}^{|\mathcal{A}_\infty}(\theta L_v [W]_v^{1/\alpha}) \end{aligned}$$

die Y_v sind unabhängig von \mathcal{A}_∞

$$= \prod_{\substack{|v|=m \\ w^m \prec v \preceq v^m}} \phi_{Y_v(1)}(\theta L_v[W]_v^{1/\alpha})$$

die charakteristische Funktion $\phi_{Y_v(1)}$ schreiben wir in Termen des charakteristischen Exponenten Ψ_{Y_v}

$$= \prod_{\substack{|v|=m \\ w^m \prec v \preceq v^m}} \exp(-\Psi_{Y_v}(\theta L_v[W]_v^{1/\alpha}))$$

da die Y_v Kopien von Y sind, ist $\Psi_{Y_v} = \Psi_Y$

$$\begin{aligned} &= \prod_{\substack{|v|=m \\ w^m \prec v \preceq v^m}} \exp(-L_v^\alpha[W]_v \Psi_Y(\theta)) \\ &= \exp\left(-\sum_{\substack{|v|=m \\ w^m \prec v \preceq v^m}} L_v^\alpha[W]_v \Psi_Y(\theta)\right) \\ &= \exp\left(- (f(d_{v^m}) - f(d_{w^m})) \Psi_Y(\theta)\right). \end{aligned}$$

Analog ist

$$\begin{aligned} \phi_{Y(f(d_{v^m})-f(d_{w^m}))}^{\mathcal{A}_\infty}(\theta) &= \mathbb{E}\left(\exp(-i\theta Y(f(d_{v^m}) - f(d_{w^m}))) \middle| \mathcal{A}_\infty\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\exp(-i\theta(f(d_{v^m}) - f(d_{w^m})))^{1/\alpha} Y(1) \middle| \mathcal{A}_\infty\right) \\ &= \phi_{Y(1)}^{\mathcal{A}_\infty}(\theta(f(d_{v^m}) - f(d_{w^m}))^{1/\alpha}) \\ &= \phi_{Y(1)}(\theta(f(d_{v^m}) - f(d_{w^m}))^{1/\alpha}) \\ &= \exp\left(-\Psi_Y(\theta(f(d_{v^m}) - f(d_{w^m}))^{1/\alpha})\right) \\ &= \exp\left(- (f(d_{v^m}) - f(d_{w^m})) \Psi_Y(\theta)\right). \end{aligned}$$

(i'): Mit den Voraussetzungen aus (i) erhalten wir analog ebenfalls

$$X(d_{v^m}) \stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=} Y(f(d_{v^m})).$$

(ii): Als nächstes zeigen wir, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und alle $v_1 \prec \dots \prec v_n \in \mathbb{V}_m^{\neq \emptyset}$ die Zuwächse $X(d_{v_i}) - X(d_{v_{i-1}}), i = 1, \dots, n$ (mit $d_{v_0} := 0$) bedingt auf \mathcal{A}_∞ unabhängig sind.

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sowie $v_1 \prec \dots \prec v_n \in \mathbb{V}_m^{\neq \emptyset}$. Wir setzen $d_{v_0} := 0$ und $v_0 := \emptyset$. Dann sind die Zuwächse

$$X(d_{v_i}) - X(d_{v_{i-1}}) = \sum_{\substack{|v|=m \\ v_{i-1} \prec v \preceq v_i}} L_v X_v(1), \quad i = 1, \dots, n,$$

bedingt auf \mathcal{A}_∞ als Funktionen unabhängiger Zufallsgrößen unabhängig.

(ii'): Mit den Voraussetzungen aus (ii) sind die Zuwächse

$$Y(f(d_{v_i})) - Y(f(d_{v_{i-1}})), \quad i = 1, \dots, n,$$

bedingt auf \mathcal{A}_∞ unabhängig, da Y ein Lévy-Prozess ist.

(iii): Abschließend zeigen wir, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$ gilt

$$(X(t_i) - X(t_{i-1}))_{1:n} \stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=} (Y(f(t_i) - f(t_{i-1})))_{1:n}. \quad (2.21)$$

Seien $n \in \mathbb{N}$, sowie $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq 1$. Für $m_0 \in \mathbb{N}$ hinreichend groß existieren dann $v_1^{m_0} \prec \dots \prec v_n^{m_0} \in \mathbb{V}_{m_0}^{\neq \emptyset}$, sodass

$$t_{i-1} < d_{v_i^{m_0}} \leq t_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Für alle $m > m_0$ definieren wir neu

$$v_i^m := \sup\{v \in \mathbb{V}_m^{\neq \emptyset} : d_v \leq t_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt

$$(d_{v_1^m}, \dots, d_{v_n^m}) \nearrow (t_1, \dots, t_n)$$

fast sicher für $m \rightarrow \infty$.

(1): Betrachten wir zunächst den Vektor der Zuwächse

$$(X(d_{v_i^m}) - X(d_{v_{i-1}^m}))_{1:n}. \quad (2.22)$$

Bedingt auf \mathcal{A}_∞ sind die Einträge von (2.22) unabhängig und aus der Links-Stetigkeit von X folgt

$$(X(d_{v_i^m}) - X(d_{v_{i-1}^m}))_{1:n} \xrightarrow{f.s.|\mathcal{A}_\infty} (X(t_i) - X(t_{i-1}))_{1:n} \quad (2.23)$$

für $m \rightarrow \infty$.

(2): Für den Vektor der Zuwächse

$$(Y(f(d_{v_i^m}) - f(d_{v_{i-1}^m})))_{1:n}$$

gilt analog

$$(Y(f(d_{v_i^m}) - f(d_{v_{i-1}^m})))_{1:n} \xrightarrow{f.s.|\mathcal{A}_\infty} (Y(f(t_i) - f(t_{i-1})))_{1:n} \quad (2.24)$$

für $m \rightarrow \infty$, da Y Werte in D_- hat, also insbesondere links-stetig ist und nach Annahme unabhängig von \mathcal{A}_∞ ist.

Insgesamt erhalten wir aus (i), (i'), (ii) und (ii')

$$(X(d_{v_i^m}) - X(d_{v_{i-1}^m}))_{1:n} \stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=} (Y(f(d_{v_i^m}) - f(d_{v_{i-1}^m})))_{1:n} \quad (2.25)$$

und mit (2.23) und (2.24)

$$\begin{array}{ccc} (X(d_{v_i^m}) - X(d_{v_{i-1}^m}))_{1:n} & \stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=} & (Y(f(d_{v_i^m}) - f(d_{v_{i-1}^m})))_{1:n} \\ \begin{array}{c} \downarrow \\ f.s.|\mathcal{A}_\infty \end{array} & & \begin{array}{c} \downarrow \\ f.s.|\mathcal{A}_\infty \end{array} \\ (X(t_i) - X(t_{i-1}))_{1:n} & & (Y(f(t_i) - f(t_{i-1})))_{1:n} \end{array}$$

Es folgt

$$(X(t_i) - X(t_{i-1}))_{1:n} \stackrel{d|\mathcal{A}_\infty}{=} (Y(f(t_i) - f(t_{i-1})))_{1:n}.$$

□

2.3 Beispiel: Eine Charakterisierung der Brown'schen Bewegung

Als Anwendungsbeispiel der vorangegangenen Abschnitte betrachten wir die homogene Prozess-Gleichung in D_-

$$(B(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sqrt{U} B_1(1 \wedge \frac{t}{U}) + \sqrt{(1-U)} B_2(0 \vee \frac{t-U}{1-U}) \right)_{t \in [0,1]}, \quad (2.26)$$

wobei U, B_1, B_2 unabhängig, U gleich-verteilt auf $(0, 1)$ und B_1, B_2 verteilt sind wie B mit Werten in D_- .

An der Stelle $t = 1$ erhalten wir die reell-wertige Gleichung mit $B(1) \stackrel{d}{=} D$

$$D \stackrel{d}{=} \sqrt{U} D_1 + \sqrt{(1-U)} D_2, \quad (2.27)$$

wobei D_1, D_2 unabhängig und verteilt sind wie D .

Die Lösungen von (2.27) lassen sich dann darstellen als

$$D \stackrel{d}{=} W^{1/\alpha} Y,$$

wobei W wie in Abschnitt 1.4.4 die eindeutige nicht-triviale, nicht-negative Lösung von

$$W \stackrel{d}{=} \sqrt{U}^\alpha W_1 + \sqrt{(1-U)}^\alpha W_2$$

ist und Y eine strikt α -stabile Zufallsgröße.

Der Stabilitätsindex $\alpha = 2$ bestimmt sich aus (A3)

$$1 = m(\alpha) = \mathbb{E}[\sqrt{U}^\alpha + \sqrt{(1-U)}^\alpha]$$

und wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit $W \equiv 1$ wählen.

Die (strikt) 2-stabilen Lévy-Prozesse sind genau die Brown'schen Bewegungen, genauer ist $\mathcal{S}_2(\sigma, 0, 0) = \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$.

Die Pfadgewichte $L_v, v \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset}$ entsprechen jeweils der Länge des zum Knoten v assoziierten Intervalls I_v , also $L_v = |I_v| = (d_v - c_v)$.

