

# Mean Reversion-orientiertes Swing Trading

Technische Finanzmarktanalyse zur Optimierung  
eines Martingal-Handelssystems

M.Sc. Vasco Grossmann

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der Ingenieurwissenschaften  
(Dr.-Ing.)  
der Technischen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel  
eingereicht im Jahr 2018

Kiel Computer Science Series (KCSS) 2019/2 dated 2018-12-13

URN:NBN urn:nbn:de:gbv:8:1-zs-00000352-a6

ISSN 2193-6781 (print version)

ISSN 2194-6639 (electronic version)

Electronic version, updates, errata available via <https://www.informatik.uni-kiel.de/kcss>

The author can be contacted via [info@vascogrossmann.de](mailto:info@vascogrossmann.de)

Published by the Department of Computer Science, Kiel University

Computer Engineering Group

Please cite as:

- ▷ Vasco Grossmann. *Mean Reversion-orientiertes Swing Trading* Number 2019/2 in Kiel Computer Science Series. Department of Computer Science, 2019. Dissertation, Faculty of Engineering, Kiel University.

```
@book{Grossmann19,  
  author   = {Vasco Grossmann},  
  title    = {Mean Reversion-orientiertes Swing Trading},  
  publisher = {Department of Computer Science, Kiel University},  
  year     = {2019},  
  number   = {2019/2},  
  doi      = {10.21941/kcss/2019/2},  
  series   = {Kiel Computer Science Series},  
  note     = {Dissertation, Faculty of Engineering,  
             Kiel University.}  
}
```

© 2019 by Vasco Grossmann

# About this Series

The Kiel Computer Science Series (KCSS) covers dissertations, habilitation theses, lecture notes, textbooks, surveys, collections, handbooks, etc. written at the Department of Computer Science at Kiel University. It was initiated in 2011 to support authors in the dissemination of their work in electronic and printed form, without restricting their rights to their work. The series provides a unified appearance and aims at high-quality typography. The KCSS is an open access series; all series titles are electronically available free of charge at the department's website. In addition, authors are encouraged to make printed copies available at a reasonable price, typically with a print-on-demand service.

Please visit <http://www.informatik.uni-kiel.de/kcss> for more information, for instructions how to publish in the KCSS, and for access to all existing publications.

1. Gutachter: Prof. Dr. Manfred Schimmler  
Christian-Albrechts-Universität  
Kiel
2. Gutachter: Prof. Dr. Malte Braack  
Christian-Albrechts-Universität  
Kiel

Datum der mündlichen Prüfung: 4. Dezember 2018



# Zusammenfassung

In dieser Dissertation wird ein Handelssystem beschrieben und evaluiert, welches rückläufige Tendenzen nach Überreaktionen in Finanzmärkten analysiert und ausnutzt. Hierfür werden Fehlbewertungen über ein neues Verfahren stochastisch modelliert, um den tatsächlichen Wert eines Finanzprodukts von irrationalen Kursbewegungen zu separieren – die Analyse von Realmarktdaten offenbart langfristige Gleichgewichtsniveaus, zu dessen Rückkehr untersuchte Kursprozesse tendieren. Verzögerte Wechselwirkungen zwischen unterschiedlichen Finanzprodukten helfen zusätzlich, Überreaktionen zu erkennen. Erkenntnisse der Martingal- und Portfoliotheorie werden bei der Definition des Handelssystems mit dem Ziel kombiniert, identifizierte Fehlbewertungen in gleichmäßige Gewinne zu überführen. Auf diese Weise wird ein nachhaltiger und sicherheitsorientierter Vermögensaufbau begünstigt.

Um möglichst präzise Aussagen über den Erfolg des Handelssystems treffen zu können, werden Simulationen auf künstlichen und realen Kursdaten untersucht. Ausgewählte Performance- und Risikomaße werden dabei einerseits modellbasiert ausgewertet, um den Einfluss einzelner Zeitreiheigenschaften akkurat bestimmen zu können. Andererseits werden Realmarktdaten genutzt, um einen unverfälschten Blick über den tatsächlichen Erfolg der theoretischen Überlegungen zu ermöglichen.

Für die Evaluation werden Finanzmarktdaten von Aktien, Rohstoffen und Wechselkursen im Bereich von 1968 bis 2018 untersucht. Die abschließende finanzwirtschaftliche Auswertung offenbart an einem umfassenden Beispiel, dass das Handelssystem in der Dekade von 2008 bis 2018 stetige Gewinne bei einem moderaten Risiko generiert hätte.



# Abstract

Mean-reversion is a fundamental term in finance market analysis that refers to the assumption of an equilibrium in asset prices that is superimposed with overreactions. This dissertation describes and evaluates a trading system that exploits mean-reverse price tendencies in finance markets. Under the assumption of mispricings, a stochastic model is developed to separate fair price levels from irrational price movements. Analysis results reveal long-term balances in the probed market data. Delayed interdependencies between asset classes are utilized to improve the identification of overreactions. Methods of the martingale and portfolio theory are combined to convert these mispricings into steady returns with the objective to depict a sustainable and security-oriented trading system.

Simulations on artificial and real quote data are combined to generate precise statements over the success of the trading system. On the one hand, performance and risk measures are evaluated in a model-based approach to quantify the influence of crucial time series properties. On the other hand, results on real market data allow unbiased performance and risk statements.

The evaluation is based on finance market data of stocks, resources and foreign exchanges in the period of 1968 and 2018. Next to an isolated analysis of trading results for single instruments, the performance of a portfolio of mixed asset classes is reviewed. A final evaluation from 2008 to 2018 depict steady returns over the whole decade. As a diversified asset composition smoothes equity requirements, the examined portfolio succeeds in a further risk reduction.



# Vorwort

Diese Dissertation ist während meiner Forschungstätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitsgruppe der Technischen Informatik am Institut für Informatik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel entstanden. Sie ist in nicht unwesentlichem Maße Produkt vieler hilfreicher Diskussionen, Anregungen, Hinweise und vielfältigster Unterstützung meines beruflichen und privaten Umfelds. Ohne an dieser Stelle jede Person namentlich nennen zu können, möchte diese Gelegenheit nutzen, um meine große Dankbarkeit auszudrücken.

Allen voran möchte ich Prof. Dr. Schimmler für seine Unterstützung danken. Seine Vorlesungen und Seminare während meines Studiums, sowie die spätere Zusammenarbeit in seiner Arbeitsgruppe machen ihn wohl zum wichtigsten Einfluss meiner akademischen Laufbahn. Neben seiner fachlichen Hilfestellung bin ich ihm insbesondere für seine konstruktive Denkweise und seinen souveränen Umgang mit Problemen dankbar, mit deren Hilfe er meinen wissenschaftlichen Blick stets auf die wichtigen Aspekte neuer Fragestellungen zu lenken wusste.

Ich möchte ebenfalls Prof. Dr. Malte Braack für die bereitwillige Übernahme des Korreferats danken.

Zudem möchte ich meinen aktuellen und früheren Kollegen danken – allen voran Dr. Christoph Starke, auf dessen Ideenreichtum und Blick für Details während der gesamten Promotionsdauer Verlass war. Dank gilt auch Sven Koschnicke, sowohl für seine fachliche und soziale Unterstützung als Bürokollege, wie auch die verlässliche Schokoladenversorgung zu Ostern und Weihnachten. Ebenso möchte ich Jan Christian Kässens und Lars Wienbrandt danken, die mich als ehemalige Promotionsstudenten und Mitstreiter mit sachbezogenen (und weniger sachbezogenen) Diskussionen stets zu motivieren wussten.

Mein besonderer Dank gilt Brigitte Scheidemann, der es nach kurzer Anfrage meinerseits stets mit absoluter Zuverlässigkeit gelang, jegliche Form administrativer Probleme von mir fern zu halten.

Zuletzt möchte ich meiner Familie – Elke, Jürgen und Nino – danken. Obgleich ich als einziges Familienmitglied nicht Mathematik studiert habe, ist meine Begeisterung für die Themen Mathematik und Informatik zweifellos auf mein Elternhaus zurückzuführen. Nicht nur meiner Familie, sondern auch meinen Freunden danke ich für die stetige Unterstützung und Motivation, aber auch für die manchmal notwendige Ablenkung, die in einigen Fällen ebenso neue Perspektiven eröffnete und so zweifelsohne zu wichtigen Ideen beitrug.

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einleitung und Grundlagen</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1	Motivation . . . . .	5
1.2	Wissenschaftliche Einordnung . . . . .	10
1.3	Aufbau dieser Arbeit . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Allgemeine Grundlagen</b>	<b>15</b>
2.1	Finanzmarktanalyse . . . . .	15
2.2	Markteffizienzhypothese . . . . .	16
2.3	Backtesting und Simulation . . . . .	18
2.4	Zeitreihen . . . . .	19
2.4.1	Grundlegende Definitionen . . . . .	20
2.4.2	Mean Reversion . . . . .	24
2.4.3	Mean Reversion-Rate . . . . .	25
2.4.4	Statistische Arbitrage . . . . .	29
2.5	Datengenerierende Prozesse . . . . .	31
2.5.1	Random Walk . . . . .	31
2.5.2	Geometrischer Random Walk . . . . .	32
2.5.3	Ornstein-Uhlenbeck-Prozess . . . . .	35
2.5.4	Variabler fairer Preis . . . . .	43
2.6	Finanzmarkthandel . . . . .	44
2.6.1	Definitionen . . . . .	45
2.7	Performance und Risiko . . . . .	47
2.8	Zusammenfassung . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Martingalsysteme in Finanzmärkten</b>	<b>55</b>
3.1	Wettssysteme über Entscheidungssequenzen . . . . .	56
3.2	Wissenschaftliche Einordnung . . . . .	58
3.3	Progression d’Alembert . . . . .	58
3.4	Swing-Strategie . . . . .	63

## Inhaltsverzeichnis

3.4.1	Definition . . . . .	63
3.5	Performance und Risiko . . . . .	65
3.5.1	Relative Differenz . . . . .	75
3.5.2	Wahl des 0-Preises $Q_0$ . . . . .	77
3.5.3	Variabler fairer Preis . . . . .	80
3.5.4	Fazit . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Univariate Mean Reversion</b>	<b>83</b>
4.1	Wissenschaftlicher Überblick . . . . .	83
4.2	Identifikation von Mean Reversion . . . . .	85
4.2.1	Spread-Bereinigung . . . . .	87
4.3	Ornstein-Uhlenbeck-Fitting . . . . .	89
4.3.1	Maximum-Likelihood-Schätzung . . . . .	89
4.3.2	Evaluation . . . . .	93
4.4	Varianzverhältnis . . . . .	98
4.5	Fitting des variablen fairen Preises . . . . .	101
4.6	Zusammenfassung . . . . .	105
<b>II</b>	<b>Anwendung in Finanzmärkten</b>	<b>107</b>
<b>5</b>	<b>Mean Reversion in Finanzmärkten</b>	<b>109</b>
5.1	Einleitung . . . . .	109
5.2	Devisen . . . . .	109
5.2.1	Euro / US-Dollar . . . . .	112
5.2.2	Variabler fairer Preis, konstanter 0-Preis $Q_0$ . . . . .	114
5.2.3	Variabler fairer Preis, variabler 0-Preis $Q_{0,t}$ . . . . .	120
5.2.4	Optimaler Parameter $\Delta$ . . . . .	125
5.3	Rohstoffe: Beispiel Silber . . . . .	126
5.3.1	Evaluation . . . . .	127
5.4	Fazit . . . . .	133
<b>6</b>	<b>Kointegration in Finanzmärkten</b>	<b>135</b>
6.1	Pairs Trading . . . . .	136
6.2	Kointegrierte Kombinationen . . . . .	137
6.2.1	Identifikation kointegrierter Portfolios . . . . .	137
6.2.2	Optimierungsverfahren . . . . .	138



6.3	Anwendung in Realmarktdaten . . . . .	144
6.3.1	Aktien: Beispiel DAX-Unternehmen . . . . .	145
6.3.2	Aktienindizes . . . . .	149
6.3.3	Fairer Preis . . . . .	151
6.3.4	Evaluation . . . . .	152
6.4	Futures . . . . .	156
6.4.1	Termstruktur von Termingeschäften . . . . .	159
6.5	Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts . . . . .	161
6.5.1	Entwicklung einer Auswahlstrategie . . . . .	162
6.5.2	Optimale Liquidation eines Portfolios . . . . .	164
6.5.3	Zusammensetzung der Handelskosten . . . . .	170
6.5.4	Spread-Analyse . . . . .	171
6.5.5	Prognose zukünftiger Handelskosten . . . . .	176
6.5.6	Informationen über das Handelssystem . . . . .	177
6.5.7	Minimierung der Liquidationskosten . . . . .	178
6.5.8	Zwischenbilanz . . . . .	181
6.6	Mean Reversion in der Termstruktur . . . . .	182
6.7	Evaluation . . . . .	184
6.8	Fazit . . . . .	189

**III Evaluation und Fazit 191**

**7 Evaluation 193**

7.1	Auswahl des Portfolios . . . . .	193
7.2	Auswertung des Portfolios . . . . .	197
7.2.1	Backtests . . . . .	197
7.2.2	Monte-Carlo-Simulation . . . . .	199

**8 Fazit und Ausblick 201**

**Literaturverzeichnis 205**



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Inflationsbereinigter Silberkurs von 1968 bis 2018 . . . . .	7
2.1	Beispiel eines stochastischen Prozesses mit linear steigender Varianz: Mean Reversion-Rate $\theta = 0$ . . . . .	26
2.2	Beispiel eines stochastischen Prozesses mit konstanter Vari- anz: Mean Reversion-Rate $\theta = 1$ . . . . .	27
2.3	Beispiel eines stochastischen Prozesses mit Mean Reversion- Rate $\theta = 0,1$ . . . . .	28
2.4	Realisationen von Random Walk-Prozessen . . . . .	33
2.5	Realisationen von geometrischen Random Walk-Prozessen .	34
2.6	Beispiel für einen Mean Reversion-Prozess . . . . .	36
2.7	Gegenüberstellung geometrischer Random Walks und geo- metrischer OU-Prozesse . . . . .	40
2.8	Varianzausgleich für Mean Reversion-Prozesse . . . . .	41
2.9	Verzögertes Gleichgewichtsniveau und variabler fairer Preis	43
3.1	Gewinn und Verlust der Progression d’Alembert . . . . .	62
3.2	Transaktionen der Swing-Strategie . . . . .	64
3.3	Beispielhafte Auswertung der Swing-Strategie . . . . .	67
3.4	Legende für Monte-Carlo-Simulation . . . . .	68
3.5	Ergebnis-Histogramme für $\theta = 0,0001$ . . . . .	74
3.6	Konstante und relative Preisdifferenz . . . . .	75
3.7	Binomialverteilung der Transaktionen . . . . .	77
4.1	Western Texas Oil im illiquiden Markt . . . . .	85
4.2	Western Texas Oil im liquiden Markt . . . . .	86
4.3	Spread-Bereinigung für Mean Reversion-Untersuchung . . .	88
4.4	Beispiel eines fairen Preises . . . . .	94
4.5	Approximation der Mean Reversion-Rate . . . . .	95
4.6	Approximation des fairen Preises . . . . .	96

## Abbildungsverzeichnis

4.7	Varianzverhältnisse in Abhängigkeit von $\theta$ . . . . .	99
4.8	Varianzverhältnisse für $\chi > 0$ . . . . .	100
4.9	Schätzung des fairen Preises mit unbegrenzter Fensterbreite	102
4.10	Schätzung des fairen Preises mit fester Fensterbreite . . . . .	104
4.11	Schätzung der Fensterbreite aus Varianzverhältnissen . . . . .	105
5.1	Euro / US-Dollar von 2005 bis 2017 . . . . .	112
5.2	Histogramme Swing-Strategie, Euro / US-Dollar . . . . .	115
5.3	Euro / US-Dollar von 1980 bis 2018 . . . . .	116
5.4	Varianzverhältnisse Euro / US-Dollar . . . . .	116
5.5	Fairer Preis für Euro / US-Dollar . . . . .	117
5.6	Histogramme Swing-Strategie, Euro / US-Dollar mit konstantem fairem Preis . . . . .	119
5.7	Histogramme Swing-Strategie, Euro / US-Dollar mit variablem fairem Preis . . . . .	122
5.8	$\Delta$ -Optimierung für Euro / US-Dollar . . . . .	125
5.9	Inflationsbereinigter Silberkurs mit fairem Preis . . . . .	126
5.10	Steigerungsfaktor für fairen Preis . . . . .	128
5.11	Silberpreis (schwarz) von 2008 bis 2018 mit 2,4-fachem fairem Preis (rot) . . . . .	129
5.12	Histogramme Swing-Strategie, Silber . . . . .	130
6.1	Optimalitätskriterien anhand zweier (skalenloser) Zeitreihen	135
6.2	Log-Kurse dreier deutscher Autokonzerne . . . . .	139
6.3	Verteilung von Varianzanteilen in der Gesamtvarianz $\text{Var}(X_t x)$ in Abhängigkeit von der Mean Reversion-Rate $\theta$ . . . . .	140
6.4	Gewichtete Kombination mit maximaler Mean Reversion-Rate	146
6.5	Mean Reversion-Raten für alle Viererkombinationen im DAX	147
6.6	Logarithmierte und normierte Performance-Kurse vierer nationaler Aktienindizes zwischen 2001 und 2008 . . . . .	149
6.7	Kombination aus vier Aktienindizes: Mean Reversion-Raten	151
6.8	Logarithmierte und normierte Performance-Kurse vierer nationaler Aktienindizes zwischen 2008 und 2018 . . . . .	151
6.9	Ask-Kurse verschiedener Mini-Future-Kontrakte für WTI .	158
6.10	Partielle Termstruktur des WTI-Mini-Futures . . . . .	160

6.11	Optimaler Liquidationspfad (rot) nach dynamischer Programmierung für $\mathcal{L}(3, t_0, t_6)$ . . . . .	168
6.12	Verhältnis von Spread zu Kurs für WTI-Kontrakte . . . . .	171
6.13	Ask- und Bid-Kurse zweier WTI Mini-Futures . . . . .	173
6.14	Spread-bereinigter Kurs für zwei WTI Mini-Futures . . . . .	175
6.15	Durschnittliche Handelskosten im Bezug zum Auslaufdatum	177
6.16	Handelskostenschätzung für zukünftige Transaktionen eines Kontrakts . . . . .	180
6.17	Analysestationen der Auswahlstrategie . . . . .	181
6.18	Portfolioentwicklung für verschiedene Auswahlstrategien .	185
8.1	Euro / US-Dollar: Varianzverhältnisse von 1980 bis 2018 (real und simuliert) . . . . .	203



# Tabellenverzeichnis

3.1	Überblick von Performance und Risiko für $\theta = 0$ und $\Delta = 1$	71
3.2	Überblick von Performance und Risiko für $\theta = 0,0001$ und $\Delta = 1$	73
3.3	Vergleich von Performance und Risiko für $\Delta = 1$ und $\Delta^{\%} = 1\%$	76
3.4	Vergleich von Performance und Risiko für abweichende Parameter $X_0, \mu$ und $Q_0$ nach einem Jahr	78
3.5	Effekt der variablen Anpassung des 0-Preises $Q_{0,t}$ im Fall eines fairen Preises $\mu_t$	81
4.1	Fehler in der Schätzung der Mean Reversion-Rate	97
4.2	Fehler in der Schätzung des fairen Preises	97
4.3	Abweichung des geschätzten und tatsächlichen fairen Preises	103
5.1	Histogramme Swing-Strategie, Euro / US-Dollar	113
5.2	Histogramme Swing-Strategie, Euro / US-Dollar mit konstantem 0-Preis	118
5.3	Histogramme Swing-Strategie, Euro / US-Dollar mit variablem 0-Preis	121
5.4	Monte-Carlo-Simulation für Euro / US-Dollar	124
5.5	Backtestergebnisse Silber, 2,4-facher fairer Preis	131
5.6	Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation für Silber	134
6.1	Durchschnittliche Mean Reversion-Raten während Kalibrierungs- und Evaluationszeitraum	148
6.2	Swing-Parameter für Aktienindizes	152
6.3	Backtests: Performance und Risiko der Swing-Strategie für CAC 40, DAX 30, S&P 500 und Nikkei 225	153
6.4	Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation für vier kointegrierte Aktienindizes	155

## Tabellenverzeichnis

6.5	Swing-Parameter für Aktienindizes . . . . .	163
6.6	Erwartete Kosten für sechs zukünftige Zeitpunkte . . . . .	167
6.7	Kostenvergleich verschiedener Auswahlstrategien . . . . .	187
7.1	Swing-Parameter für Aktienindizes . . . . .	197
7.2	Backtestergebnisse: Performance und Risiko der Swing- Strategie für ein Portfolio aus neun Assets . . . . .	198
7.3	Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation für ein Portfolio aus neun Assets . . . . .	200







**Teil I**

# **Einleitung und Grundlagen**



# Einleitung

## 1.1 Motivation

Wirtschafts- und Finanzsysteme befinden sich im steten Wandel. Natürliche, ökonomische Integrationsprozesse, wie die Entstehung und Vernetzung von Märkten, haben hierauf ebenso wie geopolitische oder technologische Veränderungen großen Einfluss. Selten waren Änderungen dabei so weitreichend wie im letzten Jahrhundert. Neben Weltkriegen und Weltwirtschaftskrisen haben insbesondere die unter dem Oberbegriff Globalisierung zusammengefassten Abläufe neue Voraussetzungen im Finanz- und Wirtschaftswesen geschaffen. Die globale Annäherung führte zu einem liquiden und effizienten Weltmarkt mit großem Warenangebot, der bis heute den Nährboden für die Entwicklung spezialisierter Wirtschaftszweige mit internationalen Produktionsketten bietet. Zweifelsohne lässt sich die anhaltend gestiegene internationale Wirtschaftsleistung auf diesen Wachstumsmotor zurückführen. Die fortwährende Vernetzung birgt jedoch auch die Gefahr steigender Abhängigkeiten. Die Auswirkungen auf die Stabilität des globalen Wirtschafts- und Finanzwesens werden daher zunehmend als kritisch eingestuft [MS96].

Die wachsende Fragilität ist dabei nicht nur in einer steigenden Anzahl internationaler Finanzkrisen in den letzten Jahrzehnten ablesbar, es zeigt sich auch generell eine stetig zunehmende Volatilität seit den 1970er Jahren. Der Aktienindex Standard & Poor's 500 beschreibt die Wertentwicklung der 500 größten börsennotierten US-amerikanischen Unternehmen. Durch seinen Umfang wird er häufig als die realistischste Projektion der amerikanischen Wirtschaft aufgefasst. Dieser Ruf machte ihn zu einem der meistbeachteten Aktienindizes weltweit. Während seine tägliche Kursänderung im Jahre 1990 in ungefähr 20 Prozent der Fälle den Wert von einem

## 1. Einleitung

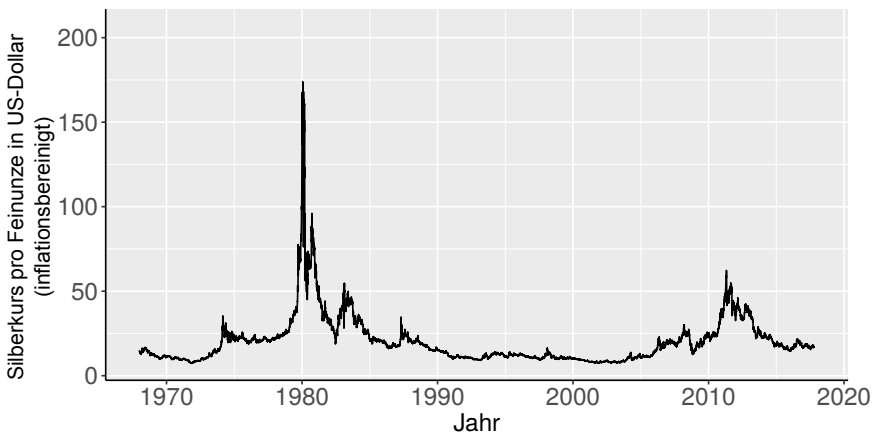
Prozent überstieg, waren es im Jahr 2010 etwa 30 Prozent. Untersuchungen von G. William Schwert über die Volatilität amerikanischer Wertpapiere im Zeitraum von 1859 bis 1989 bestätigen diese Tendenz langfristig [Sch90]. Ähnliche Entwicklungen zeigen sich über alle Anlageklassen.

Die steigende Volatilität wird mitunter auf die wachsende Geschwindigkeit zurückgeführt, mit der sich Informationen über den Globus verbreiten. Der Transfer, der früher erst nach Stunden oder gar Tagen abgeschlossen war, erfolgt heute in Sekunden. Ereignisse mit weltwirtschaftlicher Relevanz, wie zum Beispiel Notenbanksitzungen, werden unmittelbar verfolgt – jede Äußerung kann direkte Marktreaktionen nach sich ziehen. Hinzu kommt die Automatisierung des Wertpapierhandels, insbesondere im Bereich Hochfrequenzhandel [Bro10]. Ereignisse wie der Flash Crash am 6. Mai 2010, bei dem der Dow Jones Index durch einen Programmfehler innerhalb weniger Minuten zunächst bis zu neun Prozent verlor und dann zurückgewann, zeigen eindrucksvoll, welche unvorhersehbaren Auswirkungen durch die Automatisierung entstehen können.