Entsprechend gilt für f aus (2.12):

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_{v_n(t)}| = \sum_{n \in \mathbb{N}} (d_{v_n(t)} - c_{v_n(t)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{v_n(t)} = t.$$

Nach Theorem 2.1 aus Abschnitt 2.1 definiert für jeden strikt 2-stabile Lévy-Prozess Y , i.e. eine Brown'sche Bewegung, $Y \circ f = Y$ eine Lösung von (2.26). Weiter sagt Theorem 2.5 aus Abschnitt 2.2, dass sich alle Lösungen so darstellen lassen.

Kapitel 3

Die inhomogene Gleichung auf D_-

Wir behalten die Notationen und Voraussetzungen aus Kapitel 2 bei und untersuchen in diesem Kapitel das inhomogene Gegenstück zu (2.1)

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j \geq 1} T_j X_j(\tau_j(t)) + C(t) \right)_{t \in [0,1]} \quad (3.1)$$

auf Lösungen in D_- , wobei C eine Zufallsgröße mit Werten in D_- ist.

Das inhomogene Gegenstück zu (2.2) ist dann

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^N T_j X_j(\tau_j(t)) + C(t) \right)_{t \in [0,1]}. \quad (3.2)$$

In Termen von φ erhalten wir aus (3.2) das inhomogene Gegenstück zu (2.4):

$$(X(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(\sum_{j=1}^N T_j (\mathbf{1}_{\{t \in I_j\}} X_j(\varphi_j(t)) + \mathbf{1}_{\{t \in I_{>j}\}} X_j(1)) + C(t) \right)_{t \in [0,1]}. \quad (3.3)$$

Es sollte nicht weiter überraschen, dass wir zusätzlich Bedingungen an C stellen müssen um die Existenz (und Eindeutigkeit) von Lösungen zu gewährleisten.

Im Folgenden nehmen wir an, dass die $(X_j)_{j \geq 1}$ und $((T_j, \tau_j)_{j \geq 1}, C)$ unabhängig sind und $\|C\|_{\infty, p} \leq c_p < \infty$ für ein $p > \alpha$ und ein $c_p \geq 0$, wobei α der charakteristische Exponent (von T) ist.

Wir fordern, dass die Funktion C von $(X_j)_{j \geq 1}$ unabhängig ist, nicht aber von $(T_j, \tau_j)_{j \geq 1}$.

3.1 Existenz von Lösungen

In diesem Abschnitt zeigen wir die Existenz einer Lösung zu (3.2). Wir nutzen die Ulam-Harris Notation aus Abschnitt 1.4.1 und konstruieren eine explizite Lösung von (3.2) als den gleichmäßigen Grenzwert \mathcal{Z}

$$\mathcal{Z} = \mathcal{R}_{\mathbb{V}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_{\mathbb{V}_{\leq n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in \mathbb{V}_{\leq n}} \mathcal{L}_v(\mathcal{C}_v)$$

in der $\|\cdot\|_{\infty, p}$ -Norm. Dabei sind die \mathcal{L}_v Pfadgewichte und die \mathcal{C}_v spezielle Modifikationen der Funktion C (siehe (3.8)). Genauer ersetzen wir die Terme

$$\mathbf{1}_{\{t \in I_{> j}\}} T_j X_j(1) \longleftrightarrow \mathbf{1}_{\{t \in I_{> j}\}} T_j Z_j$$

von (3.3) durch spezielle Versionen (siehe (3.5)) und fassen diese als zusätzliche Kosten auf.

3.1.1 Eine spezielle Lösung an der Stelle $t = 1$

Um diese speziellen Versionen Z_j von $X_j(1)$ zu konstruieren, betrachten wir die Gleichung (3.2) an der Stelle $t = 1$. Dies liefert mit $X(1) \stackrel{d}{=} V$ und $C(1) = D$ die inhomogene reell-wertige Fixpunktgleichung (mit denselben T_j)

$$V \stackrel{d}{=} \sum_{j \geq 1} T_j V_j + D, \quad (3.4)$$

wobei $((T_j)_{j \geq 1}, D), (V_j)_{j \geq 1}$ unabhängig und die $(V_j)_{j \geq 1}$ wie V verteilt sind.

Sind (A1)-(A4) und im Fall $\alpha = 1$ zusätzlich (A5), sowie eine der Bedingungen (C1) oder (C2) aus Abschnitt 1.2.2

$$m(1) < \infty, \mathbb{E}|C| < \infty \text{ und} \\ (\Upsilon^n(\delta_0))_{n \geq 0} \text{ ist beschränkt in } \mathcal{L}^p \text{ für ein } p \geq 1. \quad (C1)$$

$$m(\beta) < 1 \text{ und } \mathbb{E}|C|^\beta < \infty \text{ für ein } 0 < \beta \leq 1. \quad (C2)$$

erfüllt, können wir (3.4) nach Abschnitt 1.2 lösen.

Wir interessieren uns für eine Version einer solchen reellen Lösung Z , die

$$Z_v = \sum_{j \geq 1} T_j^v Z_{vj} + D_v \quad (3.5)$$

fast sicher erfüllt für alle $v \in \mathbb{V}$ gleichzeitig.

Wir konstruieren eine solche Version wie in Lemma 2.4 mittels projektiver Familien. Analog zu Abschnitt 2.2.2:

Sei ρ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, das eine Lösung von (3.4) ist. Weiter sei auf $(\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}, (\mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}))^{\mathbb{N}})$ das Wahrscheinlichkeitsmaß ν durch die gemeinsame Verteilung von $T(\emptyset)$ gegeben.

Wir definieren

$$(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) := \begin{cases} (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \rho) & \text{für } i \in \mathbb{V}, \\ (\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}}, (\mathcal{B}(\mathbb{R}_{\geq 0}))^{\mathbb{N}}, \nu) & \text{für } i \in E. \end{cases}$$

Für eine Menge $J \subset \mathbb{V} \cup E$ definieren wir weiter den Produktraum

$$(\Omega_J, \mathcal{A}_J, \mu_J) := \left(\prod_{j \in J} \Omega_j, \bigotimes_{j \in J} \mathcal{A}_j, \bigotimes_{j \in J} \mu_j \right)$$

mit der Produkt- σ -Algebra und dem Produktmaß. Die Projektionen bezeichnen wir mit $\Phi_{J,K} : \Omega_J \rightarrow \Omega_K$ für $K \subset J \subset \mathbb{V} \cup E$.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und setze $I_m := \mathbb{V}_m \cup E_{< m}$ sowie $\bar{I}_m := \mathbb{V}_{\leq m} \cup E_{< m}$.

Wir schreiben für den zu I_m gehörigen Produktraum kurz

$(\Omega_m, \mathcal{A}_m, \mu_m) := (\Omega_{I_m}, \mathcal{A}_{I_m}, \mu_{I_m})$ und analog für den zu \bar{I}_m gehörigen Produktraum $(\bar{\Omega}_m, \bar{\mathcal{A}}_m) := (\Omega_{\bar{I}_m}, \mathcal{A}_{\bar{I}_m})$.

Die Abbildung $h : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$h((z_j)_{j \geq 1}, (t_j)_{j \geq 1}) := \sum_{j \geq 1} t_j z_j$$

sei wohldefiniert. Für $w \in \mathbb{V}_m$ sei

$$X_w^{(m)} := \Phi_{\bar{I}_m, \{w\}} \in \mathbb{R}^{\bar{I}_m}$$

sowie für $e_w \in E_{< m}$

$$T(w) = ((T_j^w)_{j \geq 1}) := \left(\Phi_{\bar{I}_m, \{(w, w_j)\}} \right)_{j \geq 1} \in (\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathbb{N}})^{\bar{I}_m}$$

und wir definieren rekursiv für alle $v \in \mathbb{V}_{< m}$

$$X_v^{(m)} := h((X_{vj}^{(m)})_{j \geq 1}, (T_j^v)_{j \geq 1}) + D_v.$$

Auf $(\bar{\Omega}_m, \bar{\mathcal{A}}_m)$ definieren wir ein Maß $\bar{\mu}_m$ indem wir die Werte von $\bar{\mu}_m$ auf den Zylindermengen

$$\prod_{j \in J} \Phi_{\bar{I}_m, \{j\}}^{-1}(A_j), \quad A_j \in \mathcal{A}_j, J \subset \bar{I}_m \text{ endlich,}$$

angeben.

Für $J \subset \bar{I}_m$ endlich und $A_j \in \mathcal{A}_j, j \in J$ sei

$$\bar{\mu}_m\left(\prod_{j \in J} \Phi_{\bar{I}_m, \{j\}}^{-1}(A_j)\right) := \mu_m\left(\bigcap_{j \in J \cap \mathbb{V}_{\leq m}} \{X_j^{(m)} \in A_j\} \cap \bigcap_{j \in J \cap E_{< m}} \{T(j) \in A_j\}\right).$$

Wir erhalten das Analogon zu Lemma 2.4:

Lemma 3.1. *Die Wahrscheinlichkeitsräume $(\bar{\Omega}_m, \bar{\mathcal{A}}_m, \bar{\mu}_m)$, $m \in \mathbb{N}$ bilden eine projektive Familie.*

Der projektive Grenzwert existiert und kann als $(\Omega_{\mathbb{V} \cup E}, \mathcal{A}_{\mathbb{V} \cup E}, \mu_{\mathbb{V} \cup E})$ gewählt werden.