Das konkrete Beispiel des Flash Crashes offenbart dabei gleich zwei interessante Aspekte. Zum einen ist es ein eindrucksvolles Beispiel dafür, dass Marktbewegungen nicht immer rational gesteuert sind. Zum anderen verdeutlicht die schnelle Erholung des Kurses das ökonomische Prinzip, nach dessen Grundsatz sich das wirtschaftliche Handeln aller Marktteilnehmer zweckrational an der Nutzenmaximierung ausrichtet [SW12]. Die Entzweiung von Preis und wirtschaftlichem Wert ist unter dieser Prämisse langfristig unmöglich, da Angebot und Nachfrage stets zur Regulierung beitragen. Es erscheint daher nicht überraschend, dass der rein irrationalen Kursbewegung des Flash Crashes eine markttechnische Gegenreaktion nach sich zog.

Vermutete man nun in Folge dieses Beispiels, dass Fehlbewertungen und Übertreibungen natürliche Begleiterscheinungen der Kursfindung sind, so motivierte dies die kapitalmarkttheoretische Vorstellung des *Mean Reversion-Effekts*, nach dessen Prinzip Preisentwicklungen generell zu einer Annäherung an einen gleitenden Durchschnittswert tendieren. Er ist dabei auf keine spezielle Periodendauer begrenzt – er wird genutzt, um sowohl kurzfristige Überreaktionen, als auch langfristige, zyklisch verlaufende Marktphasen zu beschreiben.

## 1.1. Motivation



**Abbildung 1.1.** Inflationbereinigter Silberkurs von 1968 bis 2018 [Mac]

Der Mean Reversion-Effekt wurde erstmals von Lo und MacKinlay im Jahr 1988 nachgewiesen und seitdem in zahlreichen Studien empirisch belegt und für unterschiedlichste Anlagekategorien nach formalen Kriterien untersucht [LM88; CD93]. Zwar ist seine Existenz bis heute umstritten, dennoch ergeben sich selbst bei oberflächlicher Analyse verschiedener Realmarktdaten zahlreiche Verdachtsmomente. So zeigt der in Abbildung 1.1 dargestellte inflationbereinigte Silberkurs von 1968 bis 2018 beispielsweise Charakteristiken, die man als typische Anzeichen des Mean Reversion-Effekts deuten kann.

Bei der Betrachtung fällt unweigerlich die als Silber-Manie bekannte Spekulationsblase der frühen 1980er Jahre ins Auge. Zwar wird diese kurzfristige Verzehnfachung einer massiven Marktmanipulation durch wenige Akteure zugeschrieben, das Ereignis zeigt aber gleichwohl eindrucksvoll, dass irrationale Marktphasen zu extremen Ausschlägen führen können, die mitunter viele Jahre anhalten.

Ungeachtet dieser Entwicklungen zeigt sich, dass der Kurs in ruhigeren Marktphasen auf etwa 15 bis 20 US-Dollar absinkt. So liegt der Preis in etwa der Hälfte des untersuchten Zeitraums in diesem Intervall – trotz der

## 1. Einleitung

zeitlichen Differenz von 50 Jahren unterscheiden sich die inflationsbereinigten Silberkurse von 1968 und 2018 kaum.

Ein möglicher Erklärungsversuch für diese Gesamtentwicklung ist, dass Silber in seiner Doppelrolle als Industriemetall und Vermögensanlage zwar für spekulative Blasen anfällig ist, fallende Preise aber an einen unteren Widerstand stoßen, der sich durch den wirtschaftlichen Wert des Edelmetalls ergibt. In diesen Sinne wäre bei einem erneuten Anstieg vermutlich auch in Zukunft langfristig eine Rückkehr in diesen Bereich zu erwarten.

Folgt man dieser Logik, lässt sich das bisher skizzierte Szenario anschaulich in zwei Eigenschaften zusammenfassen:

- ▷ Kurse können zwar mittelfristig starken irrationalen Bewegungen unterliegen, langfristig ist aber die Rückkehr in ein gewissen Kursbereich wahrscheinlich.
- ▷ Kurse unterliegen heute mehr als jemals zuvor einer hohen Volatilität. Tägliche Schwankungen von mehr als einem Prozent sind daher nicht unüblich.

Mit dieser Ausgangssituation konfrontiert, stellte sich zu Beginn dieser Dissertation die einfache Frage, wie die hohe kurzfristige Volatilität mit vergleichsweise schwankungsarmen langfristigen Kursbewegungen vereinbar sein kann. Diese im Grunde gegensätzlichen Umstände ließen eigentlich nur den Schluss zu, dass sich ein Teil der Schwankungen zwangsläufig auf systematisch erkennbare Über- und Unterreaktionen zurückführen lassen. Es ergab sich daher eine direkte Folgefrage:

**Muss ein einfaches Handelssystem, welches stets auf den Ausgleich kurzfristiger Bewegungen setzt, nicht zwangsläufig auf lange Sicht erfolgreich sein?**

Zwar erschien die Vorstellung systematischer Fehlbewertungen in einem so aktiv erforschten Bereich wie dem Finanzmarkt äußerst unwahrscheinlich. Da diese Zweifel durch erste Analysen aber auch nicht direkt ausgeräumt werden konnten, entwickelte sich die Beantwortung dieser Frage zur Kernaufgabe dieser Dissertation.

Das zentrale Thema dieser Arbeit ist daher die Definition und Evaluierung eines Handelssystems, welches marktneutral ist, also nur durch



Unter- oder Überreaktionen, nicht aber von generell steigenden oder fallenden Märkten profitiert. Da diese spekulative Ausnutzung von Kurschwankungen unter dem Begriff *Swing-Trading* zusammengefasst wird, wird das vorgestellte System *Swing-Strategie* genannt. Zwar wird dabei natürlich ein lukratives System angestrebt, aber auch aus einem Scheitern dieses Vorhabens ließen sich interessante Schlüsse ziehen. So ergeben sich je nach Erfolg oder Misserfolg eines marktneutralen Handelssystems zwei gegensätzliche Thesen, die in ihrer Konsequenz unterschiedliche Schlussfolgerungen über die Entwicklung der globalen Märkte erlauben.

Sollte es nicht gelingen, ein erfolgreiches marktneutrales System zu beschreiben, so ließe sich die These aufstellen, dass Märkte effizient sind, also keine Fehlbewertungen existieren. Wäre zu jedem Zeitpunkt jegliche marktverfügbare Information in richtigem Maß bewertet und eingepreist, so zeigte die gestiegene Volatilität eindrucksvoll, dass Unternehmen deutlich stärker als noch vor wenigen Jahrzehnten kurzfristigen und unvorhersehbaren Risiken ausgeliefert sind. Marktrisiken für Unternehmen wären, abgebildet durch ihren Börsenwert, größer als jemals zuvor. Im Kontext der steigenden Zahl internationaler Krisen und zahlreicher wirtschaftlicher und globaler Umbrüche ist diese Überlegung durchaus gerechtfertigt.

Wäre die gestiegene Volatilität wiederum in einem Handelssystem ausnutzbar, so ließe sich die gegensätzliche These aufstellen, dass die allgemeinen Risiken für Unternehmen nicht oder nur in geringen Maße gestiegen sind. Wäre dem so, folgte im Umkehrschluss, dass die höhere Volatilität auch auf eine steigende Zahl von Fehlbewertungen zurückzuführen ist. So ließe sich vermuten, dass durch immer schnelleren Informationsfluss und sekundenschnellen Handel auch markttechnische Überreaktionen entstehen. Im Kontext immer komplexerer, schwer zu bewertender Zusammenhänge an den internationalen Weltmärkten erscheint auch diese Einschätzung nicht unbegründet.

Die Evaluationsergebnisse des in dieser Dissertation vorgestellten Handelssystems ermöglichen es, sich im Gefüge dieser Thesen zu positionieren. Für ein eindeutiges Ergebnis wurden umfassende Simulationen über mehrere Bereiche des Finanzmarkts ausgeführt. Hierfür wurden verschiedene Datensätze von Wechselkursen, Rohstoffen und Aktien von 1968 bis 2018 verwendet.

## 1. Einleitung

Obwohl unter der Annahme korrekter Einpreisungen jeglicher Information im Markt langfristig keine positive Rendite möglich ist, zeigen Langzeitauswertungen der vorgestellten Handelsstrategie signifikante und stetige Gewinne in unterschiedlichen Bereichen des Finanzmarkts. Da hierfür wiederholte Fehlbepreisungen notwendig sind, kann die These eines effizienten Markts nicht bestätigt werden. Die Ergebnisse zeigen, dass Fehlbewertungen in Finanzmärkten systematisch feststellbar sind.

## 1.2 Wissenschaftliche Einordnung

Natürlich ist die Frage, ob durch systematischen Handel Gewinne über dem Marktdurchschnitt erzielt werden können, nicht neu. So publizierte Charles Dow bereits im Jahr 1884 Methoden der Chartanalyse, mit denen zukünftige Aktienkurse vorhersagbarer werden sollten. Es folgten bis heute zahlreiche Veröffentlichungen weiterer Analyseverfahren und Handelssysteme. Trotz dieser detaillierten Auseinandersetzung ist die Finanzmarktanalyse nach wie vor ein aktiver Forschungsbereich – und dies aus gutem Grund: die Vorstellung, dass man der Problematik jemals mit einer abschließenden Lösung entgegen und Kurse exakt prognostizieren könnte, ist in sich widersprüchlich. Würden Wertpapierkurse einem deterministischen Muster folgen, so würde dieses nämlich nach und nach von einer steigenden Anzahl an Marktteilnehmern erkannt und ausgenutzt. Gerade das kann aber langfristig nicht sein, denn spekulativer Wertpapierhandel ist von der durchschnittlichen Wertsteigerung des Markts abgesehen ein Nullsummenspiel. Jede überdurchschnittliche Rendite in Bezug zum Gesamtmarkt erfordert die unterdurchschnittliche Rendite eines anderen Marktteilnehmers. Jedes konstante Muster braucht einen Akteur, welcher diese Systematik bereitwillig generiert. Jede Reaktion auf eine erkannte Systematik führt wiederum aktiv zu deren Auslöschung. Der auf den Bereich der Quantenphysik bezogene Ausspruch Heisenbergs "Was man erforscht, verändert man auch." lässt sich daher ebenso treffend auf den Forschungsbereich der Finanzmarktanalyse anwenden und fasst diese besondere Herausforderung treffend zusammen. Da funktionierende Handelsstrategien aus diesem Grund stets eine endliche Lebensdauer

## 1.2. Wissenschaftliche Einordnung

haben, hat die Suche nach prognostizierbaren Mustern am Finanzmarkt bis heute nichts an Aktualität eingebüßt.

Die Finanzmarktanalyse hat sich daher zu einem umfassenden und weit gefächerten Forschungsfeld mit diversen Bereichen entwickelt, die im nächsten Kapitel genauer eingeordnet werden. Gerade durch die technische Revolution der letzten Jahrzehnte stehen immer neue analytische Möglichkeiten offen. Neben neueren Strömungen wie neuronalen Netzwerken oder agentenbasierter Modellierung profitieren auch klassische Verfahren von technischen Neuerungen, die immer detailliertere Analysen immer größerer Datensätze ermöglichen. Auch im Kontext dieser Arbeit ist diese Entwicklung sehr förderlich. So gelang es in den letzten Jahren immer wieder, den Mean Reversion-Effekt in verschiedenen Bereichen des Finanzmarkts nachzuweisen ([CK11; AG11; LL16]) und in Handelsstrategien auszunutzen ([LL15; ZZ08]).

An dieser Entwicklung knüpft diese Dissertation an. Das neu entwickelte Handelssystem hat das Ziel, durch stetigen Handel gleichermaßen von kurz- wie langfristigen Fehlbewertungen zu profitieren, durch Marktneutralität, Diversifikation und umfangreiche Simulation dabei gleichzeitig Risiken zu minimieren. Um diesem Anspruch gerecht zu werden, wurden bestehende stochastische Modelle für die Simulation von Kurszeitreihen so erweitert, dass nicht nur Fehlbewertungen selbst, sondern auch ihre Wechselwirkungen mit dem tatsächlichen Kurs berücksichtigt werden. Es ist davon auszugehen, dass diese Neuerung, also die Integration eines variablen Gleichgewichtsniveaus, tatsächlich zu realistischeren Simulationsergebnissen führt, da sich ihre Einbeziehung in den untersuchten Zeiträumen zu deutlichen Gewinnsteigerungen und verbesserten Risikoparametern äußert.

Diese Dissertation, die im Bereich der technischen Informatik entstanden ist, nutzt moderne Grafikprozessoren für komplexere Simulationen und Analysen. Genauere Informationen zu Implementierungsdetails finden sich in vorhergehenden Veröffentlichungen [GS17; GS16]. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Vorstellung der neu entwickelten Verfahren und ihren Evaluationsergebnissen in Simulation und Realmarktanwendung.

## 1. Einleitung

### 1.3 Aufbau dieser Arbeit

Diese Arbeit unterteilt sich in acht Kapitel. Nach dieser Einleitung wird im zweiten Kapitel auf verschiedene theoretische Grundlagen eingegangen, die für das Verständnis der Forschungsergebnisse notwendig sind. So werden typische Eigenschaften von Finanzmarktzeitreihen untersucht und Modelle vorgestellt, die diese in stochastische Prozesse überführen. Im Vordergrund steht dabei die realistische Abbildung von Effekten, die durch Über- und Unterbewertungen entstehen. Ebenso findet eine Auseinandersetzung mit Modellen statt, die die Beschreibung und Bewertung von Handelssystemen ermöglichen.

Im dritten Kapitel wird ein Handelssystem definiert, welches aus hoher Volatilität sowie dem Mean Reversion-Effekt profitiert. Damit einschätzbar ist, inwiefern aus Fehlbewertungen in Kurszeitreihen Gewinne erzielt werden können, wird die Performance auf Basis künstlicher Datensätze ausgewertet. Künstliche Daten ermöglichen eine genauere Analyse des Einflusses von Fehlbewertungen, da diese im Gegensatz zu Realdaten exakt messbar sind. Es können so genaue Zielvorgaben an Kurszeitreihen gerichtet werden, um gegebene Performance- und Risikokriterien einzuhalten. Es zeigt sich, dass das beschriebene Handelssystem Gewinne ausschließlich durch Fehlbewertungen generiert. Langfristige Profite im Realmarkt sind damit nur durch einen kontinuierlichen Mean Reversion-Effekt möglich.

Je präziser Fehlbewertungen erkannt werden, desto erfolgreicher ist das Handelssystem im Mittel. Diese im dritten Kapitel erlangte Erkenntnis wird im vierten Kapitel genutzt, um das vorgestellte Handelssystem zu optimieren. Da die Rendite durch Kenntnis der Parameter für die Generierung der künstlichen Zeitreihen gesteigert werden kann, werden Verfahren vorgestellt, die Modellparameter aus Realmarktdaten schätzen. Bereits im dritten Kapitel wird gezeigt, dass deren Einbeziehung Performance- und Risikoparameter verbessert. Träfen die Modellannahmen also auch für reale Finanzmarktzeitreihen zu, so wäre eine signifikante Performancesteigerung der Handelsstrategie zu erwarten.

Die zu diesem Zeitpunkt rein theoretischen Überlegungen basieren auf der Hypothese, dass sich gewonnene Erkenntnisse auf Realmärkte übertragen lassen. Da deren Aussagekraft komplett von dieser Annahme abhängt, werden theoretische Ergebnisse in den folgenden Kapiteln

### 1.3. Aufbau dieser Arbeit

mit Realdaten verbunden. Dabei werden Modell- und Realauswertungen mehrfach kombiniert, um die Vorteile beider Ansätze zu vereinen. So ergeben sich einerseits möglichst allgemeingültige Aussagen, die andererseits möglichst konkret belegt werden. Im fünften Kapitel wird daher analysiert, welche Performance das beschriebene Handelssystem auf Realmarktdaten bietet. Eine detaillierte Untersuchung der Handelsstrategie auf dem Wechselkursverhältnis Euro zu US-Dollar zeigt, dass positive Renditen langfristigt möglich sind. Die Einbeziehung geschätzter Modellparameter für das Wechselkursverhältnis führt zudem zu einer deutlichen Verbesserung von sowohl Performance- als auch Risikoparametern. Die Ergebnisse bestätigen die Vermutung, dass Fehlbewertungen nicht nur existieren, sondern auch geschätzt und in einer Handelsstrategie ausgenutzt werden können. In einem zweiten Beispiel wird das Handelssystem für den gerade schon gezeigten Silberkurs genauer analysiert und einige inflationsbedingte Anpassungen vorgenommen.

Im sechsten Kapitel werden Verfahren vorgestellt, die Fehlbewertungen auf Mengen unterschiedlicher Anlageinstrumente analysieren. Es wird also nach komplexen Zusammenhängen zwischen den 30 im deutschen Aktienindex DAX gelisteten Aktienkursen wie auch zwischen internationalen Aktienindizes gesucht, deren Ausnutzung weitere Einsatzmöglichkeiten des vorgestellten Handelssystems eröffnen.

Außerdem werden Termingeschäfte für unterschiedliche Rohstoffe untersucht. Diese bieten die zusätzliche Herausforderung auslaufender Kontrakte. Es wird gezeigt, dass auch im Gefüge unterschiedlicher Terminkontrakte Fehlbewertungen existieren. Sowohl für Silber, Öl und Gas wird nachgewiesen, dass die Rendite durch die richtige Wahl des Kontrakts gesteigert werden kann. Hierfür werden drei unterschiedliche Auswahlstrategien verglichen.

Im siebten Kapitel erfolgt abschließend eine Evaluation der Handelsstrategie über den Zeitraum von 2008 bis 2018, die die bisherigen Teilauswertungen für Wechselkurse, Rohstoffe und Aktienindizes vereint.

Es zeigt sich, dass Performance- und Risikomaße im Sinne der Portfoliotheorie durch kombinierte Verwendung des Handelssystems auf unterschiedlichen Finanzprodukten verbessert werden können.

Abschließend werden die Ergebnisse im letzten Kapitel zusammengefasst und die Erkenntnisse für eine Bewertung der Volatilität am Finanz-

## 1. Einleitung

markt verwendet. Die These eines effizienten Markts wird widerlegt, da in verschiedenen Bereichen des Finanzmarkts deutliche Anzeichen für Fehlbewertungen gefunden wurden.

# Allgemeine Grundlagen

## 2.1 Finanzmarktanalyse

Unter dem Begriff Finanzmarktanalyse werden Methoden der Aufbereitung von Informationen zusammengefasst, die eine Beurteilung verschiedener Anlagemöglichkeiten hinsichtlich gegebener Kriterien wie beispielsweise der Selektion eines profitablen Investments, ermöglichen. Generell wird zwischen Verfahren der *Fundamentalanalyse* und der *technischen Analyse* unterschieden.

Bei der Fundamentalanalyse wird der Wert eines Unternehmens oder Wertpapiers auf Grund ökonomischer Bewertungsmaßstäbe ermittelt, die aus dem gesamtwirtschaftlichen oder unternehmerischen Umfeld stammen. Es wird angenommen, dass der Marktwert eines Unternehmens nicht dem nach objektiven Kriterien angebrachten Wert entsprechen muss, langfristig aber in seine Richtung strebt. Durch die Analyse von betriebswirtschaftlichen Daten, möglichen Chancen und Risiken und der ökonomischen Positionierung im Markt wird ein angemessener Wert geschätzt und so ein Kursziel prognostiziert. Die Fundamentalanalyse basiert also auf der Identifikation von Unter- oder Überbewertungen von Unternehmen am Finanzmarkt. Da die anvisierten Kursziele im Allgemeinen nur über einen längeren Zeitraum erreichbar sind, ist die Fundamentalanalyse vor allem für langfristig agierende Investoren geeignet.

Die technische Finanzmarktanalyse umfasst Methoden, die zukünftige Kursentwicklungen durch die Analyse historischer Kurse vorhersagen. Sie gründet auf der Annahme, dass sich in Kursbewegungen Muster erkennen lassen, die sich in ähnlicher Weise in der Zukunft wiederholen. Eine theoretische Begründung für diese Hypothese liegt in dem berechenbaren menschlichen Verhalten. Das Teilgebiet der markttechnischen Analyse

## 2. Allgemeine Grundlagen

befasst sich gesondert mit der Erklärung der Kursverläufe durch die Handlungsweise unterschiedlich ausgerichteter Marktteilnehmer. Der Bereich Chartanalyse basiert zudem auf der Annahme, dass alle entscheidungsrelevanten Informationen bereits im Kurs enthalten sind. Diese Aussage bezieht sich auf Fundamentaldaten ebenso wie auf politische oder auch psychologische Faktoren. Da sich alle Einflüsse aus dem Kurs ablesen lassen, ist deren Kenntnis für den technischen Analysten irrelevant. Nach seinem Verständnis reagiert er auf jeden dieser Faktoren bereits durch die Untersuchung der Kursverläufe an den Märkten.

Kumar und Murphy bieten detaillierte Überblicke über Methoden der fundamentalen und technischen Analyse [KM15; Mur99].

### 2.2 Markteffizienzhypothese

Wie schon in der Einleitung skizziert, ist die Vorstellung, dass mit Mitteln der Finanzmarktanalyse Kursbewegungen exakt vorhergesagt und diese Erkenntnisse in Handelsstrategien umgesetzt werden können, in sich widersprüchlich. So müssen ausnutzbare Systematiken für eine Gewinnsteigerung durch andere Marktteilnehmer erzeugt werden, für die wiederum ein Verlust entsteht.

Durch diese besondere Problematik muss man sich mit der Frage konfrontiert sehen, ob es überhaupt Handelsstrategien geben kann, deren Gewinnsteigerung langfristig der durchschnittlichen Marktentwicklung überlegen sind. Durch die sekundenschnelle globale Verbreitung von Informationen reagieren Aktienkurse direkt auf Neuigkeiten und reflektieren Risiko und Chancen jeder Anlage nach aktuellem Kenntnisstand. Sind jegliche Informationen zu jedem Zeitpunkt in richtigem Maße bewertet und eingepreist, spricht man in der Volkswirtschaftslehre von einem effizienten Markt. Abhängig von der Definition dieses Begriffs lassen sich direkte Aussagen bezüglich der Chancen spekulativen Handels ableiten. Der Begründer der Markteffizienztheorie Eugene Fama klassifizierte im Jahr 1970 drei Subhypothesen [Fam70]:

- ▷ Schwache Markteffizienz ist gegeben, wenn aus vergangenen Kursverläufen keine Informationen über zukünftige Entwicklungen getroffen



## 2.2. Markteffizienzhypothese

werden können. Kurszeitreihen sind in solchen Märkten somit zumindest bezüglich aller Eigenschaften, die eine Kursprognose erlauben, gedächtnislos. Kein Verfahren aus dem Bereich der technischen Analyse kann damit eine bessere Kursprognose abgeben als den aktuellen Wert.

- ▷ Mittelstarke Markteffizienz ergänzt die schwache Markteffizienz um die Vorstellung, dass jegliche marktrelevante, öffentliche Information in Kursverläufe eingepreist ist. Neben Verfahren technischer Analyse können somit auch Verfahren der Fundamentalanalyse nicht geeignet sein, um eine langfristige überdurchschnittliche Rendite am Markt zu erzielen.
- ▷ Starke Markteffizienz ist dann gegeben, wenn selbst jegliche Art von Insider-Information eingepreist sind. Auch Insider-Handel kann in stark effizienten Märkten damit nicht zu einer überdurchschnittlichen Rendite führen.

Im wissenschaftlichen Umfeld herrscht eine weitgehende Einigkeit, dass eine starke Effizienz in realen Märkten nicht erreicht wird. Die Veröffentlichung marktrelevanter Information zieht regelmäßig signifikante Kursveränderungen nach sich, so dass sie offensichtlich nicht schon vorher vollständig eingepreist waren. Empirische Untersuchungen mittelstarker Markteffizienz führen tendenziell zu einer Bestätigung, werden aber auf Grund ihrer Methodik häufig skeptisch hinterfragt [Heu07]. Auch für die schwache Markteffizienz wurden unterschiedliche Testverfahren entwickelt ([PS88], [ERS92]). Bis heute wird im Bereich des Finanzwesens intensiv über die Gültigkeit der Markteffizienzhypothesen diskutiert. So werden verschiedenste Finanzmärkte bis heute auf Effizienz untersucht ([KV13], [AAS+16]).

Da die in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren auf technischer Finanzmarktanalyse basieren, liegt die Analyse schwacher Markteffizienz im Fokus. Der in der Einleitung beschriebene Mean Reversion-Effekt, nach dessen Prinzip Fehlbewertungen zu einem langfristigen Ausgleich tendieren, steht im direkten Konflikt zu der Hypothese effizienter Märkte. Da signifikante Hinweise für Fehlbewertungen gefunden werden, widerlegen

## 2. Allgemeine Grundlagen

die Ergebnisse eine schwache Markteffizienz und somit auch jede andere Form. Stattdessen sprechen die Erkenntnisse für ineffiziente Finanzmärkte.

### 2.3 Backtesting und Simulation

In dieser Studie werden, basierend auf der technischen Finanzmarktanalyse, Handelsstrategien untersucht und bezüglich der gegebenen Kriterien bewertet. Eines der wichtigsten Werkzeuge dieser Analyseform ist die simulierte Ausführung von Handelsstrategien mit historischen Kursdaten, das sogenannte *Backtesting*.

Bei dieser Art der Evaluation wird davon ausgegangen, dass Tendenzen zur Wiederholung bestimmter Muster in den Kursdaten existieren. Ist eine gegebene Handelsstrategie in historischen Zeiträumen erfolgreich, so lässt sich für deren zukünftigen Einsatz ebenfalls eine positive Rendite erwarten. Aufbauend auf historischen Simulationen sind somit Vorhersagen über den Erfolg von Handelsstrategien in der Zukunft möglich.

Eine weitere häufig genutzte Form der Evaluation sind sogenannte *Monte-Carlo-Simulationen*, bei denen eine große Anzahl gleichartiger Zufallsexperimente ausgewertet wird, um eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Ergebnisraum numerisch zu approximieren. Diese Analysemethode ist in der Finanzmarktanalyse sehr etabliert und wird zum Beispiel für die Bewertung von Handelsstrategien genutzt. So werden Simulationen mit künstlich erzeugten Kursdaten verwendet, um mit einer größeren Datenbasis statistisch signifikante Aussagen über Performance und Risiko treffen zu können.

Für die Anwendung beider Verfahren sind eine Reihe von Grundlagen notwendig, die in den folgenden Kapiteln entwickelt werden. So werden in Kapitel 2.4 grundlegende Eigenschaften von Finanzmarktzeitreihen untersucht, um dann in Kapitel 2.5 genau auf deren Rekonstruierbarkeit für realistische Monte-Carlo-Simulationen einzugehen. Eine formale Darstellung der Handelsaktivität folgt in Kapitel 2.6, wobei Kriterien für die Bewertung der Ergebnisse in Kapitel 2.7 vorgestellt werden.

## 2.4 Zeitreihen

Eines der grundlegenden Werkzeuge der Finanzmathematik ist die Analyse von Zeitreihen, also von Folgen zeitlich geordneter Beobachtungen eines zu untersuchenden Merkmals. Im Bereich des Finanzwesens handelt es sich hierbei meist um numerische Eigenschaften, wie beispielsweise einen Wertpapierkurs. Die Annahme, nach welcher zwischen einzelnen Messpunkten solcher Zeitreihen gewisse Abhängigkeiten existieren, begründet eine der wichtigsten Disziplinen der Finanzmathematik: die Zeitreihenanalyse. Dieses Forschungsfeld widmet sich vor allem der Untersuchung von Zeitreiheneigenschaften und der Vorhersagbarkeit zukünftiger Zeitreihenelemente. Es handelt sich in dieser Arbeit dabei stets um diskrete Reihen mit konstanter Zeitdifferenz zwischen zwei benachbarten Punkten.

Ökonomische Zeitreihen unterliegen einer Vielzahl unterschiedlicher Einflussfaktoren. Um beispielsweise die Kursentwicklung eines Wertpapiers exakt vorhersagen zu können, müssen unter anderem Kauf- und Verkaufabsichten jedes Marktteilnehmers zu jedem Zeitpunkt bekannt sein. Ist eine vollkommen transparente Informationslage nicht gegeben, ist die der Zeitreihe zugrunde liegende erzeugende Systematik nur über ökonometrische Verfahren approximierbar. In der angewandten Finanzmarktanalyse ist das natürlich der Fall, Analysen erfolgen also stets aus einer beschränkten Informationslage.

Im Forschungsbereich der univariaten Zeitreihenanalyse werden Vorhersagen über kommende Elemente ausschließlich aus der Analyse vergangener Elemente der untersuchten Zeitreihe gewonnen. Dass sich Zeitreihen aus ihrer eigenen Historie heraus prognostizieren lassen, erfordert inhärente Systematiken. Der Beschreibung univariater Prognoseverfahren geht daher die Fragestellung voraus, ob es solche Eigenschaften gibt und ob sich diese formal beschreiben lassen.

Im Folgenden werden daher spezielle Eigenschaften ökonomischer Zeitreihen beschrieben und in Kapitel 2.5 aufeinander aufbauende Modelle für datengenerierende Prozesse vorgestellt. Vor ihrer Untersuchung sind einige elementare Definitionen nötig.

## 2. Allgemeine Grundlagen

### 2.4.1 Grundlegende Definitionen

**2.4.1 Definition** (Zeitreihe). Sei  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$  eine geordnete Indexmenge. Eine Zeitreihe  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ist eine Abbildung  $X : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$  von einem Zeitbereich  $\mathbb{T}$  auf einen Ereignisraum  $\mathbb{S}$ .

Da ökonomische Realmarktdaten nur in diskreter und endlicher Form vorliegen, stehen in dieser Arbeit solche Zeitreihen im Fokus. Es wird zudem nur von einem numerischen Ereignisraum ausgegangen. Wenn nichts anderes angegeben ist, werden daher  $\mathbb{T} = \{1, 2, \dots, T\} \subset \mathbb{N}$  und  $\mathbb{S} = \mathbb{R}$  angenommen.

Um Zeitreihen genauer hinsichtlich ihrer Struktur zu untersuchen, werden sie im Folgenden mitunter als stochastische Prozesse modelliert. Dieser Schritt erlaubt es, weitere Zeitreiheneigenschaften zu beschreiben, die eine detailliertere Charakterisierung ermöglichen. Sei hierfür  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{N}$  eine geordnete Indexmenge.

**2.4.2 Definition** (Stochastischer Prozess). Ein reellwertiger stochastischer Prozess sei definiert als Familie von Zufallsvariablen  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  gegeben durch die Abbildung

$$X : \Omega \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$$

Die Ergebnismenge  $\Omega$  enthält alle möglichen Realisationen des stochastischen Prozesses,  $\mathcal{F}$  ist die dazugehörige  $\sigma$ -Algebra<sup>1</sup>.

Vereinfacht gesagt, liefert  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  also eine Folge sortierter Zufallsvariablen im Ereignisraum  $\mathbb{S}$  und damit ein mathematisches Modell für die Beschreibung diskreter Zeitreihen. Solche Modelle werden auch *datengenerierende Prozesse (DGP)* genannt.

Zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  ermöglicht der Kenntnisstand über eine endliche Realisation eines stochastischen Prozesses  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  eine Approximation des datengenerierenden Prozesses und damit eine Abschätzung über zukünftige Elemente. In der Stochastik wird diese wachsende Informationsmenge durch eine Filtrierung dargestellt.

---

<sup>1</sup> $\mathcal{F}$  ist also eine Menge aus Teilmengen von  $\Omega$  und ist abgeschlossen bezüglich der Bildung abzählbarer Vereinigungen und Komplemente. Sie enthält somit alle Ereignisse, für die sich über das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  eine Eintreffenswahrscheinlichkeit zuordnen lässt.

**2.4.3 Definition** (Filtrierung). Eine Filtrierung sei eine Familie  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ . Sie enthält zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine Sub- $\sigma$ -Algebra der Ereignismenge  $\mathcal{F}$  des stochastischen Prozesses  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ .

Anschaulich gesprochen enthält  $\mathcal{F}_t$  jegliche Information, die zum Zeitpunkt  $t$  vorliegt. Es gilt:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F} \quad \forall s, t \in \mathbb{T} : s < t$$

Die Informationsmenge ist also monoton wachsend. Besteht  $\mathcal{F}_t$  aus historischen Werten des zu prognostizierenden Prozesses  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , so ist der Erwartungswert eines Werts  $X_{t+i}$  mit  $i > 0$  definiert als

$$\mathbb{E}(X_{t+i} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_{t+i} | X_0, X_1, \dots, X_t).$$

Da in dieser Arbeit die Möglichkeit der Entwicklung gewinnbringender Handelsstrategien zunächst auf theoretischer Basis unter abstrahierten Annahmen untersucht werden soll, ist insbesondere die Frage interessant, inwiefern sich zukünftige Zeitreihenelemente aus bisherigen Beobachtungen prognostizieren lassen. Es werden im Folgenden daher einige Eigenschaften stochastischer Prozesse definiert, die diese bezüglich dieses Merkmals klassifizieren.

**2.4.4 Definition** (Autoregressiver Prozess). Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  heißt autoregressiver Prozess  $n$ -ter Ordnung mit  $n > 0$ , kurz AR( $n$ )-Prozess, wenn seine Realisation im Zeitpunkt  $t$  nur von den  $n$  vorigen Elementen  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_{t-n}$  und einem weißen Rauschen  $\epsilon_t$  abhängt, also

$$X_t = \delta_1 X_{t-1} + \delta_2 X_{t-2} + \dots + \delta_n X_{t-n} + \epsilon_t$$

mit endlichen Koeffizienten  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$  mit  $\delta_n \neq 0$ .

**2.4.5 Definition** (Markow-Prozess). Bei einem stochastischen Prozess handelt es sich um einen Markow-Prozess, wenn

$$P(X_{t+i} = s | \mathcal{F}_t) = P(X_{t+i} = s | X_t) \quad \forall s \in \mathbb{S}$$

## 2. Allgemeine Grundlagen

gilt. Die Eintreffenswahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $s \in \mathcal{S}$  kann damit unter Kenntnis der gesamten Prozesshistorie nicht genauer bestimmt werden als unter der bloßen Kenntnis der vorigen Beobachtung.

**2.4.6 Bemerkung.** Ist ein Markow-Prozess autoregressiv, handelt es sich stets um einen AR(1)-Prozess.

**2.4.7 Definition.** Ein stochastischer Prozess heißt integrierbar, falls

$$\mathbb{E}(|X_t|) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

gilt.

**2.4.8 Definition (Martingal).** Ein integrierbarer stochastischer Prozess heißt Martingal, wenn zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$

$$\mathbb{E}(X_{t+i} | \mathcal{F}_t) = X_t$$

mit  $i > 0$  gilt. Der bedingte Erwartungswert der nächsten Beobachtung entspricht also stets der letzten Beobachtung. Damit existiert unter vollständiger Informationslage  $\mathcal{F}_t$  keine bessere Schätzung für zukünftige Elemente  $X_{t+i}$  als  $X_t$ .

**2.4.9 Definition (Homo- und Heteroskedastizität).** Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  wird homoskedastisch genannt, wenn seine Varianz zeitinvariant ist, also

$$\text{Var}(X_t) = \text{Var}(X_u) \quad \forall t, u \in \mathbb{T}$$

gilt. Ist die Varianz hingegen zeitabhängig, ist der Prozess heteroskedastisch.

**2.4.10 Bemerkung.** Die Änderungen von Wertpapier- und Rohstoffkurse sind typischerweise heteroskedastisch. Während ihre Varianzen in ruhigen Marktphasen gering sind, können sie in Krisenzeiten über längere Zeit hohe Werte annehmen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *Volatilitätsclustering*. Die Volatilität von Finanzmarktzeitreihen, also die Standardabweichung pro Zeitintervall, wird auf Grund dieser Eigenschaft oftmals über autoregressive Prozesse modelliert.

In den folgenden Studien werden Abschätzungen der Varianz einer Zeitreihe auf Basis kürzerer Ausschnitte extrapoliert. Die Gleichung von Bienaymé ist in diesem Kontext notwendig, um allgemeine Aussagen über die Varianz zu treffen.

**2.4.11 Definition** (Gleichung von Bienaymé). Für unabhängige, reellwertige Zufallsvariablen  $X_t, \dots, X_u$  mit endlicher Varianz ist die Varianz der Summe gleich der Summe der Varianzen, also

$$\text{Var} \left( \sum_{i=t}^u X_i \right) = \sum_{i=t}^u (\text{Var} (X_i)) \quad \forall t, u \in \mathbb{T} : t < u.$$

**2.4.12 Definition** (Stationarität). Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  heißt (stark) stationär, wenn die Verteilung der Zufallsvariablen verschiebungsinvariant ist. Für ihn gilt also

$$P(X_t = s) = P(X_u = s) \quad \forall s \in \mathcal{S}, t, u \in \mathbb{T}.$$

Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  heißt schwach stationär, wenn sowohl sein Erwartungswert als auch seine Autokovarianz verschiebungsinvariant sind, also

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_u) \quad \forall t, u \in \mathbb{T} \quad (2.4.13)$$

und

$$\text{Cov}(X_{t_1}, X_{t_2}) = \text{Cov}(X_{t_1+u}, X_{t_2+u}) \quad \forall t_1, t_2, u \in \mathbb{T} \quad (2.4.14)$$

gelten. Zudem muss die Varianz einzelner Zufallsvariablen endlich sein, also  $\text{Var}(X_t) < \infty$ . Stark stationäre Prozesse sind trivialerweise auch immer schwach stationär.

**2.4.15 Bemerkung.** Die Forderung schwacher Stationarität ist in Bezug auf ökonomische Zeitreihen einschränkender als man vielleicht intuitiv vermuten würde. Wenngleich beispielsweise für relative Tagesveränderungen eines Wertpapiers Verteilungen um einen konstanten Erwartungswert nahe dem Wert 0 angenommen werden können, ist die Forderung nach verschiebungsinvarianter Kovarianz für heteroskedastische Zeitreihen generell nicht erfüllbar.

## 2. Allgemeine Grundlagen

### 2.4.2 Mean Reversion

Der Mean Reversion-Effekt ist als Phänomen in der Kapitalmarkttheorie begründet. Für seine Einbettung in die Statistik sind mehrere Herangehensweisen denkbar. Es existieren mehrere, teilweise analoge, meist nicht formale Definitionen. Im wissenschaftlichen Diskurs wird er zudem häufig vereinfachend mit Stationarität gleichgesetzt – eine Variante, die durch die Annahme eines variablen Anziehungspunkts in dieser Arbeit allerdings nicht einmal approximativ zutrifft.

Da der Effekt in dieser Arbeit eine besondere Stellung einnimmt, wird er in diesem Abschnitt genau charakterisiert. Es wird nach einer formalen Beschreibung gesucht, die für die in dieser Arbeit gestellten Fragestellungen optimal geeignet ist. Es wird daher zunächst mit einer detaillierten Untersuchung der Eigenschaft begonnen.

Der Mean Reversion-Effekt unterstellt die Existenz von Überreaktionen am Markt, die kurz- oder langfristig kompensiert werden. Er beschreibt also einen stochastischen Prozess, der auf Veränderungen in eine Richtung mit einer steigenden Chance einer Rückbewegung zu einem gleitenden Durchschnittswert reagiert. Da diese Rückbewegungen nicht nur sofort, sondern auch über große Zeiträume möglich sind, handelt es sich um einen autoregressiven Zusammenhang, der nicht über einen Markow-Prozess darstellbar ist.

Wird zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  also die Existenz eines Preises  $Y_t$  angenommen, der jegliche Information  $\mathcal{F}_t$  akkurat auswertet und exakt einpreist, so kann der Realmarktpreis  $X_t$  unter der Vorstellung der Mean Reversion inhärenten Fehlbepreisung abweichen. Im Folgenden wird dieser angemessene Preis  $Y_t$  *fairer Preis* genannt.

Entspräche der faire Preis  $Y_t$  stets dem Marktpreis  $X_t$ , so wäre der Marktpreis effizient. Gäbe es tatsächlich Abweichungen, so existierte eine Fehlbewertung  $R_t$ , so dass

$$X_t = Y_t + R_t$$

gilt. Da angenommen wird, dass sich eine Fehlbewertung  $R_t$  langfristig in den Markt einpreist, wird eine Tendenz zur Verringerung der Fehlbewertung unterstellt.  $R_{t+1}$  lässt sich daher als ein AR(n)-Prozess darstellen für



den  $\sum_{i=1}^n \delta_i < 1$  gilt, so dass die Zeitreihe gegen den Wert 0 strebt. Folglich steigt die Varianz der Fehlbewertung mit größerem Betrachtungszeitraum nicht beliebig an, so dass die Gleichung von Bienaymé (2.4.11) nicht für  $R$  und folglich nicht für  $X$  gilt. Es ergibt sich daher folgende Definition:

Damit ist gewährleistet, dass sich der Erwartungswert  $\mathbb{E}(X_{t+1} | \mathcal{F}_t)$  als AR(n)-Prozess über  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  zum Zeitpunkt  $t$  mit  $n > 1$  darstellen lässt. Aus dieser Glättung folgt, dass die Gesamtvarianz einer  $n$ -elementigen Zeitreihe mit Mean Reversion-Effekt für  $n > 1$  kleiner sein muss als die Summe der Varianzen der  $n$  Zufallsvariablen.

**2.4.16 Definition** (Mean Reversion-Prozess). Ein stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ist ein Mean Reversion-Prozess, wenn

$$\text{Var} \left( \sum_{i=t}^u X_i \right) < \sum_{i=t}^u (\text{Var}(X_i)) \quad \forall t, u \in \mathbb{T} : t < u$$

gilt. Die Varianz der Summe einzelner Prozesselemente ist also geringer als die Summe einzelner Varianzen.

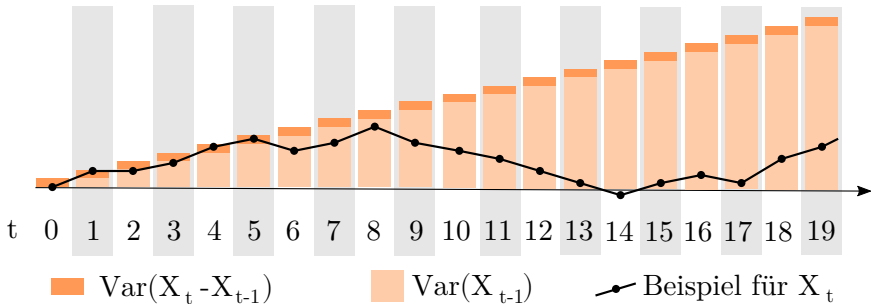
**2.4.17 Bemerkung.** Selbst schwache Stationarität ist wesentlich restriktiver als die gegebene Definition des Mean Reversion-Effekts. Die in Gleichung 2.4.14 gegebene Einschränkung konstanter Autokovarianz ist in diesem Kontext weder gegeben noch notwendig, da auch heteroskedastische Zeitreihen dem Mean Reversion-Effekt unterliegen können. Auch wird die in Gleichung 2.4.13 beschriebene zu strikte Forderung eines konstanten Erwartungswerts mit dieser Definition umgangen, so dass der faire Preis schwanken darf. In dieser Arbeit wird Mean Reversion daher einzig über Verhältnisse von Varianzen unterschiedlicher Abtastbreiten definiert.

### 2.4.3 Mean Reversion-Rate

Der Mean Reversion-Effekt kann natürlich in unterschiedlichen Intensitäten auftreten. Tritt er gar nicht auf, so müsste nach der hier gegebenen Definition die Gleichung von Bienaymé gelten und die Varianz linear mit der Zeit ansteigen. Im Fall des Eintretens müsste sich diese Steigung wiederum reduzieren.

## 2. Allgemeine Grundlagen

Um den Effekt genau quantifizieren zu können, wird daher die erwartete Verringerung der Varianz pro Zeiteinheit genauer untersucht. Es ergibt sich ein durchschnittlicher Verringerungsfaktor, auf dessen Basis in dieser Arbeit die diskrete *Mean Reversion-Rate*  $\theta$  definiert wird. Für eine genaue Erläuterung wird zunächst mit einigen Beispielen begonnen.



**Abbildung 2.1.** Beispiel eines stochastischen Prozesses mit linear steigender Varianz: Mean Reversion-Rate  $\theta = 0$

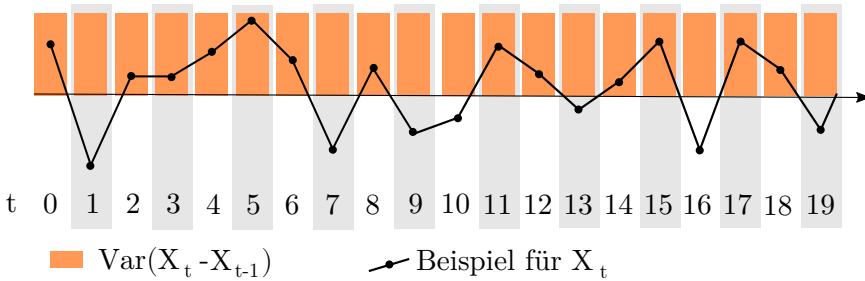
Abbildung 2.1 zeigt die übliche Entwicklung der Varianz einer Zeitreihe, wenn die Gleichung von Bienaymé erfüllt ist. Dies könnte beispielsweise ein einfacher AR(1)-Prozess mit unabhängiger und identisch verteilter Zufallskomponente  $\epsilon_t$  sein:

$$X_t = 1 \cdot X_{t-1} + \epsilon_{t-1}$$

Die Varianz steigt linear mit jedem Element, der Prozess kann beliebig divergieren. Es ist also kein Mean Reversion-Prozess, so dass die Mean Reversion-Rate in diesem Fall den Wert  $\theta = 0$  annehmen soll. Dies ist das typische Verhalten für Martingale.

Das gegensätzliche Extrem ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Das vorige Zeitreihenelement  $X_{t-1}$  hat keinen Einfluss auf das aktuelle Zeitreihenelement  $X_t$ , die Varianz ist konstant und unabhängig von  $t$ . Nicht nur entspricht das der geschilderten Vorstellung von Mean Reversion, bei konstanter Varianz ist der Prozess sogar stark stationär. In diesem Fall soll die Mean Reversion-Rate den Wert  $\theta = 1$  annehmen.

Dieses Beispiel entspräche dann folgendem Prozess:



**Abbildung 2.2.** Beispiel eines stochastischen Prozesses mit konstanter Varianz: Mean Reversion-Rate  $\theta = 1$

$$X_t = 0 \cdot X_{t-1} + \epsilon_{t-1}$$

Der Unterschied der beiden Prozesse liegt lediglich in dem Einfluss des vorigen Zeitreihenelements  $X_{t-1}$  auf  $X_t$ . Ergibt sich ein verringernder Faktor  $a$  (mit  $0 \leq a \leq 1$ ) für

$$X_t = a \cdot X_{t-1} + \epsilon_{t-1},$$

so lässt sich folgende Aussage für die erwartete Varianz treffen:

$$\mathbb{E}(\text{Var}(X_t)) = a^2 \cdot \mathbb{E}(\text{Var}(X_{t-1})) + \mathbb{E}(\text{Var}(\epsilon_{t-1}))$$

Der quadrierte Faktor  $a$  ergibt sich, da der Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  die Entwicklung der Standardabweichung beschreibt, deren Quadrat die Varianz ist. Für die Mean Reversion-Rate ergibt sich der Zusammenhang

$$\theta = 1 - a,$$

da ein höherer Faktor die Tendenz zur Rückkehr verringert. Es ergibt sich folgende Definition:

**2.4.18 Definition** (Mean Reversion-Rate). Die Mean Reversion-Rate  $0 \leq \theta \leq 1$  eines stochastischen Prozesses  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ist gegeben durch

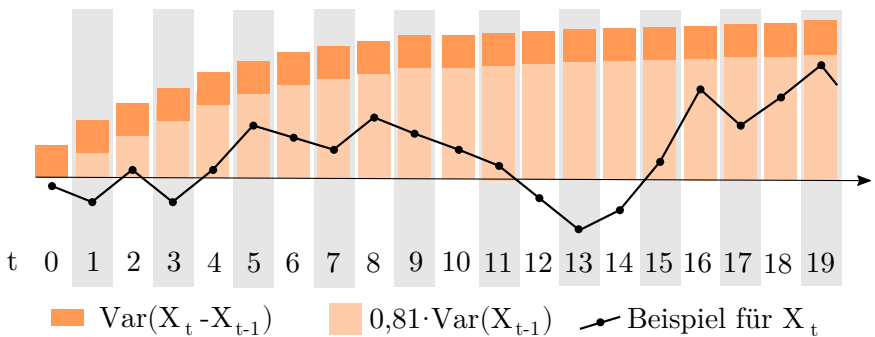
## 2. Allgemeine Grundlagen

$$\theta = 1 - \sqrt{\frac{\mathbb{E}(\text{Var}(X_t)) - \mathbb{E}(\text{Var}(X_t - X_{t-1}))}{\mathbb{E}(\text{Var}(X_{t-1}))}}$$

**2.4.19 Beispiel.** Abbildung 2.3 zeigt die Entwicklung eines einfachen AR(1)-Prozesses  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  mit  $\theta = 0,1$ :

$$X_t = (1 - 0,1) \cdot X_{t-1} + \epsilon_{t-1},$$

Die Varianz reduziert sich hierdurch in jedem Schritt um  $1 - (1 - 0,1)^2 = 19\%$ . Zwar steigt sie dadurch anfänglich, strebt aber gegen einen Maximalwert.



**Abbildung 2.3.** Beispiel eines stochastischen Prozesses mit Mean Reversion-Rate  $\theta = 0,1$

Geht man grundsätzlich davon aus, dass kurzfristige Überreaktionen zu einem mittelfristigen Ausgleich tendieren, so äußert sich dies in einer langsamer anwachsenden Varianz zukünftiger Prozesselemente. Wie das Beispiel zeigt, teilt der Mean Reversion-Prozess diese Eigenschaft und eignet sich daher gut für dessen Modellierung.

## 2.4.4 Statistische Arbitrage

### Korrelation

Während die univariate technische Finanzmarktanalyse sich mit der Prognose von Zeitreihenelementen aus der eigenen Kurshistorie befasst, sind in komplexen Finanzmärkten natürlich auch wechselseitige Beziehungen zwischen Anlageklassen zu erwarten. In diesem Kontext sind die Begriffe Korrelation und Kointegration für diese Studien von großer Bedeutung.