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 2.4. □

Wir wählen

$$Z_v := \Phi_{\mathbb{V} \cup E, \{v\}} \quad \text{sowie} \quad (T_j^v)_{j \in \mathbb{N}} := \Phi_{\mathbb{V} \cup E, \{e_v\}} \quad (3.6)$$

für alle $v \in \mathbb{V}$.

Diese Z_v definieren eine Lösung von (3.4) und erfüllen ebenso (3.5), also

$$Z_v = \sum_{j \geq 1} T_j^v Z_{vj} + D_v \quad (3.7)$$

fast sicher erfüllt für alle $v \in \mathbb{V}$ gleichzeitig.

3.1.2 Eine spezielle Lösung der inhomogenen Prozessgleichung

Wie in Abschnitt 3.1 angekündigt, nutzen wir die Z_v aus (3.6) und fassen diese als zusätzliche Kosten auf.

Definiere

$$\mathcal{C}_v := C_v + \sum_{j \geq 1} \mathbf{1}_{I_{>j}^v} T_j^v Z_{vj} \quad (3.8)$$

für alle $v \in \mathbb{V}$ mit den Intervallen $I_{>j}$ wie in (2.3).

Wir nutzen diese modifizierte Funktion \mathcal{C} und konstruieren im Folgenden eine Lösung \mathcal{Z} von (3.2) mittels gewichteter Verzweigung.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Teilbaum $\mathbb{V}_{\leq n}$ und darauf

$$T(\mathbb{V}_{\leq n}) := (T(w))_{w \in \mathbb{V}_{\leq n}} = ((T_j^w)_{j \geq 1})_{w \in \mathbb{V}_{\leq n}}$$

Sei $\mathcal{T}_{a,b} : D_- \rightarrow D_-$ die Raum-Zeit-Transformation

$$\mathcal{T}_{a,b}(x) = a \cdot x \circ b, \quad (3.9)$$

wobei $a \in D_-$, $b \in D_{-\nearrow}$. Diese bilden mittels Hintereinanderausführung eine Halbgruppe

$$\mathcal{T}_{a,b} \circ \mathcal{T}_{c,d} = \mathcal{T}_{a \circ b, d \circ c}$$

Wir definieren mit der Notation der Intervalle aus Abschnitt 1.4.3 die zufälligen Kantengewichte $\mathcal{L}_{v,vw}$ mit Werten in $D_-^{D_-}$ wie folgt:

Seien

$$\mathcal{L}_{v,v} := \mathcal{T}_{1, \text{id}} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_{v,vj} := \mathcal{T}_{a_{v,vj}, b_{v,vj}}$$

wobei

$$(a_{v,vj}(t), b_{v,vj}(t)) = \begin{cases} (\mathbf{1}_{t \in I_j^v} T_j^v, \tau_j^v(t)) & \text{für } v \in \mathbb{V}_{\leq n}, \\ (0, 0) & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $v \in \mathbb{V}$ und $j \in \mathbb{N}$. Für $x \in D_-$ und $v \in \mathbb{V}_{\leq n}$ ist

$$\mathcal{L}_{v,vj}(x)(t) = \mathbf{1}_{t \in I_j^v} T_j^v x(\tau_j^v(t)).$$

Definiere rekursiv

$$\mathcal{L}_{v,vwx} := \mathcal{L}_{v,vw} \circ \mathcal{L}_{vw,vwx}$$

für $v, w, x \in \mathbb{V}$.

Für $v, w \in \mathbb{V}$ definiere die Zufallsgröße

$$\mathcal{R}_{v,vw} := \mathcal{L}_{v,vw}(\mathcal{C}_{vw}) \quad (3.10)$$

mit Werten in D_- .

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass die Folge

$$\mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}_{\leq n}} := \sum_{w \in \mathbb{V}_{\leq n}} \mathcal{R}_{v,vw} \rightarrow \mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}} := \sum_{w \in \mathbb{V}} \mathcal{R}_{v,vw}$$

für $n \rightarrow \infty$ fast sicher absolut in der Supremumsmetrik gegen einen Grenzwert $\mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}}$ mit Werten in D_- konvergiert.

Proposition 3.2. *Seien $p > 0$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} |L_v|^p\right) = m(p)^k \quad (3.11)$$

mit $m(\theta) = \mathbb{E}(\sum_{j=1}^N T_j^\theta)$ aus (1.5).

Beweis. Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} |L_v|^p\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N \sum_{v \in \mathbb{V}_{k-1}} |L_j|^p |L_{j,jv}|^p\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N |L_j|^p \sum_{v \in \mathbb{V}_{k-1}} |L_{j,jv}|^p \mid \mathcal{A}_1\right]\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N |L_j|^p \mathbb{E}\left[\sum_{v \in \mathbb{V}_{k-1}} |L_{j,jv}|^p \mid \mathcal{A}_1\right]\right) \end{aligned}$$

die $L_{j,jv}$ sind unabhängig von \mathcal{A}_1

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^N |L_j|^p\right) \mathbb{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_{k-1}} |L_{j,jv}|^p\right) \\ &= m(p) \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_{k-1}} |L_v|^p\right) \end{aligned}$$

und induktiv

$$= m(p)^k.$$

□

Lemma 3.3. Seien $K_v, v \in \mathbb{V}$, Zufallsgrößen mit Werten in D_- , die von $\mathcal{A}_{|v|}$ unabhängig sind und $F_v : (\mathbb{R}_{>0}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{V}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, v \in \mathbb{V}$, messbar.

Weiter seien $\sup_{v \in \mathbb{V}} \|K_v\|_{\infty, p} \leq k_p < \infty$ und $\sup_{v \in \mathbb{V}} \|F_v([T(\mathbb{V}_{\leq n})]_v)\|_p \leq \kappa_p < \infty$ für ein $p > \alpha$ mit $m(p) < 1$, wobei α der charakteristische Exponent (von T) ist. Sei $\mathcal{F}_v : \Omega \rightarrow D_-$ mit Wert $F_v([T(\mathbb{V}_{\leq n})]_v)$ und $\mathcal{K}_v := K_v + \mathcal{F}_v$ die Zufallsgröße mit Werten in D_- . Dann gilt für $R_{v, vw} := \mathcal{L}_{v, vw}(\mathcal{K}_{vw})$

$$\left\| \sum_{w \in \mathbb{V}_k} |R_{v, vw}| \right\|_{\infty, p} \leq (k_p + \kappa_p) m(p)^{(k \wedge (k/p))}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ sowie

$$\left\| \sum_{w \in \mathbb{V}} |R_{v, vw}| \right\|_{\infty, p} \leq \frac{(k_p + \kappa_p)}{1 - m(p)^{(1 \wedge (1/p))}}$$

für alle $v \in \mathbb{V}$.

Beweis. Für $R_{\emptyset, \emptyset v} =: R_v, v \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset}$ gilt

$$R_v = \mathcal{L}_v(\mathcal{K}_v) = \mathbb{1}_{I_v} L_v(\mathcal{K}_v \circ \varphi_v).$$

Da für alle $k \in \mathbb{N}$ die $I_v, v \in \mathbb{V}_k^{\neq \emptyset}$ eine Partition von $(0, 1]$ bilden, die φ_v Bijektionen auf $(0, 1]$ sind und $L_v \geq 0$ sind, gilt weiter

$$\left\| \sum_{v \in \mathbb{V}_k} |R_v| \right\|_{\infty} \leq \sup_{v \in \mathbb{V}_k} \|R_v\|_{\infty} \leq \sup_{v \in \mathbb{V}_k} L_v \|\mathcal{K}_v\|_{\infty}$$

Für $\mathbb{E} \left\| \sum_{v \in \mathbb{V}_k} |R_v| \right\|_{\infty}^p$ folgt damit

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{v \in \mathbb{V}_k} |R_v| \right\|_{\infty}^p &\leq \mathbb{E} \left(\sup_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^p \|\mathcal{K}_v\|_{\infty}^p \right) \leq \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^p \|\mathcal{K}_v\|_{\infty}^p \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^p \|\mathcal{K}_v\|_{\infty}^p \mid \mathcal{A}_k \right] \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^p \mathbb{E} \left[\|\mathcal{K}_v\|_{\infty}^p \mid \mathcal{A}_k \right] \right) \end{aligned}$$

die $\mathcal{K}_v, v \in \mathbb{V}_k$ sind nach Definition über K_v und $[\cdot]_v$ unabhängig von \mathcal{A}_k

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^p \mathbb{E} \|\mathcal{K}_v\|_\infty^p \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^p \mathbb{E} \|K_v + \mathcal{F}_v\|_\infty^p \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^p \|K_v + \mathcal{F}_v\|_{\infty,p}^{(p \vee 1)} \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^p (\|K_v\|_{\infty,p} + \|F_v([T(\mathbb{V}_{\leq n})]_v)\|_p)^{(p \vee 1)} \right)
\end{aligned}$$

mit $\sup_{v \in \mathbb{V}} \|K_v\|_{\infty,p} \leq k_p$ und $\sup_{v \in \mathbb{V}} \|F_v([T(\mathbb{V}_{\leq n})]_v)\|_p \leq \kappa_p$ folgt

$$\leq (k_p + \kappa_p)^{(p \vee 1)} \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^p \right)$$

und mit (3.11)

$$= (k_p + \kappa_p)^{(p \vee 1)} m(p)^k.$$

Damit folgt

$$\| \sum_{v \in \mathbb{V}} |R_v| \|_{\infty,p} = \left\| \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \sum_{v \in \mathbb{V}_k} |R_v| \right\|_{\infty,p} \leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \left\| \sum_{v \in \mathbb{V}_k} |R_v| \right\|_{\infty,p}$$

mit der Abschätzung von $\| \sum_{v \in \mathbb{V}_k} |R_v| \|_{\infty,p}$ und $m(p) < 1$ folgt

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (k_p + \kappa_p) m(p)^{(k \wedge (k/p))} \\
&= \frac{(k_p + \kappa_p)}{1 - m(p)^{(1 \wedge (1/p))}}.
\end{aligned}$$

□

Das Lemma 3.3 wollen wir jetzt auf \mathcal{R} aus (3.10) mit \mathcal{C} aus (3.8) anwenden.