**2.4.20 Definition** (Korrelationskoeffizient). Der Pearson'sche Korrelationskoeffizient zweier stochastischer Prozesse  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  und  $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ist definiert durch

$$\rho(X_t, Y_t) = \frac{\text{Cov}(X_t, Y_t)}{\sqrt{\text{Var}(X_t) \text{Var}(Y_t)}}.$$

Er liegt in dem Intervall  $[-1, 1]$  und gibt an, ob und mit welcher Stärke ein linearer Zusammenhang zwischen beiden Prozessen vorliegt. Für  $+1$  ( $-1$ ) liegt ein vollständiger positiver (negativer) linearer Zusammenhang vor, beide Prozesse unterscheiden sich also nur durch Skalierungsfaktor und Versatz. Für den Wert  $0$  ist keine lineare Abhängigkeit gegeben [DM15].

**2.4.21 Bemerkung.** In der Finanzmathematik hat die Korrelation eine erhebliche Bedeutung, da das Maß die Ähnlichkeit verschiedener Investments genau quantifizieren kann. So wird die Korrelation beispielsweise in der Portfoliotheorie genutzt, um anlagespezifische Risiken zu analysieren und zu minimieren.

### Kointegration

In der Ökonometrie bezeichnet das Konzept der Kointegration eine wechselseitige Beziehung zwischen zwei oder mehreren Prozessen. Diese ermöglicht durch Linearkombination die Bildung eines Prozesses, der sich in einem langfristigen Gleichgewicht befindet. Kommt es Abweichungen in dieser Balance, ist ein Ausgleich durch mindestens einen der zugrunde

## 2. Allgemeine Grundlagen

liegenden Prozesse zu erwarten, der das Gleichgewicht langfristig wiederherstellt. Eine in der Literatur etablierte Definition der Kointegration lautet, dass zwei nicht stationäre Prozesse  $(X_t^1)_{t \in \mathbb{T}}$  und  $(X_t^2)_{t \in \mathbb{T}}$  kointegriert sind, wenn ein Prozess  $(U_t)_{t \in \mathbb{T}}$  und ein Wert  $\beta \in \mathbb{R}$  existieren mit

$$X_t^1 + \beta \cdot X_t^2 = U_t,$$

so dass  $(U_t)_{t \in \mathbb{T}}$  stationär ist [EG87]. Die Forderung, dass ein stationäres Gleichgewichtsniveau  $U_t$  mit konstantem Erwartungswert existiert, ist im Kontext dieser Arbeit zu restriktiv. Es scheint realistisch, dass sich die Balance zwischen Kurssystemen langfristig ändern kann. In dieser Arbeit wird daher eine schwächere Definition für den Begriff Kointegration verwendet.

**2.4.22 Definition** (Schwache Kointegration). Eine Menge nicht stationärer Prozesse  $(X_t^1)_{t \in \mathbb{T}}, (X_t^2)_{t \in \mathbb{T}}, \dots, (X_t^n)_{t \in \mathbb{T}}$  ist schwach kointegriert, wenn Gewichtungen  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$  existieren mit

$$\beta_1 X_t^1 + \beta_2 X_t^2 + \dots + \beta_n X_t^n = U_t,$$

so dass  $(U_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ein Mean Reversion-Prozess ist.

Ist in dieser Arbeit von kointegrierten Prozessen die Rede, sind, wenn nicht anders angegeben, schwach kointegrierte Prozesse gemeint.

**2.4.23 Bemerkung.** Zwar erfordert formal Kointegration eines Systems nicht auch Korrelation. Im Finanzmarkt sind kointegrierte Prozesse aber meist auch in hohem Maße korreliert. Anschaulich kann man Kointegration als zeitlich flexible Korrelation auffassen. Während korrelierte Bewegungen zeitgleich stattfinden, sind verzögerte Angleichungen kointegriert.

Aus verzögerten Anpassungen in kointegrierten Systemen lassen sich Voraussagen über Kursbewegungen ableiten, während rein korrelierte Zeitreihen solche Möglichkeiten nicht bieten. Die Ausnutzung dieser Erkenntnisse wird *statistische Arbitrage* genannt.

## 2.5 Datengenerierende Prozesse

Jede Zeitreihe ist eine Realisation einer erzeugenden Systematik, die in der Ökonometrie datengenerierender Prozess (DGP) genannt wird. Der DGP für einen Basiswert entspricht damit der Grundgesamtheit  $\Omega$  aller möglicher Realisationen  $X \in \Omega$ . Im Bereich von Kurszeitreihen sind DGPs natürlich nicht exakt beschreibbar, da Entwicklungen von dem Verhalten jedes Marktteilnehmers abhängen und so vor allem auf nicht erfassbaren Daten beruhen. Jedoch kann selbst die Kenntnis einfacher approximativer Modelle des DGPs für die Analyse und Optimierung von Handelssystemen von großem Vorteil sein.

So wurde bereits angedeutet, dass eine solche Modellierung in dieser Arbeit sowohl für die Optimierung der Handelsstrategie als auch für Risikoanalysen über Monte-Carlo-Simulationen essentiell ist. Dieser äußerst wichtige Abschnitt stellt daher Verfahren der Abstraktion vor, die Kurszeitreihen über wenige definierende Parameter beschreiben.

### 2.5.1 Random Walk

Die erste Annäherung eines stochastischen Prozesses für die Modellierung ökonomischer Zeitreihen basiert auf der Markteffizienzhypothese. Da dann jede Information bereits eingepreist ist, existiert kein Einfluss vergangener auf zukünftige Kursbewegungen. Die Inkremente einzelner Zeitreihenelemente sind daher nicht abhängig voneinander, sondern werden durch eine normalverteilte Zufallsvariable  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1 abgebildet. Durch den neutralen Erwartungswert folgt die Zeitreihe keinem Trend, eine variable Standardabweichung wird mit einem positiven Faktor, der sogenannten Diffusion  $\sigma$ , modelliert. Es gilt dann  $\sigma \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Dieser Zusammenhang wird durch den Wiener<sup>2</sup>-Prozess  $W_t$  dargestellt. Er ist die Grundlage für alle nachfolgenden Modelle. Hassler räumt ihm in der stochastischen Analysis eine ähnlich prominente Stellung ein wie

---

<sup>2</sup>Der Wiener-Prozess ist nach dem US-amerikanischen Mathematiker Norbert Wiener (1894-1964) benannt und modelliert die Brownsche Bewegung, welche erstmals von dem schottischen Botaniker Robert Brown beobachtet wurde. Hierbei handelt es sich um zufällige Bewegungspfade von Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen.

## 2. Allgemeine Grundlagen

der Normalverteilung in der Analysis [Has07]. Modelliert wird hier also das offensichtlichste Element von Finanzmarktzeitreihen: der (scheinbare) Zufall [Sam+65]. Da die Inkremente zufällig und voneinander unabhängig sind, wird der Wiener-Prozess auch *Random Walk* genannt.

Der Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , der einen Finanzmarktkurs simuliert, ist dann definiert durch:

$$X_t = W_t = W_{t-1} + \sigma \epsilon_{t-1}$$

Die Inkremente sind also normalverteilt mit  $X_{t+1} - X_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Da diese zusätzlich stochastisch unabhängig sind, ist die bestmögliche Prognose für  $X_t$  unter der Informationslage  $\mathcal{F}_{t-1}$  stets  $X_{t-1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) &= X_{t-1} \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) &= 0. \end{aligned}$$

Die Zuwächse  $W_{t+1} - W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  sind somit normalverteilt um den Erwartungswert 0 mit einer durch die Diffusion gegebene Standardabweichung  $\sigma$ . Für die Differenz beliebiger Zeitreihenelemente gilt  $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, (t-s) \cdot \sigma^2)$ .

Ebenso gilt für den Median der Inkremente stets

$$\mathbb{M}(X_t - X_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0.$$

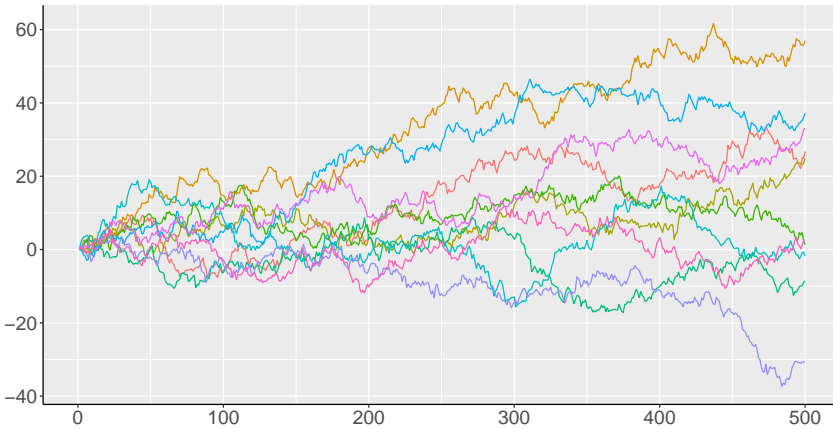
Es ist zu jedem Zeitpunkt also gleich wahrscheinlich, dass zukünftige Zeitreihenelemente einen höheren oder geringeren Wert haben als das aktuelle Element. Die Varianz steigt linear an, die Zufallsvariable  $X_{t+1}$  hat stets eine um  $\sigma^2$  höhere Varianz als  $X_t$ .

### 2.5.2 Geometrischer Random Walk

Für die Modellierung ökonomischer Zeitreihen ist der Random Walk nur eingeschränkt geeignet. Negative Elemente, sowie die Vorstellung, dass der Betrag eines Inkrements nicht relativ vom aktuellen Kurs der Zeitreihe abhängt, erscheinen unrealistisch. Beide Schwachpunkte lassen sich jedoch



## 2.5. Datengenerierende Prozesse



**Abbildung 2.4.** Realisationen von Random Walk-Prozessen mit 500 Elementen,  $X_0 = 0$ ,  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$  und  $\sigma = 1$ .

umgehen, wenn nicht die Preise selbst, sondern die logarithmierten Preise, im Folgenden Log-Preise genannt, als Random Walk-Prozesse modelliert werden. Mehrere etablierte Modelle wie das Black-Scholes-Modell für die Bepreisung von Optionen basieren auf der Annahme, dass Preise von Aktien und Rohstoffe durch dieses Modell grundsätzlich charakterisieren lassen [Bec08]. Rupert nennt den sogenannten *geometrischen Random Walk* daher das „Standard-Modell“ für Aktienkurse [Rup06]. Da sich die erratische Komponente  $\epsilon_t$  wie das Differential eines Wiener-Prozesses verhält, wird die präzisere und übliche Benennung  $dW_t$  mit  $dW_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  gewählt.

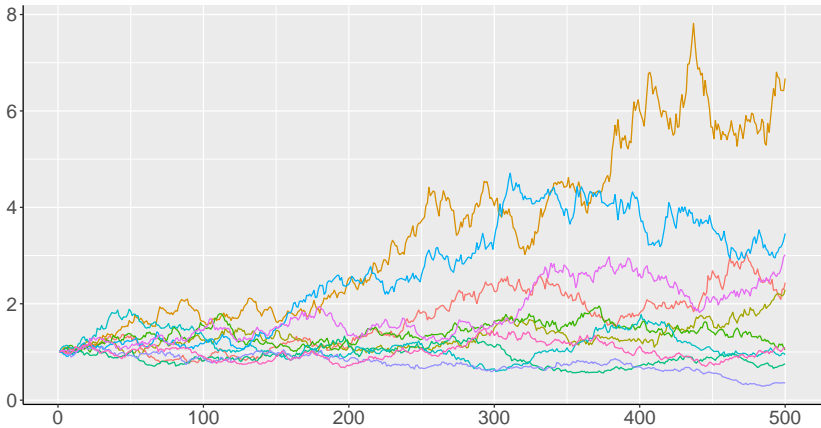
Für eine Kurszeitreihe  $X_t$  ergibt sich der Zusammenhang

$$\ln(X_t) = \ln(X_{t-1}) + \sigma dW_{t-1}$$

und damit approximativ

$$\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \approx \ln(X_t) - \ln(X_{t-1}) \sim N(0, \sigma^2).$$

## 2. Allgemeine Grundlagen



**Abbildung 2.5.** Realisationen von geometrischen Random Walk-Prozessen mit  $X_0 = 1$  und Diffusion  $\sigma = 0,05$  (entspricht etwa 5%)

Die Ähnlichkeit gilt nur für kleine Differenzen, aber die Darstellung als Log-Preis bringt einen wichtigen Vorteil mit sich: Steigt ein Kurs um ein Prozent, um daraufhin um ein Prozent zu fallen, so liegt der Endkurs unter dem Startkurs. Durch diese Asymmetrie sinken Zufallsprozesse langfristig, wenn man eine symmetrische Normalverteilung der prozentualen Wertänderung voraussetzt. Dazu kommt es nicht bei einer normalverteilten Wertänderung des Log-Preises. Steigt der Log-Preis um 0,01, so steigt der Kurs um 1,005%. Sinkt der Log-Preis um 0,01, so fällt er nur um 0,995%. Hierdurch wird die beschriebene Asymmetrie ausgeglichen, die Chance für einen Wertzuwachs liegt daher weiterhin bei 50% und der Median der Verteilung bleibt konstant:

$$\mathbb{M}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}.$$

Es kommt allerdings zu einer anderen Art der Asymmetrie: So führt eine Änderung des Log-Preises um 0,6931 je nach Vorzeichen zu einer Verdopplung oder Halbierung des Kurses. Die absolute Kursänderung beider Ereignisse ist jedoch unterschiedlich, so dass sich eine rechtsschiefe Kursverteilung ergibt. Im Mittel kommt es zu einem Wertzuwachs bei

## 2.5. Datengenerierende Prozesse

dieser Art der Modellierung. Sind Log-Preise normalverteilt mit  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , so folgt der Preis-Prozess einer Lognormal-Verteilung. Abbildung 2.5 zeigt mögliche Realisationen.

Da sich generell eine steigende Tendenz erwarten lässt, handelt es sich bei dem Prozess also um kein Martingal. Der Erwartungswert entspricht daher nicht mehr dem Startwert  $X_0$ , sondern ist definiert durch

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = e^{\ln(X_{t-1}) + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

Anders als der Wiener Prozess hat der geometrische Random Walk also eine Wachstumstendenz. Für die Simulation von Kursdaten muss man sich hier also bewusst machen, dass ein natürlicher Drift existiert.

### 2.5.3 Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

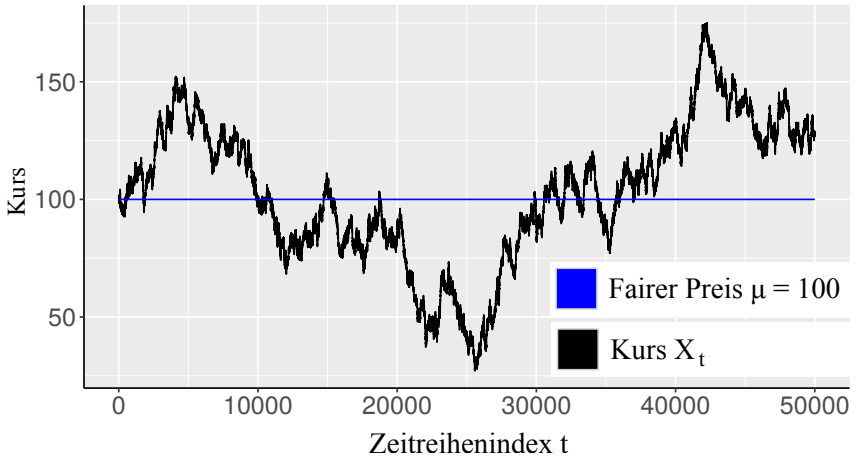
Der geometrische Random Walk gilt zwar bereits als realistisches Modell für die Entwicklung von Kurszeitreihen. Da im Fokus dieser Arbeit die Untersuchung des Mean Reversion-Effekts steht, muss zusätzlich sichergestellt sein, dass sich auch diese besondere Eigenschaft im Modell widerspiegelt.

Der Effekt wurde mit der Annahme verknüpft, dass es einen fairen Preis gibt, der nicht zwangsläufig dem tatsächlichen Marktpreis entspricht. Dieser faire Preis ist von Fehlbewertungen überlagert, die sich aber langfristig reduzieren. Random Walks sind allerdings Markow-Prozesse, so dass das Element  $X_{t+1}$  einzig von  $X_t$  abhängt. Ein komplexer Sachverhalt, wie eine markttechnische Überreaktion, lässt sich mit einem gedächtnislosen Prozess natürlich nicht modellieren.

Der nicht geometrische Random Walk wird daher so erweitert, dass es einen fairen Preis, hier  $\mu$  genannt, enthält. Auf diese Weise lässt sich die Fehlbewertung als Differenz des aktuellen Prozesselements zum fairen Preis verstehen. Hiermit ist eine natürliche Gegenbewegung zu einer Fehlbewertung modellierbar. Liegt der aktuelle Prozesswert also deutlich über oder unter dem fairen Preis, so kann die bisher rein zufällige Bewegung um einen rückführenden Drift erweitert werden.

Dieser Drift wird in dieser Arbeit über die Mean Reversion-Rate  $\theta$  modelliert. Die hierfür in Definition 2.4.18 beschriebenen Regeln werden

## 2. Allgemeine Grundlagen



**Abbildung 2.6.** Prozess (nicht geometrisch) mit Mean Reversion für  $X_0 = 100$ ,  $\mu = 100$ ,  $\theta = 0,0001$  und Diffusion  $\sigma = 0,5$ .

in diesem DGP also konkret umgesetzt. Dieser Wert beschreibt die Anziehungskraft des fairen Preises als Anteil der Differenz zwischen aktuellem Wert und fairem Preis. Eine Mean Reversion-Rate  $\theta = 0,0001$  führt also dazu, dass sich die Differenz zwischen  $\mu$  und dem tatsächlichen Kurs in jedem Schritt um ein Zehntausendstel reduziert, bei  $\theta = 0,001$  wäre es ein Tausendstel.

Abbildung 2.6 zeigt beispielhaft eine solche Realisation. Es handelt sich also um einen so erweiterten Random Walk mit fairem Preis  $\mu = 100$  und Mean Reversion-Rate  $\theta = 0,0001$ . Der Kurs bewegt sich im Bereich 25 und 175, wird aber langfristig vom fairen Preis  $\mu$  angezogen. Die Kursentwicklung wird damit elastisch an den fairen Preis gekoppelt, ein beliebiges Auseinanderdriften ist somit unmöglich. Fehlbewertungen sind über diese Erweiterung darstellbar. Bei genauer Kenntnis des fairen Preises lässt sich jede Abweichung entweder als Über- oder Unterbewertung identifizieren. Das Modell führt somit näher an eine realistische Darstellung von Kurszeitreihen mit Mean Reversion-Effekt heran.

## 2.5. Datengenerierende Prozesse

Diese Erweiterung ist keine Neuentwicklung, sondern wurde bereits im Jahr 1930 vorgestellt. Das als Ornstein-Uhlenbeck-Prozess<sup>3</sup> (kurz: OU-Prozess) bekannte Modell wurde 1977 erstmals von Vasicek zur Beschreibung von Zinssätzen angewendet, die sich langfristig wieder ihrem gleitenden Durchschnittswert annähern [Vas77]. In dieser Arbeit findet er wiederum Verwendung, um Kurse von Finanzprodukten abzubilden. Dieser Einsatz ist zwar unüblich, dennoch wird sich die Art der Modellierung im Kontext dieser Arbeit als sehr geeignet herausstellen. Es folgt eine formale Definition.

**2.5.1 Definition** (Ornstein-Uhlenbeck-Prozess). Seien  $\mu, \theta, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$  Konstanten. Ein stochastischer Prozess heißt Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (kurz: OU-Prozess) mit Startwert  $X_0 \in \mathbb{R}$ , wenn er sich über folgende stochastische Differentialgleichung beschreiben lässt:

$$dX_t = \theta \cdot (\mu - X_t) dt + \sigma dW_t$$

Es ergeben sich also folgende Parameter:

- $\mu$  Das Gleichgewichtsniveau  $\mu$  gibt den Wert an, zu dem der Prozess langfristig strebt. Wird mit dem Prozess der Kurs eines Finanzprodukt modelliert, wird der Wert in dieser Arbeit *fairer Preis* genannt.
- $\theta$  Der Mean Reversion-Rate  $\theta$  gibt an, mit welcher Intensität der Driftterm  $(\mu - X_t)$  in das Zeitreiheninkrement  $X_{t+1}$  eingerechnet wird.
- $\sigma$  Die Diffusion  $\sigma$  beschreibt den Einfluss des Zufallsprozesses  $dW_t$  auf das kommende Zeitelement.

Der OU-Prozess ist nur über eine stochastische Differentialgleichung definiert [KS12]. Für eine feste Schrittbreite  $\delta$  lässt sich seine Position mit stetiger Mean Reversion-Rate  $\lambda$  darstellen mit

$$\lambda = -\frac{\ln(1-\theta)}{\delta} \quad \text{bzw.} \quad \theta = 1 - e^{-\lambda\delta}. \quad (2.5.2)$$

---

<sup>3</sup>Dieser spezielle stochastische Prozess ist nach den niederländischen Physikern Leonard Ornstein (1880-1941) und George Uhlenbeck (1900-1988) benannt und beschreibt die Geschwindigkeit von Brown'schen Partikeln unter dem Einfluss von Reibung [UO30].

## 2. Allgemeine Grundlagen

Der Prozess konvergiert gegen  $\mu$ , im stetigen Modell ist der Einfluss von  $\mu$  mit Schrittbreite  $\delta$  und stetiger Mean Reversion-Rate  $\lambda$  als Exponentialfunktion darstellbar. Zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten  $s, t \in \mathbb{T}$  mit  $s \leq t$  führt die rückläufige Anziehung insgesamt zu einem reduzierenden Faktor  $e^{-\lambda\delta(t-s)} = e^{\lambda\delta(s-t)}$ , um den sich die Differenz zum Gleichgewichtsniveau  $\mu$  reduziert.

Sowohl der Erwartungswert als auch die Varianz lassen sich hieraus ableiten. Vom Startwert  $X_0$  ausgehend ergibt sich für einen beliebigen Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  der Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t | X_0) &= X_0 + \int_0^t (\mu - X_0) \lambda e^{\lambda\delta(s-t)} ds \\ &= \left(1 - e^{-\lambda\delta t}\right) \mu + e^{-\lambda\delta t} X_0. \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Der Faktor  $e^{\lambda\delta(s-t)}$  hat ebenso verringern den Einfluss auf den Diffusionsterm, so dass sich die Varianz als Quadrat der Standardabweichung

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_t | X_0) &= \left( \int_0^t \sigma e^{\lambda\delta(s-t)} dW_s \right)^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{2\lambda\delta} \left(1 - e^{-2\lambda\delta t}\right) \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

ergibt. Für folgende Überlegungen gelte stets  $\lambda > 0$  und damit  $\theta > 0$ . Aus den Gleichungen 2.5.3 und 2.5.4 folgt für den OU-Prozess die Verteilung

$$X_t \sim \mathcal{N} \left( \left(1 - e^{-\lambda\delta t}\right) \mu + e^{-\lambda\delta t} X_0, \frac{\sigma^2}{2\lambda\delta} \left(1 - e^{-2\lambda\delta t}\right) \right). \quad (2.5.5)$$

Der diskrete Zusammenhang für eine feste Schrittbreite  $\delta$  zwischen  $X_{t+1}$  und  $X_t$  ist dann definiert durch

$$X_{t+1} = \left(1 - e^{-\lambda\delta}\right) \mu + e^{-\lambda\delta} X_t + \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda\delta}}{2\lambda\delta}} dW_t$$

## 2.5. Datengenerierende Prozesse

$$\stackrel{(2.5.2)}{=} \theta \mu + (1 - \theta) X_t + \sigma \sqrt{-\frac{1 - (1 - \theta)^2}{2 \ln(1 - \theta)}} dW_t \quad (2.5.6)$$

Gleichung 2.5.6 zeigt, wie der Diffusionsterm im diskreten Modell von der Mean Reversion-Rate  $\theta$  abhängt. Nähert sie sich dem Wert 1, so geht der Einfluss des Zufalls gegen 0. Mit

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \beta(\theta) \sigma \\ \beta(\theta) &= \sqrt{-\frac{1 - (1 - \theta)^2}{2 \ln(1 - \theta)}} \end{aligned}$$

ergibt sich das diskrete Ornstein-Uhlenbeck-Modell

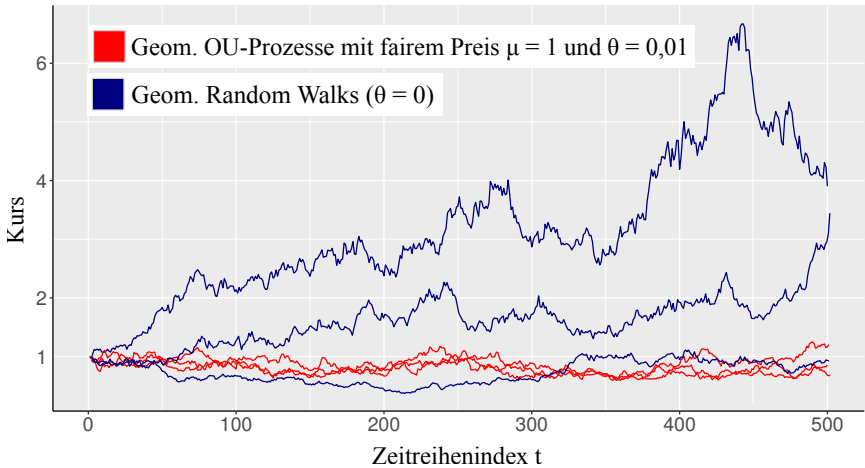
$$X_{t+1} = \theta \mu + (1 - \theta) X_t + \sigma(\theta) dW_t.$$

Der Faktor  $\beta(\theta)$  ist für die Mean Reversion-Rate  $\theta$  mit  $0 < \theta < 1$  stets kleiner gleich 1, senkt also den Wert des Diffusionsterms. Betrachtet man nun  $n$  aufeinander folgende Zeitreihenelemente, so ist dieser reduzierende Einfluss umso stärker. In diesem Fall ergibt sich eine stetige Mean Reversion-Rate  $n\lambda$  und so mit der Umformung nach Gleichung 2.5.6 mit  $\delta = 1$  ein reduzierender Faktor

$$\beta(\theta, n) = \sqrt{-\frac{1 - (1 - \theta)^{2n}}{2n \ln(1 - \theta)}}.$$

Abbildung 2.7 zeigt, dass die so modellierte Tendenz zur Rückkehr für  $\theta = 0,01$  und  $n = 500$  die Varianz drastisch senkt. Für vergleichbare Simulationsergebnisse wird es aber von Interesse sein, Zeitreihen fester Länge mit von  $\theta$  unabhängiger Gesamtvarianz zu generieren. Es wird daher  $\beta$  genutzt, um die Varianz der OU-Prozesse (rot) nach  $n$  Elementen auf die der Random Walks (blau) zu skalieren. Der erweiterte DGP erzeugt für eine Zeitreihe der Länge  $n$  eine feste Gesamtvarianz und ist definiert durch

## 2. Allgemeine Grundlagen



**Abbildung 2.7.** Gegenüberstellung geometrischer Random Walks (blau) und geometrischer OU-Prozesse (rot) mit  $X_0 = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\theta = 0,01$  und  $\sigma = 0,05$ . Die Anziehungskraft des Gleichgewichtsniveaus ist bei dieser Mean Reversion-Rate gut erkennbar.

$$X_{t+1} = \theta \mu + (1 - \theta) X_t + \sigma(\theta, n) dW_t$$

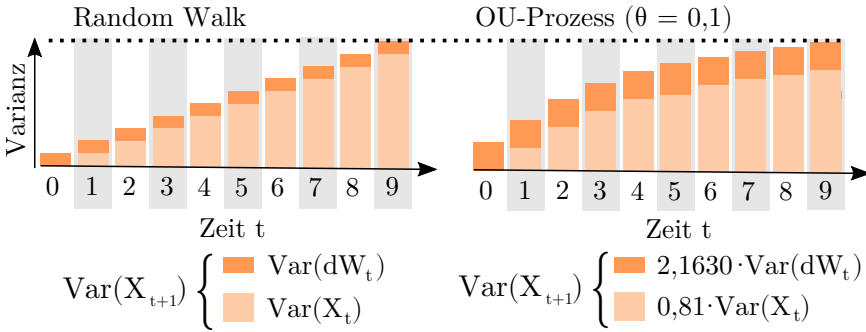
mit

$$\sigma(\theta, n) = \frac{\beta(\theta)}{\beta(\theta, n)} \sigma = \underbrace{\sqrt{\frac{n - n(1 - \theta)^2}{1 - (1 - \theta)^{2n}}}}_{\text{Ausgleichender Faktor}} \sigma. \quad (2.5.7)$$

Es ergibt sich für den Diffusionsterm also ein zusätzlicher Faktor (siehe Gleichung 2.5.7), der den reduzierenden Einfluss der Mean Reversion auf zufällige Abweichungen neutralisiert und so zu einem Ausgleich der Gesamtvarianz führt. Die Berechnung setzt  $\theta > 0$  voraus, der Wert des Faktors ist immer größer als 1.



## 2.5. Datengenerierende Prozesse



**Abbildung 2.8.** Ausgleich der Varianz für  $X_9$  nach zehn Zeitreihenelementen durch eine um den Faktor 2,1630 höhere Varianz der Zufallskomponente  $dW_t$  für  $\sigma = 1$ .

**2.5.8 Beispiel.** Dieses Beispiel ist in Abbildung 2.8 dargestellt. Während die Varianz aufeinanderfolgender Prozesselemente in einem Random Walk monoton steigt, reduziert Mean Reversion den Einfluss der Varianz vergangener Zeitreihenelemente in jedem Schritt um den Faktor  $1 - (1 - \theta)^2$ . Durch die Anziehungskraft des fairen Preises werden für  $\theta = 0,1$  nur 81% der Varianz von  $X_t$  and  $X_{t+1}$  übertragen. Um dennoch zu einer gleichen Gesamtvarianz nach  $n = 10$  Elementen zu kommen, wird ein ausgleichender Faktor benötigt. Die Standardabweichung von  $dW_t$  wird im Fall von  $\theta = 0,1$  also um den Faktor  $\sqrt{2,1630} = 1,4707$  vergrößert, dessen Varianz also um 2,1630. Die Varianzen der zehnten Elemente beider Prozesse haben somit den gleichen Wert. Über einen ausgleichenden Faktor lassen sich also Zeitreihen mit unterschiedlicher Mean Reversion-Rate, aber gleicher Varianz erzeugen.

OU-Prozesse werden in der Finanzmathematik normalerweise genutzt, um Zinssätze, Volatilitäten oder Handelskosten zu modellieren. Da die Existenz eines Mean Reversion-Effekts in Kursdaten umstritten ist, sind Zweifel über den Realismus so erzeugter Kursdaten gerechtfertigt. In Kapitel 5 wird der Effekt daher für verschiedene Finanzprodukte genau untersucht und mittels Likelihood-Schätzungen werden realistische Modellparameter errechnet.

## 2. Allgemeine Grundlagen

Wie schon zuvor für den geometrischen Random Walk beschrieben, ergeben sich durch die Beschreibung des Log-Preises gewisse Eigenschaften, die in Bezug auf die Modellierung von Kursdaten realistischere Daten erzeugen. Diese Vorteile ergeben sich analog auch für den OU-Prozess:

### 2.5.9 Definition (Geometrischer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess).

Seien  $\mu, \theta, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$  Konstanten mit oben genannten Eigenschaften. Ein stochastischer Prozess heißt geometrischer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Anfangswert  $X_0 \in \mathbb{R}$ , wenn er sich über den Zusammenhang

$$\ln(X_t) = \ln(\theta\mu + (1-\theta)X_{t-1}) + \sigma(\theta) dW_t$$

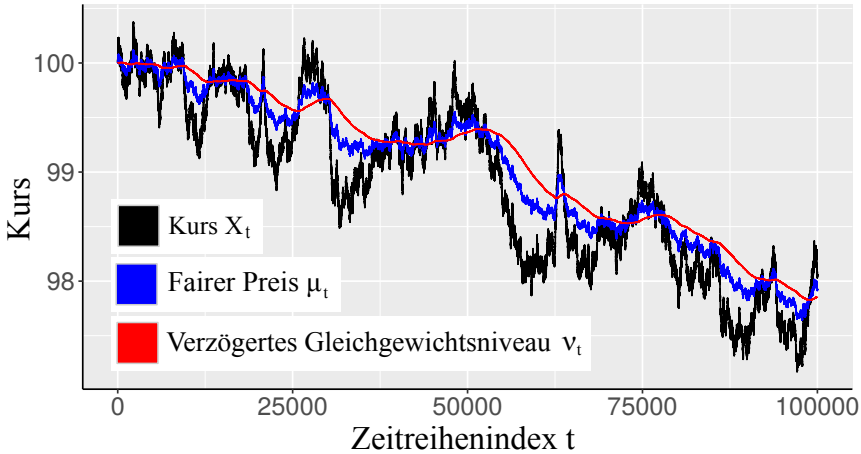
beschreiben lässt. Der Prozess hat den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = e^{\ln(\theta\mu + (1-\theta)X_{t-1}) + \frac{\sigma(\theta)^2}{2}}.$$

Für den Fall  $X_{t-1} = \mu$  ergibt sich im Mittel wie schon beim geometrischen Random Walk  $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) > X_{t-1}$ . Der erwartete Anstieg zwischen zwei Elementen liegt damit bei

$$\mathbb{E}(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) = e^{\ln(\theta\mu + (1-\theta)X_{t-1}) + \frac{\sigma(\theta)^2}{2}} - X_{t-1}.$$

Zwar zeigen Beobachtungen über verschiedene Aktienindizes, dass die durchschnittliche Wertsteigerung in den letzten Jahrzehnten tatsächlich auch in Realmarktdaten ersichtlich ist und daher als realistisch eingestuft werden kann [Sch90]. Das gilt aber beispielsweise nicht für Wechselkurse, so dass dieses tendentielle Wachstum in den folgenden Untersuchungen mitunter nicht erwünscht ist. Die erwartete Steigung  $\mathbb{E}(X_t - X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1})$  für den Fall  $X_{t-1} = \mu$  wird bei der Generierung von Kursen zwischen zwei Prozesselementen  $X_t$  und  $X_{t-1}$  daher abgezogen. Der entstehende geometrische Prozess ist dann ein Martingal. Da die Verteilung nach wie vor rechtsschief ist, äußert sich der neutrale Erwartungswert nun allerdings in einem negativen Median.



**Abbildung 2.9.** Zusammenhang zwischen Kurs  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , verzögertem Gleichgewichtsniveau  $(v_t)_{t \in \mathbb{T}}$  und variablen fairem Preis  $(\mu_t)_{t \in \mathbb{T}}$ .

### 2.5.4 Variabler fairer Preis

Ein konstanter fairer Preis ist über längere Zeiträume unwahrscheinlich. Selbst unter Berücksichtigung kurzfristiger Fehlbewertungen muss ein Modell auch tatsächliche Wertänderungen abbilden können. Als Erweiterung des vorgestellten Modells wird der faire Preis  $\mu$  daher nicht als konstant angenommen, sondern ändert sich abhängig von  $X_t$ .

Der OU-Prozess wird wie bisher, aber mit verzögertem Gleichgewichtsniveau  $(v_t)_{t \in \mathbb{T}}$  definiert, so dass

$$X_{t+1} = \theta v_t + (1 - \theta) X_t + \sigma(\theta, n) dW_t.$$

Sei  $\chi \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq \chi \leq 1$  die Einpreisungsrate, mit der sich die Differenz von  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  und dem Gleichgewichtsniveau verringert. Das verzögerte Gleichgewichtsniveau  $(v_t)_{t \in \mathbb{T}}$  sei also gegeben durch

$$v_t = (1 - \chi) v_{t-1} + \chi X_{t-1}.$$

## 2. Allgemeine Grundlagen

Da sich die Prozesse  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  und  $(v_t)_{t \in \mathbb{T}}$  gegenseitig anziehen, gibt es für  $\theta > 0$  und  $\chi \geq 0$  einen gemeinsamen Schwerpunkt, zu dessen Wert der Kurs tatsächlich tendiert. Dieser gemeinsame Anziehungspunkt wird *variabler fairer Preis*  $(\mu_t)_{t \in \mathbb{T}}$  genannt und ergibt sich durch

$$\mu_t = \frac{\theta v_t + \chi X_t}{\theta + \chi}.$$

Der Zusammenhang zwischen  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , dem verzögertem Gleichgewichtsniveau  $(v_t)_{t \in \mathbb{T}}$  und dem variablen fairen Preis  $(\mu_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ist in Abbildung 2.9 dargestellt. Durch die Einpreisung sind im variablen Modell langfristige Kursänderungen bei gegebener Mean Reversion möglich.

Das Modell ist der Standard für die Untersuchungen in den folgenden Kapiteln, der variable faire Preis im Folgenden daher vereinfachend auch *fairer Preis* genannt.

Zwar sind einige typische Eigenschaften von Kurszeitreihen, wie Heteroskedastizität (Definition 2.4.9) nicht berücksichtigt. Da diese aber keinen grundlegenden Einfluss auf die Analysierbarkeit des Mean Reversion-Effekts hat, bleibt diese Charakteristik bewusst unbeachtet.

## 2.6 Finanzmarkthandel

Die Beschreibung und Auswertung von Handelsstrategien benötigt eine vorhergehende Abstraktion des Finanzmarkthandels auf ein einfaches Modell. Dieses komplexe Thema wird dabei auf die für diese Betrachtung notwendigen Elemente reduziert, um eine einfache Umgebung für die Untersuchung von Handelsstrategien zu schaffen.

In dieser Studie werden Handelssysteme für börsengehandelte Finanzprodukte betrachtet. Sie verfügen über unterschiedliche Kauf- und Verkaufspreise, die sich durch Angebot und Nachfrage ergeben. Der Kaufpreis (auch *Ask-Preis* genannt) liegt dabei über dem Verkaufspreis (*Bid-Preis*), die Differenz der beiden Werte wird *Ask-Bid-Spread* oder kurz *Spread* genannt.

Zwischen Anleger und Börse steht in der Regel ein vermittelndes Kreditinstitut, welches als Dienstleister für die Weiterleitung von Wertpapierorders zuständig ist. Je nach Anbieter ist für den Anleger dabei kredit-

finanzierter Börsenhandel möglich. Werden Aktien für einen bestimmten Betrag erworben, so ist die Bereitstellung des kompletten Kaufbetrages also oftmals nicht notwendig. Da der Kauf eines Wertpapiers als depotgebundene Vermögensumschichtung aufgefasst wird, garantiert die mögliche Liquidation der Aktie dem Kreditinstitut eine ausreichende Sicherheit. Es wird lediglich eine Hinterlegungssumme, *Margin* genannt, gefordert, um Verluste durch mögliche Preisschwankungen zu kompensieren. Nähert sich diese Margin dem zur Verfügung stehenden Betrag, so kommt es zum *Margin Call*, einer Aufforderung zur Aufstockung der Sicherheitsleistung. Kommt es gar zu einer Unterschreitung der Margin-Anforderung, sind auch Zwangsliquidationen möglich. Da diese natürlich nur innerhalb der Börsenhandelszeiten umgesetzt werden können, wird für Wertpapierpositionen außerhalb der Öffnungszeiten eine höhere Margin, die *Overnight Margin* verlangt. Da das in dieser Arbeit untersuchte Handelssystem auf längerfristigem Aufbau von Wertpapierpositionen beruht, bezieht sich der Begriff Margin stets auf die Overnight Margin.

### 2.6.1 Definitionen

Börsengehandelte Finanzprodukte werden im Folgenden *Assets* genannt. Deren Preisstruktur ergibt sich über mehrere definierende Zeitreihen. Seien Ask-Kurs  $(A_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , Bid-Kurs  $(B_t)_{t \in \mathbb{T}}$ , Margin  $(M_t)_{t \in \mathbb{T}}$  und Spread  $(S_t)_{t \in \mathbb{T}}$  für jedes Asset bekannt und in der gleichen Basiswährung.

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und eine Menge von Assets  $i \in \{1, \dots, n\}$  gegeben. Jedes Asset sei zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  durch einen Ask-Kurs  $A_t^i \in \mathbb{R}$ , einen Bid-Kurs  $B_t^i \in \mathbb{R}$  und eine Margin  $M_t^i \in \mathbb{R}$  bestimmt.

**2.6.1 Definition (Portfolio).** Ein Portfolio  $P_t = \{P_t^0, \dots, P_t^n\}$  sei eine  $\mathbb{R}^{n+1}$ -wertige Zufallsgröße zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$ . Sei  $P_t^0$  dabei der liquide Vermögenswert in der Basiswährung zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$ , der nicht in Assets gebunden ist. Seien  $P_t^i$  mit  $i \in \{1, \dots, n\}$  die Anzahl der gekauften Papiere des mit  $i$  indizierten Assets zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$ . Es sind dabei nicht nur positive Positionen (*Long-Positionen*), sondern ebenso negative Positionen (*Short-Positionen*) möglich. Die Zeitreihe  $(P_t)_{t \in \mathbb{T}}$  beschreibt die Entwicklung des Portfolios über  $\mathbb{T}$ .

## 2. Allgemeine Grundlagen

Das Portfolio  $(P_t)_{t \in \mathbb{T}}$  enthält sämtliche für die Analyse relevanten Vermögenswerte in Form liquider und gebundener Mittel. Für sinnvolle Vergleichsmöglichkeiten definieren wir den Wert eines Portfolios über das Vermögen, welches nach direkter Liquidation aller gebundener Mittel zur Verfügung steht. Das so errechnete Gesamtvermögen ist zur Bewertung der Rendite von Handelsentscheidungen elementar:

**2.6.2 Definition** (Gesamtvermögen). Für ein Portfolio  $P_t$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  sei das Gesamtvermögen  $(C_t)_{t \in \mathbb{T}}$  definiert durch

$$C_t = P_t^0 + \sum_{i=1}^n \begin{cases} P_t^i \cdot A_t^i & \text{falls } P_t^i \leq 0 \\ P_t^i \cdot B_t^i & \text{sonst.} \end{cases}$$

**2.6.3 Definition** (Gesamtmargin). Für ein Portfolio  $P_t$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  sei die Gesamtmargin  $(\hat{M}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  definiert durch

$$\hat{M}_t = \sum_{i=1}^n |P_t^i| \cdot M_t^i.$$

Die Gesamtmargin ist die minimale Sicherungseinlage für das aktuelle Portfolio und darf nicht unterschritten werden.

**2.6.4 Definition** (Handelsstrategie). Eine Handelsstrategie ist ein fest definiertes Regelwerk, welches zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  auf Basis zur Verfügung stehender Informationen ein Zielfortfolio  $P_{t+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$  für den Folgezeitpunkt beschreibt. Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  der Wahrscheinlichkeitsraum über alle relevanten Informationen.

Eine Handelsstrategie für  $n$  Assets ist eine Abbildung

$$H : \Omega \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

so dass der resultierende Portfolio-Prozess  $(\mathcal{F})_{t \in \mathbb{T}}$ -messbar<sup>4</sup> ist.

**2.6.5 Bemerkung.** Zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  stehen also genau die in  $\mathcal{F}_t$  gegebenen Informationen für die Erstellung eines neuen Portfolios

---

<sup>4</sup>Jegliche zur Bildung des Portfolios  $P_t$  verwendete Information ist in der Informationsmenge  $\mathcal{F}_t$  vorhanden.

zur Verfügung. Für die Umsetzung der Strategie wird eine Veränderung des Zielfortfolios zwischen zwei Zeitpunkten  $t$  und  $t + 1$  dann über den Handel der Assets ausgeglichen. So ergibt sich für eine gegebene Handelsstrategie  $H$  direkt eine Menge auszuführender Transaktionen.

Die Änderung des liquiden Vermögens  $P_t^0$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  errechnet sich durch die Multiplikation der Differenzen mit aktuellen Kauf- oder Verkaufspreisen, ohne dass weitere Transaktionskosten angenommen werden:

$$P_{t+1}^0 = P_t^0 - \sum_{i=1}^n \left( B_t \cdot \min \left( 0, P_{t+1}^i - P_t^i \right) + A_t \cdot \max \left( 0, P_{t+1}^i - P_t^i \right) \right)$$

Zusammenfassend gestattet dieses einfache Modell die Berechnung des Portfolios und des Gesamtvermögens für beliebige Assets und Handelsstrategien über einen zu untersuchenden Zeitraum, sofern Kursdaten vorhanden sind. Diese Berechnungsvorschrift kann daher als Grundlage für Backtests verwendet werden. Ebenso sind Monte-Carlo-Simulationen mit künstlich erzeugten Kursdaten möglich, um basierend auf einer größeren Datenbasis statistisch signifikante Aussagen treffen zu können. Für die Bewertung von Handelsstrategien fehlen allerdings Evaluierungsmaße, die daher im Folgenden vorgestellt werden.

## 2.7 Performance und Risiko

Zwar können konkrete Erwartungen verschiedener Investoren sehr unterschiedlich sein. Grundsätzlich zeichnen sich attraktive Kapitalanlagen aber dadurch aus, dass sie sowohl lukrativ als auch risikoarm sind. Um eine gegebene Handelsstrategie in diesem Kontext beurteilen zu können, sind natürlich präzisere Definitionen dieser Begriffe erforderlich. Es wird daher ein kurzer Überblick über eine Auswahl von Performance- und Risikomaßen gegeben, die für die Bewertung der Ergebnisse einer Handelsstrategie verwendet werden.

Sei hierfür  $H$  eine Handelsstrategie und  $X \in \Omega$  eine Realisation aller relevanten Informationen der Grundgesamtheit  $\Omega$  über einen Zeitraum  $[a, b] \subset \mathbb{T}$  mit  $a < b$ . Alle folgenden Berechnungen beziehen sich direkt

## 2. Allgemeine Grundlagen

auf den resultierenden Portfolioprozess  $(P_t)_{t \in [a,b]}$  der Handelsstrategie in diesem Zeitraum.

**2.7.1 Definition (Ergebnis).** Das Ergebnis einer Handelsstrategie  $H$  sei definiert als Vermögensdifferenz zwischen Start- und Endzeitpunkt:

$$\text{Ergebnis}(H, X, a, b) = C_b - C_a.$$

Ein positives Ergebnis zeigt einen Gewinn, ein negatives Ergebnis einen Verlust an. Eine wirkliche Aussagekraft erhält dieses Maß allerdings erst im Bezug zum eingesetzten Kapital. Das vermutlich wichtigste Performanemaß ist daher die Rendite einer Handelsstrategie:

**2.7.2 Definition (Rendite).** Die Rendite einer Handelsstrategie  $H$  sei definiert als Quotient von Ergebnis und eingesetztem Kapital EK:

$$\text{Rendite}(H, X, a, b) = \frac{\text{Ergebnis}(H, X, a, b)}{\text{EK}(H, X, a, b)}.$$

Zwar gründet die technische Finanzmarktanalyse auf dem Gedanken, dass sich zukünftige Renditen im gewissen Maße aus historischen Daten ableiten lassen. Offensichtlich ist die Aussagekraft der Rendite einer Handelsstrategie über einen endlichen historischen Zeitraum aber beschränkt. Idealerweise wäre daher nicht nur die Rendite über einen limitierten historischen Kursdatenbereich, sondern über einen vergleichbaren datengenerierenden Prozess messbar, so dass sich statistisch signifikante Ergebnisse berechnen lassen.

**2.7.3 Definition (Erwartete Rendite).** Die erwartete Rendite der Handelsstrategie  $H$  im Zeitraum  $[a, b]$  ist die durchschnittliche Rendite über alle Realisationen  $X \in \Omega$ :

$$\text{Erwartete Rendite}(H, \Omega, a, b) = \sum_{X \in \Omega} \text{Rendite}(H, X, a, b) P(X)$$

**2.7.4 Bemerkung.** Natürlich ist die Grundgesamtheit  $\Omega$  unbekannt und kann bestenfalls über die Auswertung großer Datenmengen approximiert werden. Gleichwohl nimmt das Maß in den folgenden Studien eine sehr wichtige Stellung bei der Bewertung von Handelsstrategien ein. Da das



Minimalziel für eine langfristig erfolgreiche Anwendung einer Handelsstrategie in einer positiven erwarteten Rendite liegt, kann über eine approximative Bewertung eine möglichst allgemeine Empfehlung für oder gegen eine Handelsstrategie ausgesprochen werden.

**2.7.5 Definition** (Maximaler Verlust). Der maximale Verlust einer Handelsstrategie  $H$  für die Realisation  $X \in \Omega$  im Zeitintervall  $[a, b]$  ergibt sich durch

$$MV(H, X, a, b) = \max_{t \in [a, b]} (C_a - C_t).$$

Bisher wurde der Begriff *Eingesetztes Kapital* nicht genauer spezifiziert. Im Kontext gehebelter Finanzprodukte ist er auf unterschiedliche Weise interpretierbar, gerade wenn Handelsstrategien ihren Investitionsgrad über den Anwendungszeitraum spürbar ändern. Wenn das zur Verfügung stehende Kapital nur anteilig verwendet wird, ist es in der Regel auch nur anteilig gebunden. Wird in einem solchen Szenario ein großer Teil des als Reserve gedachten Kapitals selten oder nie investiert, steht er gegebenenfalls für andere Wertanlagen zur Verfügung. Je nachdem, ob diese Reserve mit eingerechnet wird oder nur das tatsächlich gebundene Kapital berücksichtigt wird, können natürlich große Unterschiede in der abgeleiteten Rendite möglich sein. Im Folgenden werden daher zwei unterschiedliche Varianten definiert: das durchschnittlich eingesetzte Kapital ( $\emptyset$ EK) und das maximal eingesetzte Kapital (MEK).

Hierfür wird zunächst beschrieben, wie viel Kapital zu einem festen Zeitpunkt benötigt wird:

**2.7.6 Definition** (Gebundenes Kapital). Das gebundene Kapital GK zu einem festen Zeitpunkt  $t$  mit  $a \leq t$  definiert sich über die Margin abzüglich des aktuellen Ergebnisses:

$$GK(H, X, a, t) = \max (\hat{M}_t + C_a - C_t, 0)$$

Es werden also sowohl Sicherungseinlagen, als auch mögliche Gewinne und Verluste seit dem Beginn des Betrachtungszeitraums  $a$  berücksichtigt, wobei das gebundene Kapital nicht negativ werden kann.