Für

$$\|C\|_{\infty,p} \leq c_p < \infty \quad \text{und} \quad F_v([T(\mathbb{V}_{\leq n})]_v) = \sum_{j=1}^{N^v-1} T_j^v |Z_{vj}|$$

wird die Kostenfunktion \mathcal{C}_v durch die Funktion

$$|\mathcal{C}_v| \leq |C_v| + \sum_{j \geq 1} T_j^v |Z_{vj}|$$

dominiert.

Um Lemma 3.3 anwenden zu können reicht es also, dass

$$\left\| \sum_{j=1}^{N^v} T_j^v |Z_{vj}| \right\|_p \leq \kappa_p < \infty$$

für ein $\kappa_p \geq 0$.

Dabei unterscheiden wir die Fälle $p \leq 1$ und $p > 1$.

Für $p \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{N^v} T_j^v |Z_{vj}| \right\|_p &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{N^v} T_j^v |Z_{vj}| \right)^p \leq \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{N^v} (T_j^v)^p |Z_{vj}|^p \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^{N^v} (T_j^v)^p |Z_{vj}|^p \mid \mathcal{A}_{|v|} \right] \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{N^v} (T_j^v)^p \right) \mathbb{E} |Z_{vj}|^p \\ &= m(p) \|Z\|_p. \end{aligned}$$

Für den Fall $p > 1$ greifen wir auf die Woyczynski-Ungleichung (vgl. [32, Prop. 2.1]) zurück:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{N^v} T_j^v |Z_{vj}| \right\|_p &= \left\| \sum_{j=1}^{N^v} T_j^v |Z_{vj}| - \mathbb{E} |Z_{vj}| + \mathbb{E} |Z_{vj}| \right\|_p \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^{N^v} T_j^v (|Z_{vj}| - \mathbb{E} |Z_{vj}|) \right\|_p + \left\| \sum_{j=1}^{N^v} T_j^v \mathbb{E} |Z_{vj}| \right\|_p \end{aligned}$$

und mit der Woyczynski-Ungleichung für zentrierte Zufallsgrößen

$$\leq \left(M_p \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{N^v} (T_j^v)^p (|Z_{vj}| - \mathbb{E} |Z_{vj}|)^p \right) \right)^{1/p} + \left\| \sum_{j=1}^{N^v} T_j^v \mathbb{E} |Z_{vj}| \right\|_p,$$

wobei die Konstante $M_p < \infty$ nur von p abhängt

$$\leq M_p^{1/p} m(p)^{1/p} \| |Z| - \mathbb{E} |Z| \|_p + \left\| \sum_{j=1}^N T_j \right\|_p \|Z\|_1.$$

Definiere

$$\kappa_p := \begin{cases} m(p) \|Z\|_p, & \text{für } 0 < p \leq 1, \\ M_p^{1/p} m(p)^{1/p} \| |Z| - \mathbb{E} |Z| \|_p + \left\| \sum_{j=1}^N T_j \right\|_p \|Z\|_1, & \text{für } 1 < p. \end{cases} \quad (3.12)$$

Proposition 3.4. Seien $k \in \mathbb{N}$, α der charakteristische Exponent (von T) und $p > \alpha$ mit $m(p) < 1$ sowie $\|\sum_{j=1}^N T_j\|_p < \infty$ und $\| |Z| - \mathbb{E}|Z| \|_p < \infty$. Weiter seien \mathcal{C}_v wie in (3.8) und \mathcal{R}_v wie in (3.10) definiert. Dann gilt mit κ_p aus (3.12)

$$\left\| \sum_{w \in \mathbb{V}_k} |\mathcal{R}_{v,vw}| \right\|_{\infty,p} \leq (c_p + \kappa_p) m(p)^{(k \wedge (k/p))} < \infty \quad (3.13)$$

sowie

$$\left\| \sum_{w \in \mathbb{V}} |\mathcal{R}_{v,vw}| \right\|_{\infty,p} \leq \frac{(c_p + \kappa_p)}{1 - m(p)^{(1 \wedge (1/p))}} < \infty \quad (3.14)$$

für alle $v \in \mathbb{V}$.

Beweis. Lemma 3.3. □

Mit Proposition 3.4 erhalten wir das folgende Theorem:

Theorem 3.5. Mit den Voraussetzungen aus Proposition 3.4 gilt:
Die Folge

$$\mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}_{\leq n}} = \sum_{w \in \mathbb{V}_{\leq n}} \mathcal{R}_{v,vw} \rightarrow \sum_{w \in \mathbb{V}} \mathcal{R}_{v,vw} = \mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}} \quad (3.15)$$

konvergiert fast sicher für $n \rightarrow \infty$ und alle $v \in \mathbb{V}$ absolut in der Supremumsmetrik gegen einen Grenzwert $\mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}}$ mit Werten in D_- .

Beweis. Nach Proposition 3.4 sind $\mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}_{\leq n}}$, $n \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}}$ wohldefiniert und die Behauptung folgt mit monotoner Konvergenz. □

Es bleibt also zu zeigen, dass der in (3.15) definierte Prozess $\mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}}$, $v \in \mathbb{V}$, tatsächlich eine Lösung von (3.2) definiert.

Theorem 3.6. Die Familie

$$\mathcal{Z}_v := \mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}}, v \in \mathbb{V} \quad (3.16)$$

aus (3.15) erfüllt

$$\mathcal{Z}_v = \sum_{j \geq 1} \mathcal{L}_{v,vj}(\mathcal{Z}_{vj}) + \mathcal{C}_v \quad (3.17)$$

fast sicher für alle $v \in \mathbb{V}$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{v,v\mathbb{V}_{\leq n}} &= \sum_{w \in \mathbb{V}_{\leq n}} \mathcal{R}_{v,vw} = \mathcal{C}_v + \sum_{j \geq 1} \sum_{w \in \mathbb{V}_{\leq n-1}} \mathcal{L}_{v,vj}(\mathcal{L}_{vj,vjw}(\mathcal{C}_{vjw})) \\ &= \mathcal{C}_v + \sum_{j \geq 1} \mathcal{L}_{v,vj}(\mathcal{R}_{vj,vj\mathbb{V}_{\leq n-1}}). \end{aligned}$$

Mit $n \rightarrow \infty$ folgt die Behauptung. □

Korollar 3.7. Für \mathcal{Z} aus (3.16) und Z aus (3.6) gilt

$$\mathcal{Z}(1) \stackrel{d}{=} Z.$$

Beweis. Nach Theorem 3.6 erfüllen die \mathcal{Z}_v (3.17). An der Stelle $t = 1$ liefert dies

$$\mathcal{Z}_v(1) = \sum_{j \geq 1} \mathcal{L}_{v,vj}(\mathcal{Z}_{vj})(1) + \mathcal{C}_v(1)$$

mit den Definitionen von $\mathcal{L}_{v,vj}$ und \mathcal{C}_v

$$= T_{vN^v}^v \mathcal{Z}_{vN^v}(1) + \mathcal{C}_v(1) + \sum_{j=1}^{N^v-1} T_j^v \mathcal{Z}_{vj}.$$

Hier bezeichnet N^v wieder die (zufällige) Anzahl der realisierten Nachkommen im Knoten v und entsprechend ist vN^v der “letzte” Nachkomme von v . Weiter erfüllen die Z_v (3.7), also

$$Z_v = \sum_{j \geq 1} T_j^v Z_{vj} + \mathcal{C}_v(1).$$

Es folgt

$$\mathcal{Z}_v(1) - Z_v = T_{N^v}^v (\mathcal{Z}_{vN^v}(1) - Z_{vN^v}). \quad (3.18)$$

Definiere die Knoten $w_n \in \mathbb{V}$, $n \in \mathbb{N}$ durch

$$w_1 := N \quad \text{und rekursiv} \quad w_{n+1} := w_n N^{w_n}.$$

Wir iterieren (3.18) und erhalten

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(1) - Z &= T_N(\mathcal{Z}_N(1) - Z_N) = L_{w_1}(\mathcal{Z}_{w_1}(1) - Z_{w_1}) \\ &= \dots \\ &= L_{w_n}(\mathcal{Z}_{w_n}(1) - Z_{w_n}). \end{aligned}$$

Sei $p > \alpha$ mit $m(p) < 1$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}|\mathcal{Z}(1) - Z|^p = \mathbb{E}|L_{w_n}(\mathcal{Z}_{w_n}(1) - Z_{w_n})|^p$$

wir bedingen auf \mathcal{A}_n

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}(|L_{w_n}|^p |\mathcal{Z}_{w_n}(1) - Z_{w_n}|^p | \mathcal{A}_n)]$$

L_{w_n} ist messbar bezüglich \mathcal{A}_n und $|\mathcal{Z}_{w_n}(1) - Z_{w_n}|$ ist bedingt auf \mathcal{A}_n verteilt wie $|\mathcal{Z}(1) - Z|$

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(L_{w_n}^p \mathbb{E}(|\mathcal{Z}_{w_n}(1) - Z_{w_n}|^p | \mathcal{A}_n)) \\ &= \mathbb{E}(L_{w_n}^p) \mathbb{E}|\mathcal{Z}(1) - Z|^p. \end{aligned}$$

Weiter folgt mit Proposition 3.2

$$\mathbb{E}(L_{w_n}^p) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{|v|=n} L_v^p\right) = (m(p))^n \longrightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, da $m(p) < 1$. □

Das Korollar 3.7 zeigt also, dass die $Z_v, v \in \mathbb{V}$ eine Lösung von (3.2) definieren.

3.2 Alle Lösungen der inhomogenen Gleichung

Wir kombinieren im Folgenden die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel und Abschnitte und formulieren das Hauptresultat dieses Kapitels und der gesamten Arbeit.

Wir erinnern uns kurz an die Eigenschaften 1 - 3 strikt stabiler Verteilungen aus Kapitel 1. Wir können eine beliebige strikt stabile Verteilung $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ für $\alpha \neq 1$ bzw. $\mathcal{S}_\alpha(\sigma, 0, \mu)$ für $\alpha = 1$ durch Skalierung und Verschiebung auf eine **standardisierte** Verteilung $\mathcal{S}_\alpha(1, \beta, 0)$ für $\alpha \neq 1$ bzw. $\mathcal{S}_\alpha(1, 0, 0)$ für $\alpha = 1$ zurückführen.

Entsprechend sprechen wir von einem **standardisierten** strikt stabilen Prozess X , falls der charakteristische Exponent Ψ_X von X der einer standardisierten stabilen Verteilung ist.

Weiter können wir einen beliebigen strikt stabilen Prozess Y für passende $a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0$, schreiben als

$$Y = aX + bI,$$

wobei X der standardisierte stabile Prozess zu Y ist und I die Identität [30].

Mit dieser kurzen Vorüberlegung können wir nun unser Hauptresultat formulieren.

Theorem 3.8. *Mit den Voraussetzungen aus Theorem 2.1 und 2.5 und Proposition 3.4 ist jede Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung (3.2) in D_- eindeutig als die Verteilung von*

$$\mathcal{Z} + (aY + bI) \circ f, \quad a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, \quad (3.19)$$

gegeben.

Dabei ist \mathcal{Z} die Lösung aus (3.16), Y ein unabhängiger standardisierter α -stabiler Lévy-Prozess, wobei α der charakteristische Exponent (von T) ist, I die Identität und f wie in (2.12) definiert.

Beweis. Dass die in (3.19) definierten Prozesse eine Lösung von (3.2) sind, folgt direkt aus Theorem 2.1 und Korollar 3.7.

Zur Eindeutigkeit: Seien ρ eine Lösung von (3.2) und μ die Verteilung von \mathcal{Z} aus (3.16).

Seien weiter X_1, X_2, \dots unabhängig und nach ρ verteilt, sowie Z_1, Z_2, \dots unabhängig und nach μ verteilt, jeweils unabhängig von $(C, (T_1, \tau_1), (T_2, \tau_2), \dots)$.

Wir wählen die Versionen

$$X := \sum_{j \geq 1} T_j(X_j \circ \tau_j) + C \quad (3.20)$$

und mit denselben $(T, \tau)(\emptyset), C$

$$Z := \sum_{j \geq 1} T_j(Z_j \circ \tau_j) + C. \quad (3.21)$$

Dann ist X aus (3.20) verteilt wie ρ und Z aus (3.21) ist verteilt wie μ .
Weiter erfüllt

$$R := (X - Z) = \sum_{j \geq 1} T_j(R_j \circ \tau_j) \quad (3.22)$$

mit $R_j := (X_j - Z_j)$ die homogene Gleichung (2.2).

Mit Theorem 2.5 folgt die Behauptung. □

3.2.1 Beispiel: Alle Lösungen der Quicksort-Prozess-Gleichung (Beweis von Theorem 0.1)

Abschließend wenden wir die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte auf die Quicksort-Prozessgleichung an:

Betrachte erneut

$$(Z(t))_{t \in [0,1]} \stackrel{d}{=} \left(U Z_1(1 \wedge \frac{t}{U}) + (1 - U) Z_2(0 \vee \frac{t-U}{1-U}) + C(U, t) \right)_{t \in [0,1]}, \quad (Q)$$

wobei U, Z_1, Z_2 unabhängig, U gleich-verteilt auf $(0, 1)$, Z_1, Z_2 wie Z verteilt sind mit Werten in D_- und $C : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ aus (0.11).

An der Stelle $t = 1$ erhalten wir aus (Q) die reell-wertige Quicksort-Gleichung aus (0.7) wobei $Q \stackrel{d}{=} Z(1)$,

$$Q \stackrel{d}{=} U Q_1 + (1 - U) Q_2 + C(U)$$

für U gleich-verteilt auf $(0, 1)$, U, Q_1, Q_2 unabhängig und Q_1, Q_2 verteilt wie Q mit C aus (0.6).

Die Lösungen von (0.7) lassen sich dann darstellen als

$$Q \stackrel{d}{=} W^{1/\alpha} Y,$$

wobei W die eindeutige nicht-triviale, nicht-negative Lösung von

$$W \stackrel{d}{=} U^\alpha Q_1 + (1 - U)^\alpha Q_2$$

ist, α der charakteristische Exponent (von U) und Y eine strikt α -stabile Zufallsgröße.

Der Stabilitätsindex $\alpha = 1$ bestimmt sich aus (A3)

$$1 = m(\alpha) = \mathbb{E}[U^\alpha + (1 - U)^\alpha]$$

und wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit $W \equiv 1$ wählen.

Analog zu unseren Überlegungen aus Abschnitt 2.3 zur Brown'schen Bewegung ist f aus (2.12) die Identität:

Die Pfadgewichte $L_v, v \in \mathbb{V}^{\neq \emptyset}$ entsprechen jeweils der Länge des zum Knoten v assoziierten Intervalls I_v , also $L_v = |I_v| = (d_v - c_v)$.

Entsprechend ist

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_{v_n(t)}| = \sum_{n \in \mathbb{N}} (d_{v_n(t)} - c_{v_n(t)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_{v_n(t)} = t.$$

Der Quicksort-Prozess R aus Theorem 0.1 (vgl. [29, Theorem 9/10]) ist dann die in Abschnitt 3.1 konstruierte Lösung \mathcal{Z} von (Q).

Theorem 0.1 aus Abschnitt ist damit ein Spezialfall von Theorem 3.8.

3.3 Der Übergang von D_- zu D

Unser motivierendes Beispiel, der Quicksort-Prozess (0.9) wie in [25], hat keine deterministischen Sprünge, i.e. $\mathbb{P}(Y(t+) \neq Y(t-)) = 0$ für alle $t \in (0, 1)$ (siehe [29]). Entsprechend haben die càdlàg- bzw. càglàd-Version dieselbe Verteilung.

Im folgenden zeigen wir, dass, falls C keine deterministischen Sprünge hat, also $\mathbb{P}(C(t+) \neq C(t-)) = 0$ für alle $t \in (0, 1)$ gilt, die Lösungen X der inhomogenen Gleichung (3.1) ebenfalls keine deterministischen Sprünge haben können, also $\mathbb{P}(X(t+) \neq X(t-)) = 0$ für alle $t \in (0, 1)$ gilt.

Lemma 3.9. *Sei f wie in (2.12) und es existiere ein $p > \alpha$ mit $m(p) < 1$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(f(t+) \neq f(t-)) = 0$$

für alle $t \in (0, 1)$.

Beweis. Sei $t \in (0, 1)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ bilden die $I_v, v \in \mathbb{V}_k$ eine Partition von $(0, 1]$ und es existiert genau ein Knoten $w_k(t) \in \mathbb{V}_k^{\neq \emptyset}$, sodass $t \in I_{w_k} = (c_{w_k(t)}, d_{w_k(t)}]$.