## 2. Allgemeine Grundlagen

**2.7.7 Definition** (Durchschnittlich eingesetztes Kapital). Das durchschnittlich eingesetzte Kapital einer Handelsstrategie  $H$  im Zeitraum  $[a, b]$  ist das durchschnittlich gebundene Kapital in diesem Zeitraum:

$$\text{ØEK}(H, X, a, b) = \frac{\sum_{t=a}^b \text{GK}(H, X, a, t)}{b - a + 1}$$

**2.7.8 Definition** (Erwartetes durchschnittlich eingesetztes Kapital). Wie schon bei der Rendite ergibt sich das erwartete eingesetzte Kapital über den Durchschnitt aller Realisationen:

$$\text{ØEK}(H, \Omega, a, b) = \sum_{X \in \Omega} \text{ØEK}(H, X, a, b) P(X)$$

**2.7.9 Bemerkung.** Zum eingesetzten Kapital zählen also sowohl Margin-Anforderungen als auch temporäre Verluste, nicht jedoch ungebundene Kapitalreserven. Diese Berechnungsvariante ist genau dann zweckmäßig, wenn liquide Mittel problemlos hinzugeführt oder abgezogen werden können. Geht man hingegen von einem konstanten und exklusiv für diese Strategie genutzten Startkapital aus, sind nicht nur die gebundenen Mittel, sondern auch möglicherweise notwendige Reserven über den gesamten Zeitraum eingerechnet. Es muss sich daher eine andere Berechnungsgrundlage ergeben. Diese führt zunächst zu der Problematik, die Höhe notwendiger Reserven zu berechnen – hierfür wird mit einem Blick auf das Risikomaß *Value at Risk* begonnen.

**2.7.10 Definition** (Value at Risk). Der Value at Risk (kurz: VaR) für ein untersuchtes Zeitintervall und Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  ist das  $\alpha$ -Quantil der Verteilungsfunktion  $F_Y$ , die, wenn nichts anderes angegeben, die negative Wertveränderung  $Y$  der untersuchten Risikoposition beschreibt.

$$\text{VaR}_\alpha(Y) = \text{Q}_Y(\alpha) = \inf\{y \mid F_Y(y) \geq \alpha\}$$

**2.7.11 Beispiel.** Ein Value at Risk von 1.000 Euro bei einer Wertanlage für ein Konfidenzniveau von 95% über eine betrachtete Haltedauer von einem Tag bedeutet, dass nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% ein Verlust von über 1.000 Euro zu erwarten ist. Zusätzlich zur Margin müsste

in diesem Fall also zumindest eine Reserve von 1.000 Euro bereitgestellt werden, um Verluste in 95% der Fälle zu decken.

Der Value at Risk ist ein etabliertes Risikomaß und geeignet, um nötige Kapitalreserven im Bezug zum eigenen Risikoprofil zu berechnen. Die im Beispiel 2.7.11 genannten 1.000 Euro können aber tatsächlich nicht sicherstellen, dass ein Margin-Call und eine mögliche Zwangsliquidation wirklich nur in maximal 5% der Fälle auftritt, da der Value at Risk nur die Verteilungsfunktion der Ergebnisse am Ende des untersuchten Zeitintervalls überprüft. Eine möglicherweise ebenso fatale temporäre Überschreitung innerhalb des Zeitraums wird nicht zwangsläufig erfasst. Es wird daher nach einer alternativen Verteilung gesucht.

**2.7.12 Definition** (Maximal eingesetztes Kapital). Das maximal eingesetzte Kapital einer Handelsstrategie  $H$  für die Realisation  $X \in \Omega$  ergibt sich durch

$$\text{MEK}(H, X, a, b) = \max_{t \in [a, b]} \text{GK}(H, X, a, t).$$

Der Wert gibt für  $X$  die maximale Summe aus Margin und temporären Verlusten an, die während  $[a, b]$  aufgetreten ist. Es ist also genau die minimale Kapitalmenge, die trotz möglicher Verluste über gesamten Zeitraum als Sicherungseinlage ausreicht. Der Wert ist daher die Basis für eine alternative Definition des eingesetzten Kapitals für die Berechnung der Rendite.

**2.7.13 Definition** (Erwartetes maximal eingesetztes Kapital). Sei die Verteilungsfunktion des maximal eingesetzten Kapitals über alle Realisationen in  $\Omega$  bekannt. Das erwartete maximal eingesetzte Kapital zum Konfidenzniveau  $1 - \alpha$  ist dann der Value at Risk dieser Verteilung:

$$\text{MEK}_\alpha(H, \Omega, a, b) = \text{VaR}_\alpha(\{\text{MEK}(H, X, a, b), X \in \Omega\})$$

Das so errechnete eingesetzte Kapital mit einem Konfidenzniveau von 95% reicht aus, damit ein Margin Call über  $[a, b]$  in maximal 5% aller Fälle ausgeführt wird. Im Folgenden wird dieser Wert MEK 95% oder kurz MEK bezeichnet. Für eine tatsächliche Anwendung muss die Verteilungsfunktion entweder über umfangreiche Backtests oder Monte-Carlo-Simulationen

## 2. Allgemeine Grundlagen

approximiert werden. Für eine möglichst präzise Auswertung werden in kommenden Kapiteln beide Ansätze kombiniert.

**2.7.14 Definition** (Volatilität). Sei  $(R_t)_{t \in \mathbb{T}}$  der Prozess der Renditeentwicklung über das Zeitintervall  $[a, b]$ . Die Volatilität ist definiert als die Standardabweichung von der durchschnittlichen Entwicklung:

$$\sigma_R(H, X, a, b) = \sqrt{\frac{\sum_{t=a}^b (R_t(H, X, a, b) - \bar{R}(H, X, a, b))^2}{b - a}} \quad \text{mit}$$
$$\bar{R}(H, X, a, b) = \frac{\sum_{t=a}^b R_t(H, X, a, b)}{b - a + 1}$$

**2.7.15 Definition** (Erwartete Volatilität). Für die Bewertung einer Handelsstrategie wird dann die erwartete Volatilität über alle Realisationen untersucht:

$$\sigma_R(H, \Omega, a, b) = \sum_{X \in \Omega} \sigma_R(H, X, a, b) P(X)$$

**2.7.16 Bemerkung.** Geht es nur um Gewinnmaximierung, erscheint die Volatilität einer Anlage auf den ersten Blick irrelevant. Die größtmögliche Rendite wird ungeachtet von der Volatilität im Mittel dasjenige Investment mit der maximalen erwarteten Rendite erzielen. Das Kriterium Volatilität wirkt daher nur für risikoaverse Anleger interessant, die geringe Renditen für geringere Schwankungsbreiten in Kauf nehmen. Bereits für risikoneutrale Anleger scheint eine Betrachtung unwesentlich.

Diese Überlegung ist allerdings je nach Investment nur eingeschränkt gültig. Ist es möglich, ein Investment zu hebeln, so lassen sich Rendite und Volatilität gleichzeitig um einen konstanten Faktor steigern. Da sich die Volatilität zu vergleichender Handelsstrategien über diesen Parameter normieren lässt, ist nur noch das Verhältnis von erwarteter Rendite zu Volatilität entscheidend. Auf dieser Basis lässt sich das Sharpe-Ratio<sup>5</sup> motivieren, welches als Maßzahl im Risikomanagement sehr etabliert ist. Es stellt die Überrendite (Rendite abzüglich risikofreiem Zinsniveau) in Bezug zur Volatilität einer Wertanlage.

<sup>5</sup>Dieses sehr etablierte Performancemaß ist benannt nach William F. Sharpe, der das Verfahren im Jahr 1966 vorstellte.

**2.7.17 Definition** (Erwartetes Sharpe-Ratio). Das Sharpe-Ratio einer Handelsstrategie  $H$  ist definiert durch den Quotient ihrer Überrendite (Rendite abzüglich risikofrei erreichbarer Rendite) und ihrer Volatilität. Das erwartete Sharpe-Ratio im Zeitraum  $[a, b]$  über die Grundgesamtheit  $\Omega$  errechnet sich dann über

$$\text{Sharpe}(H, \Omega, a, b) = \frac{\text{Erwartete Rendite}(H, \Omega, a, b) - \text{Risikofreie Rendite}}{\sigma_R(H, \Omega, a, b)}.$$

**2.7.18 Bemerkung.** Eine Anlage erzielt ein positives Sharpe-Ratio nur, wenn ihre Rendite über einem risikolosem Zinssatz liegt. Der Wert gibt auch nur im positiven Bereich Sinn, Handelsstrategien mit negativem Sharpe-Ratio sind generell nicht empfehlenswert. Je höher das Sharpe-Ratio, desto besser - ein hohes Sharpe-Ratio deutet auf eine kontinuierliche und schwankungsarme Überrendite hin.

Aus den oben angestellten Überlegungen folgt, dass sich für eine hebelbare Anlage aus dem höchsten Sharpe-Ratio bei konstantem Risiko zumindest bei beliebiger Hebelbarkeit ohne Margin stets die höchste Rendite erzielen lässt. In jedem Fall zeigt es aber, wie sprunghaft oder kontinuierlich eine Handelsstrategie Gewinne generiert. Wegen dieses zusätzlichen Blickwinkels auf das Risiko werden kommende Auswertungen auch auf das Sharpe-Ratio zurückgreifen. Vereinfachend wird dabei von einer risikofreien Rendite von 0% ausgegangen. Das entspricht zumindest im historischen Kontext zwar nicht immer der Realität, es verbessert aber die Vergleichbarkeit der verschiedenen Untersuchungen innerhalb dieser Arbeit.

## 2.8 Zusammenfassung

Für eine präzise Evaluierung von Handelsstrategien sind sowohl Backtests als auch Monte-Carlo-Simulationen sinnvoll – für die zweite Variante sind künstliche Kursdaten erforderlich, die sich möglichst nicht von realen Daten unterscheiden lassen. Zwar ist die Verwendung von geometrischen Prozessen in der technischen Analyse bewährt, die Existenz des Mean Reversion-Effekts ist jedoch umstritten. Dennoch wurden geometrische

## 2. Allgemeine Grundlagen

OU-Prozesse mit variablem fairen Preis für die Modellierung von Kursdaten vorgestellt. Deren Eignung wird in Kapitel 5 genauer untersucht, in dem Verfahren beschrieben und angewendet werden, die das Auftreten des genannten Effekts in Realmarktdaten messen. Um die Qualität von Handelsstrategien analysieren zu können, wurden abschließend Performance- und Risikomaße vorgestellt.

Das Fundament für die Beschreibung und Analyse einer Handelssystems steht nun. Im folgenden Kapitel wird daher eine Handelsstrategie entwickelt, die durch Ausnutzung des Mean Reversion-Effekts am Finanzmarkt Gewinne erzielen soll.

# Martingalsysteme in Finanzmärkten

Der Forschungsbereich der technischen Finanzmarktanalyse umfasst weitgefächerte Gebiete, die sich mit der Entwicklung von Handelsstrategien befassen. Die minimale Zielsetzung für solche Systeme auf Basis univariater Zeitreihenanalyse lässt sich dabei jedoch unabhängig vom Ansatz auf zwei grundsätzliche Bedingungen reduzieren, die für eine erfolgreiche Strategie erfüllt sein müssen:

1. Das Auftreten einer untersuchten Eigenschaft der Zeitreihe muss in Form einer Handelsstrategie in eine Rendite überführbar sein.
2. Die Eigenschaft muss nachweisbar und ihr zukünftiges Eintreten auf Basis historischer Daten prognostizierbar sein.

Für den Mean Reversion-Effekt ist die erste Bedingung intuitiv erfüllt, da durch seine Existenz starke Kursbewegungen in eine Richtung als Indikator für eine Gegenbewegung verstanden werden können. Bei eintretendem Effekt lägen solche Prognosen in der Mehrheit aller Fälle richtig, so dass sich tatsächlich erfolgreiche Handelssysteme etablieren ließen.

Um diese Vermutung zu untermauern, wird in diesem Kapitel genauer untersucht, inwiefern Performance- und Risikomaße dabei durch die Intensität des Mean Reversion-Effekts beeinflusst werden. Hierfür wird zunächst ein Handelssystem entwickelt, welches Gewinne durch Eintreten des Effekts erzielt. Eine Evaluation der Strategie erfolgt dann über Simulationen auf künstlich erzeugten Kursdaten mit unterschiedlich hohen Mean Reversion-Raten.

## 3.1 Wettsysteme über Entscheidungssequenzen

Die Martingalthorie ist ein grundlegendes Teilgebiet der Wahrscheinlichkeitstheorie und der mathematischen Statistik, welche insbesondere Beachtung in Bereichen der Finanz- und Versicherungsmathematik erfährt. Mit ihr lassen sich unter anderem Fragestellungen beantworten, ob und inwiefern Wettsysteme über den Ausgang eines Wahrscheinlichkeitsprozesses anderen Systemen langfristig überlegen sein können. Da sich Finanzzeitreihen als solche Prozesse modellieren lassen, sind die Erkenntnisse der Martingalthorie ebenso auf Handelsstrategien übertragbar. Deshalb wird im Folgenden eine kurze Einführung in die Martingalthorie gegeben.

Betrachtet man Zufallsfolgen über die Ausgänge eines binären Ereignisses, wie zum Beispiel einen Münzwurf (Kopf oder Zahl), einen Roulette-Durchlauf ohne Null (Rot oder Schwarz) oder auch den Anstieg oder Abfall eines Wertpapierkurses um einen bestimmten Wert, so lassen sich Wettsysteme über deren Ausgang beschreiben. Bei diesen sogenannten Martingale-Spielen handelt es sich um Strategien, welche unter Einbeziehung der vorigen Wettausgänge den nächsten Wetteinsatz vorgeben. Es wird angenommen, dass die zur Verfügung stehenden Mittel bei Verlust der Wette um den Einsatz sinken, während sie bei gewonnener Wette um jenen Wert steigen.

Ein einfaches Beispiel ist das unter dem Begriff *Doublieren* bekannte Wettsystem, welches vor allem in Verbindung mit dem Spiel Roulette eine gewisse Popularität erreicht hat. Setzt der Spieler auf einen Ausgang und verliert, so verdoppelt er im nächsten Spiel seinen Einsatz. Verfolgt er diese Strategie bis zu einem Gewinn im  $n$ -ten Spiel, so ergibt sich für eine faire Wette ein Gewinn von  $G_n = 2^{n-1}$ , der die Summe aller voriger Verluste  $V_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1}$  um den initialen Wetteinsatz überschreitet. Bei einem initialen Wetteinsatz von 1 ist der Gesamtgewinn einer erfolgreichen Wettserie also unabhängig von  $n$  stets

$$G_n - V_{n-1} = 2^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} = 1.$$



### 3.1. Wettsysteme über Entscheidungssequenzen

Dieser positive Wert erscheint auf den ersten Blick überraschend, da erwartete Gewinnchancen fairer Einzelwetten für beide Seiten stets gleich sind. Ein Verlust für den setzenden Teilnehmer entsteht lediglich dann, wenn die Serie nach einer Reihe verlorener Wetten zum Beispiel wegen mangelnder Liquidität abgebrochen werden muss, da die kumulierten Verluste  $V_n$  den verfügbaren Betrag überschreiten. Vereinfachend betrachten wir hierfür einen gleichverteilten binären Prozess wie den Wurf einer fairen Münze.

Sind beim Doublieren genügend Mittel vorhanden, um die Verluste in einer Reihe von genau  $n - 1$  Wetten zu decken, so ergibt sich eine Chance von  $\frac{1}{2^n}$  für einen Verlust von  $V_n$ . Mit der Gewinnchance von  $1 - \frac{1}{2^n}$  ergibt sich ein konstanter Gewinn, der dem initialen Wetteinsatz entspricht. Zwar ist die Verlustchance bei hoher Liquidität verschwindend gering, dennoch gilt für den Erwartungswert des Gesamtprofits  $P$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(P) &= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n} V_n \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^n 2^{i-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1}}{2^n} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{2^n - 1}{2^n} = 0\end{aligned}$$

Die extrem geringe Eintretenswahrscheinlichkeit eines Verlustes wird also durch einen umso stärkeren Verlustwert erkaufte, der sämtliche eintretenden Gewinne ausgleicht. Obgleich also sowohl die Gewinnverteilung als auch die Verlustwahrscheinlichkeit wesentlich beeinflusst werden können, ergibt sich daher in der Summe ein Erwartungswert von 0, der ebenso auch mit einfachem Setzen eines konstanten Betrags erzielt würde.

Tatsächlich lässt sich mit der Martingal-Theorie beweisen, dass kein wie auch immer geartetes Wettsystem in der Lage sein kann, durch eine Veränderung der Einsätze den Erwartungswert des Wettausgangs zu steigern, wenn es sich bei der betrachteten Ereigniskette um ein Martingal nach Definition 2.4.8 handelt [Lus12]. Wettet ein Spieler also auf die Aus-

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten

gänge mehrerer aufeinander folgender Münzwürfe, so hat er durch Wahl des Wetteinsatzes lediglich die Möglichkeit, bei gleichbleibend neutralem Erwartungswert die Ergebnisverteilung zu manipulieren.

## 3.2 Wissenschaftliche Einordnung

Die Verwendung solcher Wettsysteme ist gerade im Bereich Casino- und Sportwetten bis heute nicht unüblich. Ebenso finden immer wieder wissenschaftliche Auseinandersetzungen mit Martingale-Spielen statt [Ork91; Ree10]. Dabei gilt natürlich auch hier, dass ohne positiven Erwartungswert einer Einzelwette kein inkrementelles Wettsystem langfristig funktionieren kann [Gri84]. Die hohe Wahrscheinlichkeit schneller Gewinne führt dazu, dass sich Strategien wie das Doublieren bis heute gewisser Beliebtheit erfreuen und Wettplattformen automatisierte Systeme auf deren Basis anbieten – auch Wetten auf Aktienkurse sind nicht unüblich [Bro]. Da durch den scheinbar sicheren Gewinn Risiken intuitiv oft falsch eingeschätzt werden, wird vor dem Einsatz von Martingale-Systemen aber häufig gewarnt [Mof16]. Geht es wiederum nur um die Manipulation der Gewinnverteilung, so können sich Martingale-Systeme als sinnvolle Werkzeuge erweisen [Tru70; Bal92].

Insgesamt erscheint die Auseinandersetzung mit Martingale-Spielen für die Beschreibung von Handelssystemen nach der Auswertung in Kapitel 3.1 nicht interessant. Das Minimalziel einer Handelsstrategie, eine positive erwartete Rendite, wird verfehlt. Trotz dieser generellen Einschränkung wird im Folgenden noch ein weiteres dieser Wettsysteme untersucht und hinterfragt, ob unter gewissen Änderungen der Grundannahmen doch im Mittel Gewinne möglich sind.

## 3.3 Progression d’Alembert

Die Progression d’Alembert ist ein für das Roulette-Spiel entwickeltes Wettsystem und wird dem französischen Mathematiker Jean Baptiste le Rond d’Alembert (1717-1783) zugeschrieben. Für die Ausgänge einer Folge binärer Ereignisse lässt es sich durch folgenden Entscheidungsprozess beschreiben:

### 3.3. Progression d'Alembert

- ▷ Zu Beginn wird eine initialer Wetteinsatz gewählt.
- ▷ Nach einer verlorenen Wette wird der letzte Wetteinsatz um den initialen Wetteinsatz gesteigert.
- ▷ Nach einer gewonnenen Wette wird der letzte Wetteinsatz um den initialen Wetteinsatz gesenkt, falls dieser nicht schon dem Startwert entspricht.

Setzt man stets auf das bisher seltener eingetretene Ereignis, so erzeugt im Fall des Szenarios Münzwurf jede Kombination von Kopf und Zahl einen Gewinn, der dem initialen Wetteinsatz entspricht. Durch den variablen Wetteinsatz ergeben sich so selbst im Fall, dass 50% der Wetten verloren werden, Gewinne. Divergiert die Anzahl der beiden Ausgänge, ergibt einen temporärer Verlust, der sich durch erneute Annäherung der Ereignisse Kopf und Zahl reduziert. Findet nach  $n$  Wetten also ein Ausgleich der Auftreten statt, ergibt sich ein Gesamtgewinn, der dem  $\frac{n}{2}$ -fachen Wert des initialen Wetteinsatzes entspricht.

Zwar treten die Ereignisse Kopf und Zahl langfristig stets mit der Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  auf - man nennt diesen Effekt, der sich durch das Gesetz der großen Zahlen ergibt, *relativen Ausgleich*. Die Annahme, dass sich die Anzahl der Auftreten von Kopf und Zahl in einer hinreichend großen Serie annähern, ist jedoch ein häufig gezogener Fehlschluss. Es gibt keine Tendenz zu diesem sogenannten *absoluten Ausgleich*.

Für die Berechnung der Differenz zwischen den Ereignissen Kopf und Zahl wird der Ereignisraum  $\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$  des  $i$ -ten Münzwurfes  $X_i$  nach  $\Omega = \{-1, 1\}$  übertragen. Bei Gleichverteilung haben diese Zufallsvariablen offensichtlich die Varianz 1. Die Gesamtdifferenz ergibt sich dann als Bernoulli-verteilte Zufallsvariable  $D_t$  nach  $t$  Ereignissen über die Summe der unabhängigen Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_t$

$$D_t = \sum_{i=1}^t X_i$$

Der Erwartungswert der Differenz entspricht der Summe der Erwartungswerte der Einzelexperimente

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_t) &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \dots + \mathbb{E}(X_t) \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 = 0\end{aligned}$$

mit einer Varianz

$$\begin{aligned}\text{Var}(D_t) &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_t) \\ &= \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_t) \\ &= t \cdot \text{Var}(X_1) = t.\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Der realisierte Gewinn der Progression d'Alembert für eine Differenz  $D_n = d$  nach  $n$  Schritten ergibt sich über die Gleichung

$$G(D_n = d) = \frac{n - d}{2}.$$

Der Gewinn ist nach  $n$  Schritten maximal, wenn die beiden Ereignisse gleich häufig auftreten, da sich für jedes der  $\frac{n}{2}$  Paare ein Gewinn ergibt. Tritt stets das gleiche Ereignis auf, entspricht  $n = d$ . In diesem Fall kann kein einziges Gewinnpaar gebildet werden, der bisher realisierte Gewinn ist 0.

Der Verlust für  $D_n = d$  ergibt sich über die Formel

$$V(D_n = d) = \frac{d \cdot (d - 1)}{2}.$$

Anders als der Gewinn steigt der Verlust quadratisch mit der Differenz, da der Einsatz mit steigender Differenz wächst.

Der Gesamtprofit  $P(D_t = d)$  ergibt sich also durch

$$\begin{aligned}P(D_n = d) &= G(D_n = d) - V(D_n = d) \\ &= \frac{n - d}{2} - \frac{d \cdot (d - 1)}{2}.\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Der Gesamtprofit  $P(D_t = d)$  ist damit entscheidend von dem Verhältnis der Werte  $t$  und  $d$  abhängig. Dieses Verhältnis ist bei Gleichverteilung aber

### 3.3. Progression d'Alembert

genau durch Gleichung 3.3.1 beschrieben. Die Varianz  $\text{Var}(D_t)$  wächst linear mit  $t$ , die erwartete Differenz entspricht der Standardabweichung  $\sigma(D_t) = \sqrt{\text{Var}(D_t)}$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(P(D_t)) &= \frac{t - \sigma(D_t)}{2} - \frac{\sigma(D_t) \cdot (\sigma(D_t) - 1)}{2} \\
 &= \frac{t - \sigma(D_t)}{2} - \frac{\text{Var}(D_t) - \sigma(D_t)}{2} \\
 &= \frac{t - \text{Var}(D_t)}{2} \\
 &\stackrel{(3.3.1)}{=} \frac{t - t}{2} = 0
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

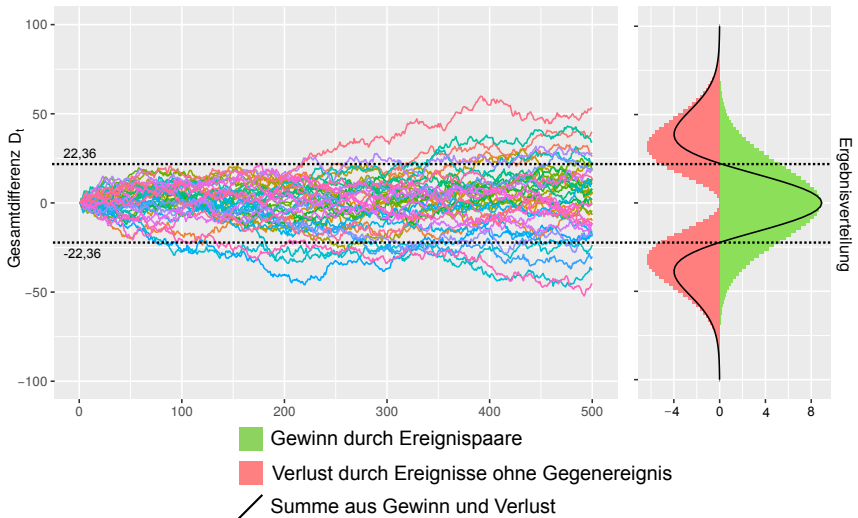
Wie durch die Erkenntnisse aus der Martingale-Theorie nicht anders zu erwarten, findet auch hier ein Ausgleich von Gewinn und Verlust statt. Damit hat auch der Profit des Wettsystems Progression d'Alembert auf unabhängigen Ereignisketten einen konstanten Erwartungswert von 0.