Aus der Monotonie von f folgt weiter

$$f(t+) - f(t-) \leq f(d_{w_k(t)}) - f(c_{w_k(t)})$$

und mit der Definition von f

$$= L_{w_k(t)}^\alpha [W]_{w_k(t)}.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann folgt

$$\mathbb{P}(|f(t+) - f(t-)| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(L_{w_k(t)}^\alpha [W]_{w_k(t)} > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(L_{w_k(t)}^\alpha [W]_{w_k(t)})}{\varepsilon}.$$

$L_{w_k(t)}$ ist \mathcal{A}_k -messbar und bedingt auf \mathcal{A}_k ist $[W]_{w_k(t)}$ verteilt wie W . Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_{w_k(t)}^\alpha [W]_{w_k(t)}) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(L_{w_k(t)}^\alpha [W]_{w_k(t)} | \mathcal{A}_k)) \\ &= \mathbb{E}(L_{w_k(t)}^\alpha \mathbb{E}([W]_{w_k(t)} | \mathcal{A}_k)) \\ &= \mathbb{E}(L_{w_k(t)}^\alpha) \mathbb{E}(W). \end{aligned}$$

Sei $p > \alpha$ mit $m(p) < 1$ und definiere $p/\alpha =: q > 1$. Dann gilt mit Proposition 3.2, dass

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(L_{w_k(t)}) &\leq \mathbb{E}\left(\sup_{|v|=k} L_v^\alpha\right) \leq \left(\mathbb{E}\left(\left(\sup_{|v|=k} L_v^\alpha\right)^q\right)\right)^{1/q} = \left(\mathbb{E}\left(\sup_{|v|=k} L_v^p\right)\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\mathbb{E}\left(\sum_{|v|=k} L_v^p\right)\right)^{1/q} = (m(p)^k)^{1/q} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

für $k \longrightarrow \infty$, da $m(p) < 1$. □

Proposition 3.10. *Seien $T \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend, $(Z_t)_{t \in T}$ ein Prozess mit càglàd-Pfaden, g ein Prozess mit Pfaden in $D_- \cap T^{[0,1]}$ und unabhängig von Z , sodass $Z \circ g$ ein wohldefinierter Prozess mit Pfaden in D_- ist. Weiter gelte*

$$\mathbb{P}(Z(t+) \neq Z(t-)) = 0$$

für alle $t \in \overset{\circ}{T}$ sowie

$$\mathbb{P}(g(t+) \neq g(t-)) = 0$$

für alle $t \in (0, 1)$.

Dann gilt

$$\mathbb{P}((Z \circ g)(t+) \neq (Z \circ g)(t-)) = 0$$

für alle $t \in (0, 1)$.

Beweis. Sei $t \in (0, 1)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((Z \circ g)(t+) \neq (Z \circ g)(t-)) &= \mathbb{P}\left(\lim_{s \searrow t} (Z \circ g)(s) \neq \lim_{u \nearrow t} (Z \circ g)(u)\right) \\ &= \int \mathbb{P}\left(\lim_{s \searrow t} (Z \circ h)(s) \neq \lim_{u \nearrow t} (Z \circ h)(u)\right) \mathbb{P}^g(dh) \\ &= \int \mathbb{P}\left(Z\left(\lim_{s \searrow t} h(s)\right) \neq Z\left(\lim_{u \nearrow t} h(u)\right)\right) \mathbb{P}^g(dh) \\ &\leq \int \mathbf{1}_{\{\lim_{s \searrow t} h(s) \neq \lim_{u \nearrow t} h(u)\}} \mathbb{P}^g(dh) \\ &= \mathbb{P}(g(t+) \neq g(t-)) = 0.\end{aligned}$$

□

Theorem 3.11. *Sei X eine Lösung von (3.1) in D_- und es gelte $\mathbb{P}(C(t+) \neq C(t-)) = 0$ für alle $t \in (0, 1)$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(X(t+) \neq X(t-)) = 0$$

für alle $t \in (0, 1)$.

Beweis. Seien $t \in (0, 1)$ und $\varepsilon > 0$. Wir Schreiben

$$X = \mathcal{Z} + (Y \circ f)$$

wie in Theorem 3.8. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X(t+) - X(t)| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(|\mathcal{Z}(t+) - \mathcal{Z}(t-)| > \varepsilon/2) \\ &\quad + \mathbb{P}(|(Y \circ f)(t+) - (Y \circ f)(t-)| > \varepsilon/2). \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist nach Proposition 3.10 gleich Null. Es reicht also zu zeigen, dass

$$P(|\mathcal{Z}(t+) - \mathcal{Z}(t-)| > \varepsilon) = 0$$

ist.

Hierzu iterieren wir die Gleichung (3.1) mit \mathcal{Z} . Für $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir

$$\mathcal{Z} = \sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v(\mathcal{Z}_v \circ \tau_v) + \sum_{v \in \mathbb{V}_{<k}} L_v(C_v \circ \tau_v).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathcal{Z}(t+) - \mathcal{Z}(t-)| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}\left(\left|\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v((\mathcal{Z}_v \circ \tau_v)(t+) - (\mathcal{Z}_v \circ \tau_v)(t-))\right| > \varepsilon/2\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\left|\sum_{v \in \mathbb{V}_{<k}} L_v((C_v \circ \tau_v)(t+) - (C_v \circ \tau_v)(t-))\right| > \varepsilon/2\right). \end{aligned}$$

Wir betrachten die Summanden einzeln.

Zum ersten : Für alle $k \in \mathbb{N}$ bilden die $I_v, v \in \mathbb{V}_k$ eine Partition von $(0, 1]$ und es existiert genau ein Knoten $w_k(t) \in \mathbb{V}_k^{\neq 0}$, sodass $t \in I_{w_k(t)}$. Die Summe

$$\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v((\mathcal{Z}_v \circ \tau_v)(t+) - (\mathcal{Z}_v \circ \tau_v)(t-))$$

lässt sich also auf den Summanden

$$L_{w_k(t)}((\mathcal{Z}_{w_k(t)} \circ \tau_{w_k(t)})(t+) - (\mathcal{Z}_{w_k(t)} \circ \tau_{w_k(t)})(t-))$$

reduzieren.

Weiter können wir

$$\left|L_{w_k(t)}((\mathcal{Z}_{w_k(t)} \circ \tau_{w_k(t)})(t+) - (\mathcal{Z}_{w_k(t)} \circ \tau_{w_k(t)})(t-))\right| \leq 2 L_{w_k(t)} \|\mathcal{Z}_{w_k(t)}\|_\infty$$

abschätzen. Hier ist $\|\mathcal{Z}_{w_k(t)}\|_\infty = \sup_{s \in [0,1]} |\mathcal{Z}_{w_k(t)}(s)|$.
Insgesamt ist also

$$P\left(\left|\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v((\mathcal{Z}_v \circ \tau_v)(t+) - (\mathcal{Z}_v \circ \tau_v)(t-))\right| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}(|2L_{w_k(t)}\|\mathcal{Z}_{w_k(t)}\|_\infty| > \varepsilon)$$

Sei $p > \alpha$ mit $m(p) < 1$. $L_{w_k(t)}$ ist \mathcal{A}_k -messbar und bedingt auf \mathcal{A}_k ist $\mathcal{Z}_{w_k(t)}$ verteilt wie \mathcal{Z} . Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(L_{w_k(t)}^p \|\mathcal{Z}_{w_k(t)}\|_\infty^p) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(L_{w_k(t)}^p \|\mathcal{Z}_{w_k(t)}\|_\infty^p | \mathcal{A}_k)) \\ &= \mathbb{E}(L_{w_k(t)}^p \mathbb{E}(\|\mathcal{Z}_{w_k(t)}\|_\infty^p | \mathcal{A}_k)) \\ &= \mathbb{E}(L_{w_k(t)}^p) \mathbb{E}(\|\mathcal{Z}\|_\infty^p). \end{aligned}$$

Weiter ist $\mathbb{E}(\|\mathcal{Z}\|_\infty^p) < \infty$ und mit Proposition 3.2 folgt

$$\mathbb{E}(L_{w_k(t)}^p) \leq \mathbb{E}(\sup_{|v|=k} L_v^p) \leq \mathbb{E}(\sum_{|v|=k} L_v^p) = (m(p))^k \rightarrow 0$$

für $k \rightarrow \infty$, da $m(p) < 1$.

Für den zweiten Summanden reicht es zu zeigen, dass für alle $v \in \mathbb{V}_{<k}$

$$\mathbb{P}((C_v \circ \tau_v)(t+) \neq (C_v \circ \tau_v)(t-)) = 0$$

gilt.

Dies folgt direkt mit Proposition 3.10, da C_v und τ_v unabhängig sind, die τ_v fast sicher stetig sind, also insbesondere

$$\mathbb{P}(\tau_v(t+) \neq \tau_v(t-)) = 0$$

für alle $t \in (0, 1)$ gilt und wir angenommen hatten, dass

$$\mathbb{P}(C(t+) \neq C(t-)) = 0$$

für alle $t \in (0, 1)$ gilt.

□

Anhang A

Mathematische Hilfsmittel

A.1 Projektive Familien und der Satz von Kolmogorov

Die in diesem Abschnitt präsentierten Standards zu Produktmaßen und projektiven Grenzwerten können unter Anderem in [4] und [19] gefunden werden. In unseren Ausführungen orientieren wir uns an [4, Kap. VIII] und verweisen für weitere Details darauf.

Sei $(X_i)_{i \in I}$ ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit beliebiger Indexmenge I und beliebigem Zustandsraum (E, \mathcal{B}) . Für jede nicht-leere Teilmenge $J \subset I$ bezeichne E^J die Menge aller Abbildungen von J in E , also die Produktmenge $\prod_{j \in J} E$. Bezeichne mit \mathcal{B}^J die Produkt- σ -Algebra $\bigotimes_{j \in J} \mathcal{B}$ auf E^J . Ferner sei

$$X_J := \bigotimes_{j \in J} X_j : \Omega \rightarrow E^J$$

die Produktabbildung. Diese ist eine (E^J, \mathcal{B}^J) -Zufallsgröße. Die gemeinsame Verteilung der Familie $(X_j)_{j \in J}$ ist die Verteilung von X_J , nämlich

$$P_J := \mathbb{P}^{X_J}.$$

Bemerkung. Für jeden polnischen Raum E , die zugehörige Borelsche σ -Algebra $\mathcal{B}(E)$ und jede endliche Menge $J \neq \emptyset$ gilt

$$\mathcal{B}(E^J) = \mathcal{B}(E)^J$$

für den ebenfalls polnischen Produktraum E^J . Allgemeiner gilt

$$\mathcal{B}(E_1 \times \cdots \times E_n) = \mathcal{B}(E_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}(E_n)$$

für je endlich viele polnische Räume E_1, \dots, E_n und deren stets polnischen Produktraum $E_0 := E_1 \times \dots \times E_n$.

Zwischen den Wahrscheinlichkeitsräumen $(E^J, \mathcal{B}^J, P_J)$ besteht eine einfache Beziehung:

Hierzu seien $J \subset H \subset I$ Teilmengen (jeweils nicht-leer) und

$$\Phi_{H,J} : E^H \rightarrow E^J$$

die stetigen und somit $\mathcal{B}^H - \mathcal{B}^J$ -messbaren Projektionen. Diese ordnen jedem Element von E^H , also jeder Abbildung von H in E , deren Restriktion auf J zu. Für $H = I$ schreiben wir abkürzend

$$\Phi_J := \Phi_{I,J}.$$

Da nun für je zwei nicht-leere Teilmengen $J \subset H \subset I$ die Beziehung $X_J = \Phi_{H,J} \circ X_H$ gilt, erhalten wir

$$P_J = \Phi_{H,J}(P_H) \tag{A.1}$$

sowie für $H = I$ insbesondere

$$P_J = \Phi_J(P_I).$$

Für jede endliche Teilmenge $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subset I$ lässt sich das Maß P_J einfach interpretieren: Für je n Mengen $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ gilt

$$P_J(B_1 \times \dots \times B_n) = \mathbb{P}(X_{j_1} \in B_1, \dots, X_{j_n} \in B_n).$$

Bezeichnet $\mathcal{H}(I)$ die Menge aller nicht-leeren, endlichen Teilmengen von I , so wird klar, warum $(P_J)_{J \in \mathcal{H}(I)}$ die **Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen** des Prozessen genannt wird.

Im Sinne der folgenden Definition ist diese Familie projektiv:

Besteht für eine Familie $(P_J)_{J \in \mathcal{H}(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf den Messräumen (E^J, \mathcal{B}^J) die Beziehung (A.1) für je zwei Mengen $J, H \in \mathcal{H}(I)$ mit $J \subset H$, so heißt die Familie $(P_J)_{J \in \mathcal{H}(I)}$ **projektiv**.

Bemerkung. Es genügt die Bedingung (A.1) nur für Mengen $J \subset H$ aus $\mathcal{H}(I)$ zu fordern, für welche $H \setminus J$ aus genau einem Element besteht. Besitzt nämlich $H \setminus J$ genau $n \geq 1$ Elemente, so existieren Mengen H_0, H_1, \dots, H_n derart, dass $H_0 = J \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = H$ gilt und jede der Mengen $H_i \setminus H_{i-1}$ einelementig ist. Dann folgt die Behauptung aus

$$\Phi_{H,J} = \Phi_{H_1, H_0} \circ \Phi_{H_2, H_1} \circ \dots \circ \Phi_{H_n, H_{n-1}}.$$

Entscheidend für die Konstruktion von stochastischen Prozessen ist nun die Frage, ob unter geeigneten Voraussetzungen an den Messraum (E, \mathcal{B}) und die Menge I jede projektive Familie $(P_J)_{J \in \mathcal{H}(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen die Familie der endlich-dimensionalen Verteilungen eines stochastischen Prozesses auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und mit Zustandsraum (E, \mathcal{B}) und Parametermenge I ist.

Diese Frage wird im folgenden Theorem und seinem Korollar in für uns ausreichender Allgemeinheit beantwortet. Als zusätzliche Bedingung wird E als polnischer Raum vorausgesetzt. Im folgenden bezeichnet \mathcal{B} stets die Borelsche σ -Algebra von E .

Theorem A.1 (Kolmogorov'scher Erweiterungssatz).

Ist E ein polnischer Raum und I eine beliebige nicht-leere Menge, so existiert zu jeder projektiven Familie $(P_J)_{J \in \mathcal{H}(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen über E genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_I auf (E^I, \mathcal{B}^I) mit

$$\Phi_J(P_I) = P_J \quad \text{für alle } J \in \mathcal{H}(I).$$

Man nennt P_I den **projektiven Limes** der Familie $(P_J)_{J \in \mathcal{H}(I)}$ und schreibt

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{H}(I)} P_J := \varprojlim P_J := P_I.$$

Korollar. *Ist E ein polnischer Raum und ist I eine beliebige nicht-leere Menge, so existiert zu jeder projektiven Familie $(P_J)_{J \in \mathcal{H}(I)}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen über E ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum E und Parametermenge I derart, dass $(P_J)_{J \in \mathcal{H}(I)}$ die Familie seiner endlich-dimensionalen Verteilungen ist.*

A.2 Reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten

In diesem Abschnitt sammeln wir einige nützliche Resultate zu regulären bedingten Wahrscheinlichkeiten im Zusammenhang mit bedingten Erwartungswerten. Die hier präsentierten Resultate sind unter anderem in [19, Kapitel 8] und [18, Kapitel 5] zu finden.

Sei im Folgenden stets $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ eine Unter- σ -Algebra und $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Eine Zufallsgröße $Y =: \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ heißt **bedingte Erwartung von X gegeben \mathcal{F}** , falls gilt:

- (i) Y ist \mathcal{F} -messbar.
- (ii) Für jedes $A \in \mathcal{F}$ gilt $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A X) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Y)$.

Für $B \in \mathcal{A}$ heißt $\mathbb{P}(B|\mathcal{F}) := \mathbb{E}(\mathbf{1}_B|\mathcal{F})$ die **bedingte Wahrscheinlichkeit von B gegeben \mathcal{F}** .

Theorem. $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$ existiert und ist fast sicher eindeutig.

Bemerkung. Die Abbildung

$$\mathcal{A} \ni A \longrightarrow \mathbb{P}(A|\mathcal{F})(\omega), \quad \omega \in \Omega \text{ fest,}$$

ist im allgemeinen – d.h. ohne weitere Voraussetzungen an die σ -Algebra \mathcal{A} – noch *kein Wahrscheinlichkeitsmaß* auf \mathcal{A} , da:

Für feste Mengen A, A_1, A_2, \dots in \mathcal{A} gilt zwar

- (i) $0 \leq \mathbb{P}(A|\mathcal{F}) \leq 1$,
- (ii) $\mathbb{P}(\Omega|\mathcal{F}) = 1$,
- (iii) $A_i, i \geq 1$ paarweise disjunkt: $\mathbb{P}(\bigcup_{i \geq 1} A_i|\mathcal{F}) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(A_i|\mathcal{F})$

fast sicher, die Nullmengen in (i) und (iii) hängen dabei aber jeweils von den betrachteten Mengen A, A_1, A_2, \dots ab und können im Allgemeinen nicht zu einer großen Nullmenge zusammengefasst werden, bezüglich der (i) - (iii) für eine beliebige Wahl von Mengen A, A_1, A_2, \dots in \mathcal{A} gültig wären. Hier schafft der Begriff einer *regulären Version* der bedingten Wahrscheinlichkeit oder bedingten Verteilung Abhilfe.

Sind $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume, so heißt $\kappa : \Omega_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, \infty]$ ein **σ -endlicher Übergangskern** (von Ω_1 nach Ω_2), falls

- (i) $\omega_1 \mapsto \kappa(\omega_1, A_2)$ ist \mathcal{A}_1 -messbar für alle $A_2 \in \mathcal{A}_2$,
- (ii) $A_2 \mapsto \kappa(\omega_1, A_2)$ ist ein σ -endliches Maß auf $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ für alle $\omega_1 \in \Omega_1$.

Ist das Maß in (ii) ein Wahrscheinlichkeitsmaß für alle $\omega_1 \in \Omega_1$, so heißt κ **stochastischer Kern** oder **Markovkern**.