Beispielhaft wird dieser Zusammenhang in Abbildung 3.1 nach 500 Ereignissen illustriert. Auf der linken Seite werden mögliche Zufallsprozesse dargestellt, die rechte Seite zeigt die Verteilung von Gewinn und Verlust für die Progression d'Alembert in Abhängigkeit von der Differenz  $D_{500}$ . Der höchstmögliche Gewinn von  $G(D_{500} = 0) = 250$  multipliziert mit der Eintretenswahrscheinlichkeit  $\binom{500}{250} \cdot 2^{-500} = 3,5665\%$  bildet den Maximalpunkt mit einem Wert von 8,916. Exakt bei einer Standardabweichung  $\sigma(D_{500}) = \sqrt{\text{Var}(500)} = \sqrt{500} = \pm 22,36$  wird die Gewinnzone verlassen, da der Verlust bisher nicht ausgeglichener Ereignisse überwiegt. Die Summe der Gewinne und Verluste aller möglicher Ereignisse ist 0.

Gleichung 3.3.3 führt zu der interessanten Erkenntnis, dass der Gewinnterm nur linear, der Verlustterm jedoch quadratisch von der Standardabweichung abhängt. Bei einem günstigeren Zusammenhang der Werte  $t$  und  $\text{Var}(D_t)$  wäre Gleichung 3.3.3 nicht auf den Wert 0 reduzierbar und somit ein positiver Erwartungswert durchaus möglich.

Für hinreichend große Werte  $t$  nähern sich Binomialverteilungen approximativ Normalverteilungen an, was die angestellten Überlegungen auf die Anwendung der in Kapitel 2.5 vorgestellten datengenerierenden Prozesse erweitert. Analog ist also eine Modellierung des Prozesses mit

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten



**Abbildung 3.1.** Gewinn und Verlust der Progression d'Alembert in Abhängigkeit von  $t$  und  $D_t$  nach 500 Ereignissen. Der Gewinn übersteigt den Verlust genau im Bereich einer Standardabweichung  $\sigma(D_{500}) = \pm 22,36$ . Erfolgreich ist das System also genau dann, wenn die Differenz  $\pm 22,36$  nicht übersteigt.

$X_i \sim \mathcal{N}(0,1)$  und somit  $D_t \sim \mathcal{N}(0,t)$  möglich. Die Untersuchung ist damit auch für Wettsysteme auf Random Walk-Prozessen zutreffend.

Wäre der dem Wettsystem zugrundeliegende Prozess nun derart, dass  $t > \text{Var}(D_t)$ , so wäre auch der Erwartungswert des Profits  $\mathbb{E}(P(D_t)) > 0$ . Dies wäre genau die in Definition 2.4.16 beschriebene Eigenschaft eines Mean Reversion-Prozesses.

Zwar ist das Verhältnis von Länge zu Varianz für eindeutig unabhängige Ereignisketten wie faire Münzwürfe unumstößlich, für den Finanzmarkthandel gilt dies aber nur, wenn die zugrundeliegende Preisentwicklung tatsächlich einem Random Walk gleicht. Unter der Annahme von Mean Reversion-Effekten wäre eine positive Rendite zu erwarten. Ökonomische Zeitreihen sind zweifelsohne komplexe Systeme, für die eine separate Untersuchung interessant erscheint. Das Wettsystem wird daher im folgenden Kapitel in ein börsenorientiertes Handelssystem überführt.

## 3.4 Swing-Strategie

Um die Progression d'Alembert in ein Handelssystem umzuwandeln, sind einige wenige Transferleistungen notwendig. So muss zum einen die binäre Ereignismenge definiert werden, zum anderem müssen Wetteinsätze in Wertpapierpositionen überführt werden.

Für den ersten Schritt müssen Kurszeitreihen in eine Folge von Ereignissen überführt werden. Um eine im Abbildungsraum als stetig anzunehmende Finanzmarktzeitreihe in eine binäre Ereigniskette umzuwandeln, wird die Zeitreihe im Abbildungsraum auf eine Abtastbreite  $\Delta$  diskretisiert. Es ergibt sich dann der binäre Ereignisraum

$$\Omega = \{\text{Kurs um } \Delta \text{ gestiegen, Kurs um } \Delta \text{ gefallen}\}.$$

Da eine Wertpapierposition anders als der Wetteinsatz über ein Ereignis hinaus erhalten bleibt, muss für eine Anpassung des Wetteinsatzes lediglich die Positionsänderung in eine Transaktion überführt werden. Da sich der Wetteinsatz zwischen zwei Ereignissen stets nur um den initialen Wert ändert, ist das Handelsvolumen außerordentlich gering - ein Effekt, der sich in geringen Transaktionskosten widerspiegelt. Die Progression d'Alembert ist daher im hohen Maße für die Überführung in ein Handelssystem geeignet.

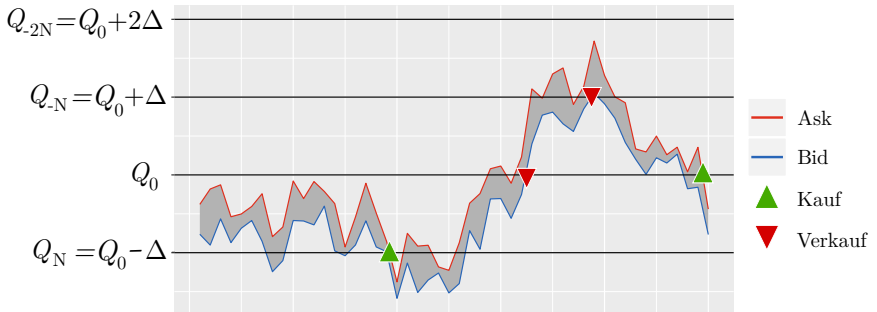
Wie schon in der Einleitung erwähnt, werden spekulative Anlagestrategien, die auf der Ausnutzung von Kursschwankungen basieren, unter dem Begriff *Swing-Trading* zusammengefasst. Die in diesem Kapitel entwickelte Handelsstrategie wird daher im Folgenden *Swing-Strategie* genannt.

### 3.4.1 Definition

Die Beschreibung der Swing-Strategie für ein Wertpapier beginnt mit folgenden Parametern:

- ▷  $N \in \mathbb{N}$  ist die Anzahl von Positionen, die bei einem Handelssignal gekauft oder verkauft werden.
- ▷  $L^{\max} \in \mathbb{N}$  ist die maximale Anzahl von Long-Positionen, bis zu dessen Erreichen Long-Positionen zugekauft werden.

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten



**Abbildung 3.2.** Vier Transaktionen der Swing-Strategie: Der hier gezeigte Handel erzeugt einen Gewinn von  $2N\Delta$  bei einer Start- und Endposition von 0 Einheiten für das gegebene Asset.

▷  $S^{\max} \in \mathbb{N}$  ist die maximale Anzahl von Short-Positionen, bis zu dessen Erreichen Short-Positionen zugekauft werden.

Geht man vereinfachend davon aus, dass  $L^{\max}$  und  $S^{\max}$  Vielfache von  $N$  sind, ist also stets eine Anzahl von Positionen im Portfolio, die in der Menge  $\{-S^{\max}, N - S^{\max}, \dots, 0, \dots, L^{\max} - N, L^{\max}\}$  enthalten ist.

Die Abbildung

$$Q : \{-S^{\max}, N - S^{\max}, \dots, 0, \dots, L^{\max} - N, L^{\max}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

beschreibe den Kurs  $Q(p) = Q_p$ , bei dessen Überschreiten  $p$  Positionen im Depot vorhanden sein sollen. Abbildung 3.2 zeigt ein einfaches Beispiel. Jedes Überschreiten einer Linie führt zu einer Transaktion, die Kurse ergeben sich aus den Parametern  $Q_0$  und  $\Delta$  mit

▷  $Q_0 \in \mathbb{R}$ : Der 0-Preis  $Q_0$  ist derjenige Preis, bei dessen Überschreiten 0 Positionen im Depot vorhanden sein sollen.

▷  $\Delta \in \mathbb{R}$ : Bei jeder Entfernung von  $\Delta$  des aktuellen Preises vom 0-Preis wird ein Kauf oder Verkauf ausgeführt.

und



$$Q_p := Q_0 - \frac{p}{N} \cdot \Delta \quad (3.4.1)$$

Wie in Definition 2.6.4 beschrieben, ist eine Handelsstrategie ein Regelwerk für die Manipulation eines Portfolios. Die Swing-Strategie verwendet genau ein Asset, so dass sich mit dem Barvermögen ein  $\mathbb{R}^2$ -wertiger Prozess  $(P_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ergibt.

Wie in Abbildung 3.2 gezeigt, wird bei der Überschreitung des Ask- oder Bid-Kurses eines durch  $Q_p$  gegebenen Preises eine Transaktion ausgeführt, die die Anzahl der Positionen im Portfolio für das Asset  $P^1$  modifiziert. Da das Portfolio für alle folgenden Überlegungen nur aus einem Asset besteht, wird  $P^1$  vereinfachend  $P$  genannt. Die Zeitreihe der gehaltenen Positionen ergibt sich durch

$$P_{t+1} = \begin{cases} \min(P_t + N, L^{\max}) & \text{falls } Q_{P_t+N} \geq A_i \\ \max(P_t - N, -S^{\max}) & \text{falls } Q_{P_t-N} \leq B_i \\ P_t & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Vermögensentwicklung dieser Handelsstrategie für konkrete Preisentwicklungen und beliebige  $Q_p$  lässt sich über das in Kapitel 2.6 vorgestellte Modell berechnen. Die Handelsstrategie ist auf diese Weise daher bereits vollständig beschrieben, so dass mit einer genauen Analyse fortgefahren werden kann.

## 3.5 Performance und Risiko

Die theoretische Überlegung, dass der Erfolg des Handelssystems im wesentlichen Maße von modellierbaren Zeitreiheneigenschaften des zu handelnden Asset-Preises abhängt, soll im Folgenden auf Basis statistischer Auswertungen überprüft werden. Für einen detaillierten Einblick werden daher mittels einer Monte-Carlo-Simulation auf Basis verschiedener DGPs mit variierenden Zeitreihenparametern Performance und Risiko untersucht.

Die Analyse wird mit der Annahme begonnen, dass sich der Asset-Preis anhand eines geometrischen Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses darstel-

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten

len lässt. Diese Art der Modellierung führt nicht nur zu einer realistischen Annäherung an Finanzmarktzeitreihen wie in Kapitel 2.5.3 beschrieben, die direkte Mean Reversion-Parametrisierung lässt zusätzlich eine genaue Bewertung des Zusammenhangs dieser Eigenschaft und gegebener Performance- und Risikomaße zu.

#### Parameter für die Erzeugung der Kursdaten

Es wird ein Startpreis von  $X_0 = 100$  Punkten<sup>1</sup> bei identischem fairem Preis  $\mu$  ohne Ask-Bid-Spread bei einer Volatilität von 20% über den simulierten Zeitraum angenommen. Untersuchungen von William Schwert zeigen, dass die annualisierte Volatilität nationaler Aktienindizes in den letzten 100 Jahren durchschnittlich etwa 20% betrug [Sch90]. Die erzeugten Kursdaten bilden daher ein Zeitintervall von einem Jahr ab.

Insgesamt werden pro Simulationsjahr 300.000 Datenpunkte erzeugt. Über ein Intervall von 250 Handelstagen entspricht das einem Wert pro Minute bei 20 Handelsstunden pro Tag. Die Mean Reversion-Rate  $\theta$  ist jedoch jeweils pro Stunde angegeben. Wird also von  $\theta = 0,0001$  gesprochen, wird für die Simulation zwischen zwei Datenpunkten eine Mean-Reversion-Rate von  $1,0001^{\frac{1}{60}} - 1$  pro Minute angenommen. In dieser Simulation wird von einem konstanten fairem Preis ( $\chi = 0$ ) ausgegangen.

#### Strategie-Parameter

Es wird von einem 0-Preis  $Q_0 = 100$  bei einem Wert  $\Delta = 1$  ausgegangen. Die Parameter  $L^{\max}$  und  $S^{\max}$  seien so gewählt, dass die maximale Anzahl an Long- oder Short-Positionen nicht erreicht wird. Es wird stets eine Position gehandelt ( $N = 1$ ).

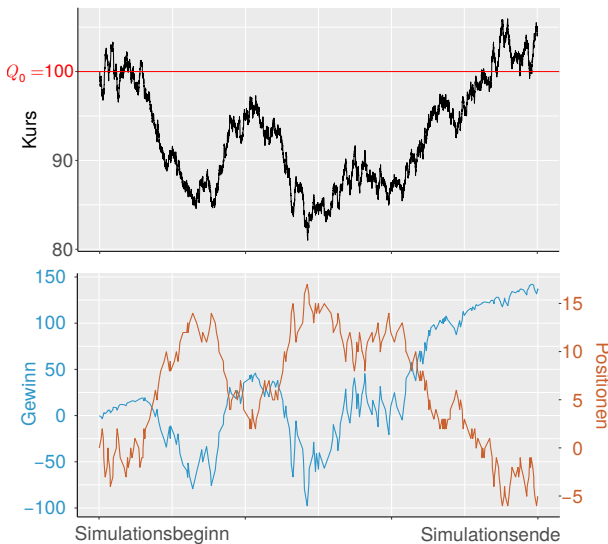
#### Beispiel

Abbildung 3.3 zeigt beispielhaft die Entwicklung der Positionen und des Gewinns einer einzelnen Simulation. Das obere Diagramm bildet eine

---

<sup>1</sup>Es wird keine konkrete Währung verwendet. In realen Märkten müssten Preise, Gewinne und Verluste noch über einen konstanten Umrechnungsfaktor in eine Währung überführt werden.

### 3.5. Performance und Risiko

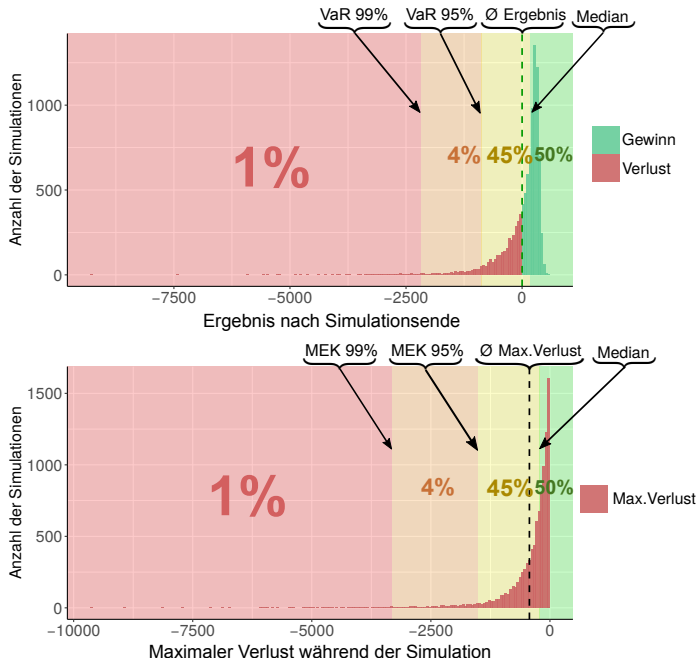


**Abbildung 3.3.** Beispielhafter Kurs (oben) mit Gewinn- und Portfolioentwicklung (unten) für  $Q_0 = \mu = X_0 = 100$  und  $\Delta = 1$

über das gerade beschriebene Modell erzeugte Kurszeitreihe ab. Auf der unteren Hälfte werden der Gewinn und die Anzahl der Positionen im Portfolio dargestellt, die sich für die genannten Strategieparameter ergeben. Es ergeben sich folgende Werte:

- ▷ **Positionen:** Es finden insgesamt 290 Transaktionen zu jeweils einer Position statt, die Simulation endet mit 4 Short-Positionen.
- ▷ **Ergebnis:** Der Gewinn nach der Simulation liegt erwartungsgemäß bei 136 Punkten (nach Gleichung 3.3.2 wären bei einem Schlusskurs von exakt 104 genau 137 Punkte zu erwarten.).
- ▷ **Maximal eingesetztes Kapital:** Bei Unterschreitung des Kurses 82 werden 18 Positionen gehalten, die durchschnittlich zum Kurs 90,50 gekauft wurden. Das entspricht einem Wert von 1.629, bei einem gleichzeitigen Verlust von 97 Punkten. Maximal wird bei 100%-iger Margin also ein Kapital von 1.726 Punkten eingesetzt.

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten



**Abbildung 3.4.** Histogramme zu Ergebnissen (oben) und maximalen Verlusten (unten) einer Monte-Carlo-Simulation der Swing-Strategie für eine Mean Reversion-Rate  $\theta = 0$  nach zwei Jahren. Der Value at Risk sowie das maximal eingesetzte Kapital (mit 0%-iger Margin) ist für verschiedene Konfidenzniveaus ablesbar.

- ▷ **Durchschnittlich eingesetztes Kapital:** Durchschnittlich werden 7 Positionen gehalten, für dessen Aufrechterhaltung im Mittel 664 Punkte gebunden sind.
- ▷ **Rendite:** Bezogen auf das maximal eingesetzte Kapital liegt die Rendite bei 7,88%, für das durchschnittlich eingesetzte Kapital ist sie 20,48%.

#### Darstellung der Ergebnisse

Für eine aussagekräftige Analyse werden pro Parametersatz jeweils 10.000 Simulationen untersucht. Ein anschaulicher Vergleich der Simulationser-

### 3.5. Performance und Risiko

gebnisse erfolgt wie in Abbildung 3.4 (oben) mittels Histogramm über die Ergebnisverteilungen. Jede Simulation wird also nach Gewinn oder Verlust einem Intervall zugeordnet. Das untere 1%-Quantil wird rot unterlegt, so dass der Value at Risk mit Konfidenzniveau von 99% an der Grenze zum orangen Bereich ablesbar ist. Dieser enthält die nächsten 4% aller Simulationsergebnisse, so dass der folgende Bereichswechsel den Value at Risk mit Konfidenzniveau von 95% darstellt. Der gelbe Bereich enthält die bezogen auf die Rendite nächstbesten 45% Simulationsergebnisse. Die Grenze zum grünen Bereich, der die besten 50% enthält, bildet daher den Median der Verteilung ab. Das durchschnittliche Ergebnis über alle Simulationen wird als gestrichelte Linie dargestellt (in diesem Fall etwa 0 Punkte). Für einen Einblick in mögliche Risiken wird außerdem ein Histogramm über die maximalen Verluste während jeder Simulation dargestellt (Abbildung 3.4 unten). Analog zum Value at Risk lässt sich hier das maximal eingesetzte Kapital für verschiedene Konfidenzniveaus ablesen. Eventuelle Margin-Anforderungen sind nicht dargestellt und müssten bei Bedarf eingerechnet werden. Es folgt eine genaue Analyse und Interpretation verschiedener Simulationsszenarien.

#### **Ergebnisse für $\theta = 0$**

Es wird mit einer Monte-Carlo-Simulation mit Mean Reversion-Rate  $\theta = 0$  begonnen. Abbildung 3.4 zeigt Ergebnis- und Verlusthistogramm dieses Szenarios über zwei Jahre. Da es sich bei den entstehenden Kurszeitreihen um Martingale handelt, ist in etwa mit einem erwarteten Gewinn von 0 zu rechnen. Tabelle 3.1 listet genaue Resultate der Monte-Carlo-Simulation für unterschiedliche Perioden von einem bis fünf Jahren. Es folgt eine Beschreibung der in der Tabelle gelisteten Werte, beispielhaft erklärt für ein Jahr:

- ▷  $\emptyset$  **Ergebnis** Der durchschnittliche Gewinn oder Verlust über 10.000 Simulationen mit den beschriebenen Parametern. Nach einem Jahr ergibt sich im Mittel ein Gewinn von 1,11. Bezogen auf den Startpreis  $X_0 = 100$  und die Anzahl getätigter Transaktionen ist dieser Gewinn vernachlässigbar gering.

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten

- ▷ **Median Ergebnis** Das obere Histogramm in Abbildung 3.4 zeigt eine linksschiefe Gewinnverteilung, bei der die Chance eines Gewinns deutlich über 50% liegt, obwohl das durchschnittliche Ergebnis nahezu 0 ist. Der positive Median beschreibt diesen Zustand. Er liegt für ein Jahr bei 97,33 und zeigt, dass in 50% der Simulationen das Ergebnis über diesem Wert liegt.
- ▷ **∅ Transaktionen** Hierbei handelt es sich um die Anzahl der Transaktionen (Kauf und Verkauf), die durchschnittlich pro Simulation ausgeführt werden. Für den Fall eines Jahres sind es im Mittel 325,93 Transaktionen.
- ▷ **∅∅ Positionen** Die Anzahl der Positionen, die innerhalb einer Simulation gehalten werden, ändert sich mit jeder Transaktion. Für die Bewertung des gebundenen Kapitals in einer Simulation ist interessant, wie viele Positionen während der Ausführung gehalten werden. Für eine einzelne Simulation würde dieser Wert mit **∅ Positionen** bezeichnet werden. Da zusätzlich über alle Simulationen gemittelt wird, ergibt sich die Bezeichnung **∅∅ Positionen**. Im Mittel werden über alle Simulationen also durchschnittlich 9,45 Positionen gehalten, wobei nicht zwischen Short- und Long-Positionen unterschieden wird.
- ▷ **∅ Max. Positionen** Auch dieser Indiktor basiert auf der Anzahl gehaltener Positionen in einzelnen Simulationen. Es wird hier jedoch nicht nach dem Durchschnitt, sondern dem jeweiligen Maximum gesucht. Die maximale Anzahl der gehaltenen Positionen ist ein wertvoller Indikator für die Bewertung des eingesetzten Kapitals. Aus dem Wert lässt sich ableiten, wie viel Kapital minimal nötig ist, um die Handelsstrategie fortzuführen. Im Fall eines Jahres liegt die maximal gehaltene Position pro Simulation also durchschnittlich bei 21,89.
- ▷ **∅ Maximaler Verlust** Durchschnittlicher maximaler Verlust (nach Definition 2.7.5) über alle Simulationen. Im Schnitt hat jede Simulation also zu einem Zeitpunkt einen Verlust von 194,21 erzielt, bevor sich der durchschnittliche Gewinn von 1,11 einstellt. Dieses durchschnittliche Worst-Case-Szenario ist ein wertvoller Indikator für die Bewertung des Risikos, welches in diesem Beispiel durch ein sehr unausgewogenes Verhältnis zum Gewinn als inakzeptabel einzustufen ist.

### 3.5. Performance und Risiko

**Tabelle 3.1.** Überblick von Performance und Risiko für  $\theta = 0$  und  $\Delta = 1$

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
∅ Ergebnis	1,11	0,22	1,05	-1,66	-9,07
Median Ergebnis	97,33	172,15	267,07	345,02	415,91
∅ Transaktionen	325,93	656,65	1.001,53	1.368,76	1.721,78
∅∅ Positionen	9,45	13,76	16,56	19,46	21,54
∅ Max. Positionen	21,89	32,01	38,91	45,86	51,00
∅ Max. Verlust	194,21	431,13	651,83	945,86	1.189,08
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	2.629,96	4.388,23	5.869,71	7.691,06	8.955,19
∅ Rendite	0,04%	0,00%	0,01%	-0,02%	-0,01%
Median Rendite	3,70%	3,92%	4,55%	4,49%	4,64%
∅ EK (100% Margin)	982,07	1.458,46	1.777,22	2.119,15	2.365,11
∅ Rendite	0,11%	0,01%	0,06%	-0,08%	-0,38%
Median Rendite	9,91%	11,80%	15,03%	15,69%	17,58%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	660,13	1.507,11	2.367,81	3.563,66	4.365,56
∅ Rendite	0,17%	0,01%	0,04%	0,04%	-0,38%
Median Rendite	14,74%	11,42%	11,28%	9,68%	9,53%
∅ EK (0% Margin)	37,53	82,66	121,22	173,50	210,94
∅ Rendite	2,96%	0,30%	0,86%	-0,96%	-0,01%
Median Rendite	259,34%	208,26%	220,32%	198,86%	197,17%
∅ Volatilität	107,57	213,03	322,39	447,67	556,93
∅ Sharpe-Ratio	0,0110	0,0010	0,0324	-0,0037	-0,0163
Median Sharpe-Ratio	0,9562	0,8081	0,8284	0,7707	0,7479

Im folgenden Block der Tabelle werden vier unterschiedliche Berechnungsgrundlagen für die Rendite verwendet, die jeweils auf verschiedenen Definitionen für das eingesetzte Startkapital beruhen. Diese ergeben sich wie folgt:

- ▷ **MEK 95% (0% Margin / 100% Margin):** Es gibt zwei Fälle, die auf dem maximal eingesetzten Kapital (nach Definition 2.7.12) für ein Konfidenzniveau von 95% für die jeweilige Periodendauer basieren. Je nach Asset sind unterschiedliche Margin-Anforderungen vorstellbar. Es werden hier die beiden Extreme untersucht, dass keine bzw. eine 100%-ige Sicherungseinlage nötig ist. Im Fall von einem Jahr liegt bei fünf Prozent der Simulationen der maximale Verlust über 660,13. Da bei einem Verlust vom 660,13 der Wert der gehaltenen Positionen

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten

durchschnittlich bei 1.969,83 liegt, ist für eine Aufrechterhaltung im Fall einer 100%-igen Margin ein Startkapital von 2.629,96 nötig.

- ▷ **ØEK (0% Margin / 100% Margin):** Die Berechnungsgrundlage für die Rendite ergibt sich hier aus dem durchschnittlich eingesetzten Kapital (nach Definition 2.7.7). Im Fall von einem Jahr liegt das eingesetzte Kapital im Schnitt bei 37,53. Da die durchschnittliche Margin bei 944,54 liegt, wird im Fall einer 100%-igen Margin ein Kapital von 982,07 benötigt.