Sei Y eine Zufallsgröße mit Werten in einem Messraum (E, \mathcal{E}) . Ein stochastischer Kern $\kappa_{Y, \mathcal{F}}$ von (Ω, \mathcal{A}) nach (E, \mathcal{E}) heißt **reguläre Version der bedingten Verteilung** von Y gegeben \mathcal{F} , falls

$$\kappa_{Y, \mathcal{F}}(\omega, B) = \mathbb{P}(\{Y \in B\}|\mathcal{F})(\omega)$$

für fast alle $\omega \in \Omega$ und für alle $B \in \mathcal{E}$.

Theorem. Ist $Y : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ reell-wertig, dann existiert eine reguläre Version $\kappa_{Y, \mathcal{F}}$ der bedingten Verteilung $\mathbb{P}(\{Y \in \cdot\} | \mathcal{F})$.

Das Ergebnis aus dem vorangegangenen Theorem lässt sich auf eine größere Klasse von Wertebereichen von Y ausdehnen.

Zwei Messräume (E, \mathcal{E}) und (E', \mathcal{E}') heißen **isomorph**, falls es eine bijektive Abbildung $\varphi : E \rightarrow E'$ gibt, sodass φ messbar ist bezüglich $\mathcal{E} - \mathcal{E}'$ und die Umkehrabbildung φ^{-1} messbar ist bezüglich $\mathcal{E}' - \mathcal{E}$. Wir nennen dann φ einen Messraum-Isomorphismus. Sind zudem μ und μ' Maße aus (E, \mathcal{E}) und (E', \mathcal{E}') und gilt $\mu' = \mu \circ \varphi^{-1}$, so ist φ ein Maßraum-Isomorphismus und die Maßräume (E, \mathcal{E}, μ) und (E', \mathcal{E}', μ') heißen **isomorph**.

Ein Messraum (E, \mathcal{E}) heißt **Borel'scher Raum**, falls es eine Borel'sche Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gibt, sodass (E, \mathcal{E}) und $(B, \mathcal{B}(B))$ isomorph sind.

Theorem. Ist E ein polnischer Raum mit Borel'scher σ -Algebra \mathcal{E} , dann ist (E, \mathcal{E}) ein Borel'scher Raum.

Theorem A.2. Sei Y eine Zufallsgröße mit Werten in einem Borel'schen Raum (E, \mathcal{E}) . Dann existiert eine reguläre Version $\kappa_{Y, \mathcal{F}}$ der bedingten Verteilung $\mathbb{P}(\{Y \in \cdot\} | \mathcal{F})$.

Theorem A.3. Sei X eine Zufallsgröße auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in einem Borel'schen Raum (E, \mathcal{E}) . Seien weiter $\kappa_{X, \mathcal{F}}$ eine reguläre Version der bedingten Verteilung von X gegeben \mathcal{F} und $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $\mathbb{E}(|f(X)|) < \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(f(X) | \mathcal{F})(\omega) = \int f(x) \kappa_{X, \mathcal{F}}(\omega, dx) \quad \text{fast sicher.}$$

Korollar. Sind X, Y Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit Werten in einem Borel'schen Raum (E, \mathcal{E}) , $\kappa_{Y, \mathcal{F}}$ eine reguläre Version der bedingten Verteilung von Y gegeben \mathcal{F} und $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ messbar mit $\mathbb{E}(|f(X, Y)|) < \infty$ und X ist messbar bezüglich \mathcal{F} , dann gilt

$$\mathbb{E}(f(X, Y) | \mathcal{F}) = \int f(X, y) \kappa_{Y, \mathcal{F}}(\cdot, dy)$$

fast sicher.

Sind zusätzlich Y und \mathcal{F} unabhängig, so gilt weiter

$$\mathbb{E}(f(X, Y) | \mathcal{F}) = \int f(X, y) \mathbb{P}(\{Y \in dy\})$$

fast sicher.

Literaturverzeichnis

- [1] D. J. Aldous and A. Bandyopadhyay. A survey of max-type recursive distributional equations. *Annals of Applied Probability*, 15(2):1047–1110, 2005.
- [2] G. Alsmeyer and M. Meiners. Fixed points of the smoothing transform: two-sided solutions. *Probab. Theory Relat. Fields*, 155:165–199, 2013.
- [3] G. Alsmeyer, J. Biggins, and M. Meiners. The functional equation of the smoothing transform. *The Annals of Probab.*, 40(5):2069–2105, 2010.
- [4] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter Lehrbuch, Berlin, 4 edition, 1991.
- [5] J. Biggins. Martingale convergence in the branching random walk. *J. Appl. Probab.*, 14(1):25–37, 1977.
- [6] J. Biggins and A. Kyprianou. Seneta-Heyde norming in the branching random walk. *Ann. Probab.*, 25(1):337–360, 1997.
- [7] J. Biggins and A. Kyprianou. Fixed points of the smoothing transform: the boundary case. *Electron. J. Probab.*, 10(17):609–631, 2005.
- [8] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 2nd edition, 1999.
- [9] A. Caliebe. Symmetric fixed points of a smoothing transformation. *Adv. Appl. Probab.*, 35(2):377–394, 2003.
- [10] A. Caliebe and U. Rösler. Fixed points with finite variance of a smoothing transformation. *Stoch. Process. Appl.*, 107(1):105–129, 2003.
- [11] R. Durrett and T. Liggett. Fixed points of the smoothing transformation. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 64(3):275–301, 1983.

- [12] R. Grübel and U. Rösler. Asymptotic distribution theory of hoare's selection algorithm. *Adv. Appl. Probab.*, 28:252–269, 1996.
- [13] S. Hallmann, U. Rösler, and M. Wnuk. All solutions of the stochastic fixed point equation of the quicksort process. *Advances in Applied Probability*, 50(A):131–140, 2018.
- [14] C. Hoare. Algorithm 64: Quicksort. *Communications of the Association for Computing Machinery*, 4:321, 1961.
- [15] C. Hoare. Algorithm 65: Find. *Communications of the Association for Computing Machinery*, 4:321–322, 1961.
- [16] C. Hoare. Quicksort. *Computer Journal*, 5:10–15, 1962.
- [17] A. Iksanov. Elementary fixed points of the BRW smoothing transforms with infinite number of summands. *Stoch. Process. Appl.*, 114(1):27–50, 2004.
- [18] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer, New York, 1997.
- [19] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer, Berlin Heidelberg, 2006.
- [20] D. Knof. *Struktur von Fixpunkten aus Prozessgleichungen*. PhD thesis, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2007.
- [21] D. Knof and U. Rösler. The analysis of find and versions of it. *Disc. Math. and Theor. Comp. Science*, 14:129–154, 2012.
- [22] A. E. Kyprianou. *Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2014.
- [23] R. Lyons. *A simple path to Biggins' martingale convergence for branching random walk*, volume 84 of IMA Vol. Math. Appl., pp. 217–221. Springer, New York, 1997.
- [24] C. Martínez. Partial quicksort. *Alcom-FT Technical report Series*, ALCOM-FT-RR-03-50, 2004.
- [25] M. Ragab and U. Rösler. The quicksort process. *Stoch. Proc. Appl.*, 124:1036–1054, 2014.
- [26] U. Rösler. A limit theorem for Quicksort. *RAIRO Inform. Théor. Appl.*, 25(1):85–100, 1991.

- [27] U. Rösler. A fixed point theorem for distributions. *Stoch. Proc. Appl.*, 42(2):195–214, 1992.
- [28] U. Rösler. Gewichteter Verzweigungsprozess. *Vorlesungsskript*, 2008.
- [29] U. Rösler. Almost sure convergence to the quicksort process. *Stoch. Proc. Appl.*, (accepted), 2018.
- [30] G. Samorodnitsky and M. S. Taqqu. *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman and Hall, New York, 1994.
- [31] K. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, volume 68 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [32] W. A. Woyczyński. On Marcinkiewicz-Zygmund laws of large numbers in Banach spaces and related rates of convergence. *Probab. Math. Statist.*, 1(2):117–131, 1980.

Abbildungsverzeichnis

1.1	$\mathbb{V}_{\leq 3}$ für $\mathbb{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{1, 2, 3\}^n$	25
1.2	Die ersten drei Generationen des binären Baums mit Kantengewichten	27
2.1	Auswahl der Knoten $v_i(t)$	39
2.2	Der zur Auswahl der $v_i(t)$ gehörige Baum	40
2.3	$S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \emptyset, S_3 = \{3, 4, 5\}$	42
2.4	Ausschnitt der Intervalle I_{j-1}, I_j und I_{j+1}	48

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit – abgesehen von der Beratung durch meinen Betreuer Herrn Prof. Dr. Uwe Rösler – nach Inhalt und Form eigenständig angefertigt habe. Dabei habe ich die Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der *Deutschen Forschungsgemeinschaft* eingehalten. Die Arbeit hat weder ganz noch in Teilen an einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen und ist weder ganz noch in Teilen veröffentlicht worden oder zur Veröffentlichung eingereicht. Weiter ist mir kein akademischer Grad entzogen worden.

Kiel, den 11.04.2019