Unabhängig von der Berechnungsgrundlage ist die durchschnittliche Rendite im gezeigten Random Walk-Fall ( $\theta = 0$ ) nahe 0%. Zwar steigt der Median des Ergebnisses mit der Periodendauer an, im etwa gleichen Maß steigt aber auch das MEK 95%. Um die Chance eines Bankrotts unter 5% zu halten, reichen für eine Periodendauer von einem Jahr noch eine Rücklage von 660,13 – für fünf Jahre liegt das MEK 95% bei 4.365,56. Unabhängig von der Anzahl der Jahre entspricht das etwa 10% des Ergebnismedians.

Zuletzt wird die durchschnittliche Volatilität der Ergebniskurven jeder Simulation dargestellt und aus dieser und dem durchschnittlichen Ergebnis das Sharpe-Ratio berechnet. Wegen des zu vernachlässigenden Gewinns ist der Wert nahe dem Nullpunkt, obwohl weder Ask-Bid-Spread, noch Transaktionskosten angenommen wurden. Insgesamt kann in diesem Szenario daher von keinem erfolgreichen Handelssystem gesprochen werden. Vertiefende Untersuchungen dieses Falls sind daher nicht interessant. Stattdessen stellt sich die Frage, ob das Handelssystem im Mittel überhaupt eine signifikante Rendite erzeugen kann. Es wird daher ein weiteres Szenario mit höherer Mean Reversion-Rate untersucht.

#### **Ergebnisse für $\theta = 0,0001$**

Für ein Szenario, bei dem eine Mean Reversion-Rate  $\theta = 0,0001$  angenommen wird, ergibt sich ein deutlich anderes Bild. Dieser Wert ist nicht zufällig gewählt, sondern wird sich in Kapitel 5 als realistisch erweisen. Abbildung 3.5 zeigt Ergebnis- und Verlusthistogramme für ein bis fünf Jahre, Tabelle 3.2 Performance- und Risikomaße. Es stellt sich nun durchschnittlich ein Gewinn ein. So ergibt sich nach einem Jahr selbst im Fall,



### 3.5. Performance und Risiko

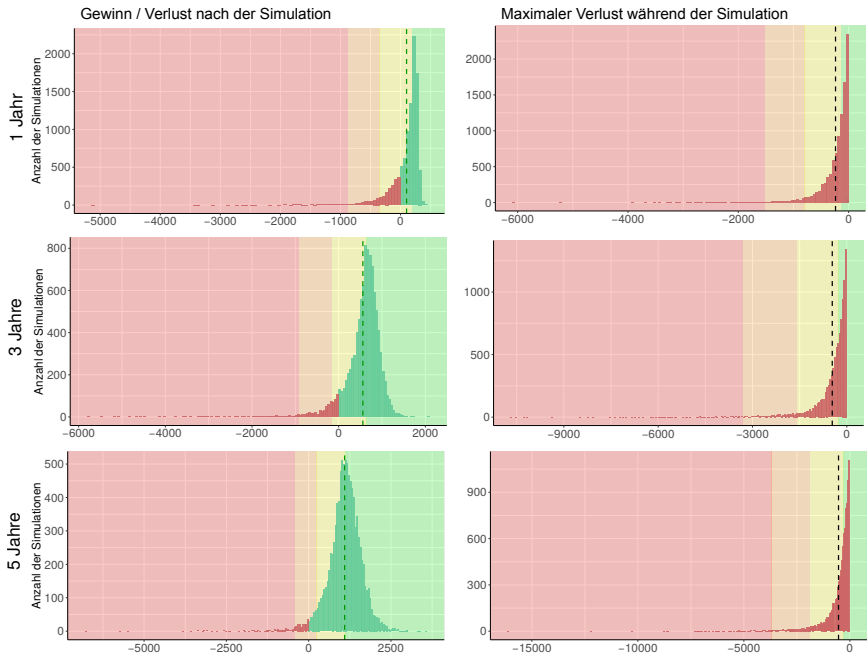
**Tabelle 3.2.** Überblick von Performance und Risiko für  $\theta = 0,0001$  und  $\Delta = 1$

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
∅ Ergebnis	100,03	310,54	558,17	825,89	1.092,39
Median Ergebnis	185,59	404,97	636,01	877,66	1.123,00
∅ Transaktionen	510,87	1.040,01	1.554,20	2.083,28	2.601,27
∅∅ Positionen	10,60	13,42	14,61	15,60	16,01
∅ Max. Positionen	25,39	33,69	38,28	42,26	44,96
∅ Max. Verlust	237,59	393,21	463,63	535,11	568,80
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	<b>3.084,39</b>	<b>4.380,19</b>	<b>5.040,24</b>	<b>5.687,58</b>	<b>6.075,72</b>
∅ Rendite	3,24%	7,09%	11,07%	14,52%	17,98%
Median Rendite	5,96%	9,25%	12,62%	15,43%	18,48%
∅ EK (100% Margin)	1.097,52	1.390,52	1.506,66	1.601,73	1.636,94
∅ Rendite	9,12%	22,33%	37,05%	51,56%	66,73%
Median Rendite	16,73%	29,12%	42,21%	54,79%	68,60%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	<b>799,73</b>	<b>1.348,14</b>	<b>1.597,04</b>	<b>1.884,49</b>	<b>2.029,03</b>
∅ Rendite	12,51%	23,03%	34,95%	43,83%	53,84%
Median Rendite	23,21%	30,04%	39,82%	46,57%	55,35%
∅ EK (0% Margin)	37,52	48,53	45,31	41,55	35,62
∅ Rendite	266,60%	639,89%	1.231,94%	1.987,68%	3.066,79%
Median Rendite	494,64%	834,47%	1.403,75%	2.112,28%	3.152,72%
∅ Volatilität	140,18	266,77	389,57	519,60	657,91
∅ Sharpe-Ratio	0,7136	1,1641	1,4327	1,5895	1,6604
Median Sharpe-Ratio	1,3097	1,5181	1,6326	1,6891	1,7069

dass das MEK 95% mit 100%-iger Margin reserviert wird, eine durchschnittliche Rendite von 3,24%. Betrachtet man das ∅EK, ist bei 100%-iger Margin eine durchschnittliche Rendite von 9,12% nach einem Jahr zu erwarten. Die Extremfälle mit 0%-iger Margin zeigen, dass sich für eine sinkende Sicherungseinlage noch bessere Werte ergeben.

Interessanterweise liegt das durchschnittliche Ergebnis nach zwei Jahren deutlich über dem Wert, der nach Extrapolation des ersten Jahres zu erwarten wäre. Der Grund liegt darin, dass der Startkurs im ersten Jahr dem Gleichgewichtsniveau des zugrundeliegenden OU-Prozesses entspricht. Mean Reversion wirkt aber umso stärker, je weiter sich der Kurs vom fairen Preis entfernt hat. So liegt der Gewinn im ersten Jahr im Mittel bei 100,03, vom vierten ins fünfte Jahr steigert sich der Gewinn durchschnittlich um 266,50.

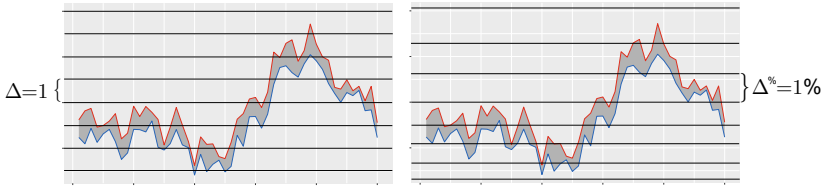
### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten



**Abbildung 3.5.** Histogramme zur Ergebnisverteilung (links) und maximalem Verlust (rechts) für Mean Reversion-Rate  $\theta = 0,0001$  für ein (oben), drei (Mitte) und fünf (unten) Jahre.

Gleichzeitig entstehen durch die Entfernung vom fairen Preis negative Effekte. Da hierdurch durchschnittlich mehr Positionen gehalten werden, steigt die zu leistende Margin. Ebenso wachsen die im maximal eingesetzten Kapital eingerechneten Reserven, da große Positionen ein höheres Risiko bedeuten. Lediglich das durchschnittlich eingesetzte Kapital sinkt, da Gewinne zu einem Ausgleich führen und nach fünf Jahren nur noch in etwa 3% der Fälle Verluste auftreten (siehe Ergebnishistogramme in Abbildung 3.5).

Insgesamt zeigt sich eine positive Entwicklung mit wachsender Periodendauer. Während das Ergebnis linear steigt, nähern sich das maximal



**Abbildung 3.6.** Links: konstante Differenz  $\Delta$  der Preisdifferenzen nach Gleichung 3.4.1. Rechts: Differenz  $\Delta\%$  relativ zum Kurs nach Gleichung 3.5.1 und 3.5.2.

eingesetzte Kapital und Margin-Anforderungen bei konstantem fairem Preis langfristig einem Maximalwert an.

Die Linksschiefe der Gewinnverteilung reduziert sich mit fortschreitender Zeit. Langfristig ist daher zu erwarten, dass sich der Ergebnismedian dem Mittel annähert. Die im Verhältnis zum Ergebnis gering ansteigende Volatilität führt zu einem steigenden Sharpe-Ratio.

### 3.5.1 Relative Differenz

Der in Gleichung 3.4.1 gezeigte lineare Zusammenhang mit konstanter Differenz  $\Delta$  wird im Folgenden einem weiteren Ansatz gegenübergestellt. Er sieht vor, dass sich die Preisdifferenz wie im rechten Diagramm von Abbildung 3.6 relativ zum Kurs entwickelt. Entspricht ein Wert  $\Delta = 1$  bei einem Kurs von 100 noch einem Unterschied vom einem Prozent, so sind es bereits zwei Prozent bei einem Wert von 50. Wegen der geometrischen Entwicklung der Zeitreihe werden Transaktionen also seltener, je tiefer der Kurs sinkt und umgekehrt. Passte man den Wert  $\Delta$  relativ zum aktuellen Kurs an, ließe sich stattdessen eine weniger schwankende Anzahl an Transaktionen erwarten:

$$\ln(Q_p) := \ln(Q_0) - \frac{p}{N} \cdot \Delta \quad (3.5.1)$$

Der Wert  $\Delta$  definiert nun eine relative Änderung zum Grundpreis, der Wert  $\Delta \approx 0,00995$  entspricht dabei einer Differenz von einem Prozent zum

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten

**Tabelle 3.3.** Vergleich von Performance und Risiko für  $\Delta = 1$  und  $\Delta^{\%} = 1\%$

Intervall Modus	1 Jahr		5 Jahre	
	$\Delta = 1$	$\Delta^{\%} = 1\%$	$\Delta = 1$	$\Delta^{\%} = 1\%$
∅ Ergebnis	100,03	95,45	1.092,39	1.064,51
Median Ergebnis	185,59	186,88	1.123,00	1.152,01
∅ Transaktionen	510,87	506,23	2.601,27	2.531,56
∅∅ Positionen	10,60	10,78	16,01	16,13
∅ Max. Positionen	25,39	25,57	44,96	44,12
∅ Max. Verlust	237,59	239,81	568,80	520,92
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	<b>3.084,39</b>	<b>3.087,61</b>	<b>6.075,72</b>	<b>5.686,90</b>
∅ Rendite	3,24%	3,09%	17,98%	18,72%
Median Rendite	5,96%	6,05%	18,48%	20,26%
∅ EK (100% Margin)	1.097,52	1.117,28	1.636,94	1.648,63
∅ Rendite	9,12%	8,54%	66,73%	62,04%
Median Rendite	16,73%	16,73%	68,60%	67,14%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	<b>799,73</b>	<b>787,51</b>	<b>2.029,03</b>	<b>1.715,84</b>
∅ Rendite	12,51%	12,12%	53,84%	62,04%
Median Rendite	23,21%	23,73%	55,35%	67,14%
∅ EK (0% Margin)	37,52	39,30	35,62	35,20
∅ Rendite	266,60%	242,83%	3.066,79%	3.024,06%
Median Rendite	494,64%	475,71%	3.152,72%	3.272,64%
∅ Volatilität	140,18	140,93	657,91	636,07
∅ Sharpe-Ratio	0,7136	0,6772	1,6604	1,6739
Median Sharpe-Ratio	1,3097	1,3260	1,7069	1,8111

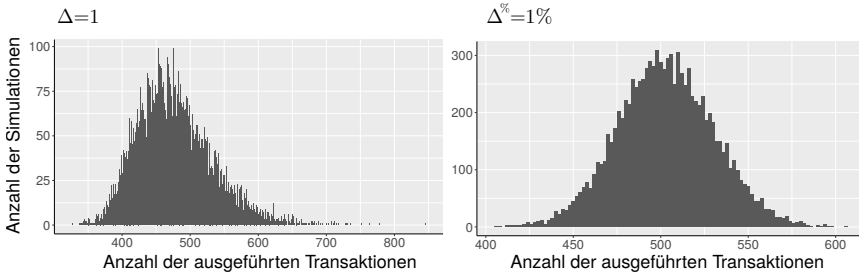
benachbarten Kauf- oder Verkaufspreis. Für eine direkte Angabe in Prozent wird vereinfachend  $\Delta^{\%}$  definiert mit

$$\Delta = \ln \left( 1 + \Delta^{\%} \right)$$

$$\iff \Delta^{\%} = e^{\Delta} - 1, \quad (3.5.2)$$

so dass sich die genannte Steigerung von einem Prozent für  $\Delta^{\%} = 1\%$  ergibt.

### 3.5. Performance und Risiko



**Abbildung 3.7.** Histogramm über die Anzahl an Transaktionen nach einem Jahr für konstante (links) und relative (rechts) Preisdifferenz

#### Ergebnisse für $\theta = 0,0001$ , $\Delta\% = 1\%$

Da die Kursdifferenz  $\Delta\%$  nun ebenso wie der Kurs relativ wächst, ergibt sich ein homogeneres Zeitintervall zwischen zwei Transaktionen. Wie Abbildung 3.7 zeigt, ist die Anzahl der Transaktionen dadurch schwankungsärmer.

Tabelle 3.3 zeigt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse einer Monte-Carlo-Simulation mit absolutem Wert  $\Delta = 1$  und relativem Wert  $\Delta\% = 1\%$ . Die Unterschiede sind gerade für das erste Jahr subtil, da ein Prozent vom Startwert und 0-Preis  $Q_0 = 100$  dem Wert 1 entsprechen und sich diese Modifikation erst bei größerer Entfernung spürbar auswirkt. Deutlichere Unterschiede ergeben sich nach fünf Jahren. Ein großer Teil der untersuchten Maße ist nahezu identisch, das MEK ist für  $\Delta\% = 1\%$  aber etwa um 15% geringer als für den absoluten Wert  $\Delta = 1$ . Da eine spürbare Reduzierung dieses wichtigen Risikoindikators viel zum erfolgreichen Einsatz dieser Strategie beitragen kann, werden folgende Untersuchungen auf einer relativen Kursdifferenz aufbauen.

#### 3.5.2 Wahl des 0-Preises $Q_0$

Es wurde bei den Bewertungen bei den Monte-Carlo-Simulationen bisher davon ausgegangen, dass der 0-Preis  $Q_0$  der Swing-Strategie dem fairen Preis  $\mu$  und dem Startkurs  $X_0$  entspricht. Zwar ist  $Q_0 = \mu$  intuitiv der Idealfall, da das Handelssystem langfristig gegen eine komplette Liquidation

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten

**Tabelle 3.4.** Vergleich von Performance und Risiko für abweichende Parameter  $X_0, \mu$  und  $Q_0$  nach einem Jahr

	$X_0$	$120$	$120$	$120$	$120$	$100$
	$\mu$	$100$	$100$	$120$	$120$	$120$
	$Q_0$	$100$	$80$	$100$	$80$	$100$
$\emptyset$ Ergebnis		238,07	349,80	84,57	67,53	40,29
Median Ergebnis		376,78	439,65	234,82	266,89	122,98
$\emptyset$ Transaktionen		524,49	546,74	482,54	505,38	464,26
$\emptyset\emptyset$ Positionen		16,51	36,81	18,71	40,31	12,38
$\emptyset$ Max. Positionen		31,49	53,71	31,95	54,22	29,09
$\emptyset$ Max. Verlust		396,78	414,20	441,16	855,34	309,08
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>		4.191,75	5.968,76	4.234,27	7.351,76	3.716,60
$\emptyset$ Rendite		5,70%	5,86%	2,00%	0,92%	1,08%
Median Rendite		8,99%	7,37%	5,55%	3,63%	3,31%
$\emptyset$ EK (100% Margin)		1.719,03	3.775,46	1.968,33	4.249,30	1.274,09
$\emptyset$ Rendite		13,85%	9,27%	4,30%	1,59%	3,16%
Median Rendite		21,92%	11,65%	11,93%	6,28%	9,65%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>		1.357,67	1.134,60	1.357,95	2.482,31	928,59
$\emptyset$ Rendite		17,54%	30,83%	6,23%	2,73%	4,34%
Median Rendite		27,75%	38,78%	17,29%	10,80%	13,24%
$\emptyset$ EK (0% Margin)		37,52	94,31	96,95	217,87	46,38
$\emptyset$ Rendite		266,60%	370,91%	87,23%	30,99%	86,87%
Median Rendite		494,64%	466,48%	242,21%	122,50%	265,16%
$\emptyset$ Volatilität		294,46	428,13	260,70	534,96	111,31
$\emptyset$ Sharpe-Ratio		0,7967	0,8170	0,3244	0,1262	0,3619
Median Sharpe-Ratio		1,2831	1,0269	0,9007	0,4989	1,1048

der Bestände strebt. Allerdings ist der Fall, dass der Startkurs  $X_0$  bereits dem fairen Preis entspricht, derjenige Fall mit den geringsten kurzfristigen Gewinnmöglichkeiten. Bevor sich der Mean Reversion-Effekt spürbar auswirken kann, muss sich der Kurs in diesem Fall nämlich erst vom fairen Preis entfernen.

Tabelle 3.4 zeigt daher eine Auswertung fünf unterschiedlicher Szenarien mit anderer Ausgangslage. Offensichtlich spielt die Konstellation zwischen  $X_0, Q_0$  und dem fairen Preis  $\mu$  eine große Rolle, durchschnittliche Gewinne schwanken nach einem Jahr von 40,29 bis 349,80.

Im ersten Szenario ( $X_0 = 120, \mu = Q_0 = 100$ ) weicht der Startkurs um 20% von  $Q_0$  ab. Für  $\Delta^{\%} = 1\%$  startet jede Simulation direkt mit 18 Short-

### 3.5. Performance und Risiko

Positionen, da erst der Kurs  $Q_{-19} = 100 \cdot 1,01^{19} = 120,81$  den Startkurs  $X_0$  überschreitet.

Die Simulationen enden durchschnittlich bei einem Kurs von 111,98. Der Schlusskurs liegt im Mittel also etwa 8 Punkte unter dem Startpreis, was den Einfluss des fairen Preises  $\mu = 100$  demonstriert. Die Anzahl der offenen Short-Positionen sinkt daher im Mittel auf 9,7. Der so entstehende Gewinn von 238,07 liegt deutlich über bisher simulierten Wert von 95,45 für ein Jahr (aus Tabelle 3.3). Zwar steigt das MEK spürbar, selbst mit 100%-iger Margin ergibt sich aber eine Rendite von 5,70%.

Es stellt sich die Frage, ob ein noch geringerer 0-Preis zu noch besseren Ergebnissen führen würde. Die Antwort liefert das zweite Szenario ( $X_0 = 120, \mu = 100, Q_0 = 80$ ). Tatsächlich steigt der Gewinn auf 349,80 an. Obwohl die Simulationen nun mit 40 Short-Positionen starten, sinkt das MEK bei 0%-iger Margin auf 1.134,60. Führt man den Gedanken fort, erscheint es sinnvoll,  $Q_0$  bei unterschiedlichen Werten für  $\mu$  und  $X_0$  möglichst weit entfernt zu positionieren, um aus der erwarteten Bewegung zu profitieren.

Natürlich setzt dieser Gedanke voraus, dass der faire Preis  $\mu$  bekannt ist und zwischen  $X_0$  und  $Q_0$  liegt. Die Szenarien der dritten und vierten Spalte der Tabelle 3.4 entsprechen den ersten beiden Szenarien mit dem Unterschied, dass der faire Preis  $\mu$  dem Startkurs  $X_0$  entspricht. Für den Wert  $Q_0 = 100$  ergibt sich in diesen Szenarien ein nahezu identisches MEK bei 0%-iger Margin von 1.357, der sich erst in den Nachkommastellen unterscheidet. Die Wahl eines entfernteren 0-Preises  $Q_0 = 80$  führt jedoch zu einem wesentlich höheren Kapitaleinsatz von 2.482,31 statt 1.134,60.

Da der faire Preis für reale Kursdaten nur approximiert werden kann, ist die Gewinnsteigerung durch ein entfernter Wert  $Q_0$  nur mit hohem Risiko zu erreichen. Das Resultat hängt wesentlich stärker von der Präzision des geschätzten fairen Preises ab, weshalb eine sicherheitsorientierte Parameterwahl ratsam erscheint. Berechnet man die Rendite mit dem jeweils höheren MEK für  $Q_0 = 100$  oder  $Q_0 = 80$ , so ergeben sich die besseren Werte für Parameter  $Q_0$  möglichst nahe dem fairen Preis  $\mu$ . Die folgenden Auswertungen auf Realmarktdaten orientieren sich an dieser Erkenntnis.

Die fünfte Spalte zeigt ein weiteres, bisher nicht beachtetes Szenario, in dem sich die Kurszeitreihe aktiv von  $Q_0 = X_0 = 100$  entfernt. Der

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten

faire Preis liegt bei  $\mu = 120$ , so dass die Simulation durchschnittlich mit einem Preis von 107,66 und 6,22 Short-Positionen endet. Zwar ergibt sich auch hier noch ein Gewinn, mit 40,29 fällt das durchschnittliche Ergebnis aber deutlich geringer aus. Bei strengster Berechnungsgrundlage liegt die Rendite lediglich bei 3,31%.

Zwar würden sich mit längerer Simulationsdauer alle Szenarien annähern, so dass Differenzen zwischen  $Q_0$ ,  $\mu$  und  $X_0$  zumindest bei ausreichend langem Zeitraum nichts am generellen Erfolg der Strategie für  $\theta > 0$  ändern. Die Kenntnis des fairen Preises  $\mu$  sowie eine geeignete Wahl des Parameters  $Q_0$  können aber kurzfristig zu einer Vervielfachung des Gewinns führen. In Kapitel 4 wird sich daher ausführlich mit Schätzverfahren für den fairen Preis beschäftigt.

#### 3.5.3 Variabler fairer Preis

Bei den bisherigen Monte-Carlo-Simulation wurde von einem konstanten fairen Preis ausgegangen, obwohl dieses Szenario langfristig nicht realistisch erscheint. Die Einpreisungsrate wird daher auf  $\chi = 0,00005$  pro Stunde geändert.

Natürlich ist interessant, welchen Einfluss diese Änderung auf die Performance der Handelsstrategie hat. Insbesondere stellt sich aber die Frage, welche Konsequenz hieraus für den Parameter  $Q_0$  gezogen werden soll. Da sich  $Q_0 = \mu$  im konstanten Fall als geeignete Wahl herausgestellt hat, erscheint eine variable Anpassung des 0-Preises  $Q_0$  für den Fall  $\chi > 0$  ratsam.

Sei  $Q_{0,t}$  der 0-Preis für den Zeitpunkt  $t$ , so dass eine zeitliche Anpassung möglich ist. Es werden nun zwei Fälle verglichen. Zum einen wird der Fall  $Q_{0,t} = \mu_0$  untersucht, in dem der 0-Preis wie bisher konstant auf das anfängliche Gleichgewichtsniveau gesetzt wird. Zum anderen wird der Gegenentwurf  $Q_{0,t} = \mu_t$  analysiert, bei dem mit jedem Zeitschritt eine Anpassung an  $\mu_t$  erfolgt.

Die Ergebnisse beider Szenarien sind für ein und fünf Jahre in Tabelle 3.5 dargestellt. Da sich der gleitende 0-Preis im Fall  $Q_{0,t} = \mu_t$  stets in gleiche Richtung wie der Kurs entwickelt, ist die Differenz beider Zeitreihen wesentlich schwankungsärmer als der Kurs selbst. Das führt dazu, dass die Anzahl der Transaktionen sich mehr als halbiert. Damit sinkt auf der einen



### 3.5. Performance und Risiko

**Tabelle 3.5.** Effekt der variablen Anpassung des 0-Preises  $Q_{0,t}$  im Fall eines fairen Preises  $\mu_t$

Intervall Modus	1 Jahr		5 Jahre	
	$Q_{0,t} = \mu_0$	$Q_{0,t} = \mu_t$	$Q_{0,t} = \mu_0$	$Q_{0,t} = \mu_t$
∅ Ergebnis	54,58	37,68	630,35	380,16
Median Ergebnis	168,34	106,93	997,28	526,08
∅ Transaktionen	506,06	237,74	2.531,31	1.197,66
∅∅ Positionen	11,39	7,33	21,55	10,92
∅ Max. Positionen	26,82	17,18	53,25	29,69
∅ Max. Verlust	277,75	176,05	1.066,22	517,73
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	3.338,74	2.116,27	8.700,15	4.433,01
∅ Rendite	1,63%	1,78%	7,25%	8,58%
Median Rendite	5,04%	5,05%	11,46%	11,87%
∅ EK (100% Margin)	1.188,69	569,54	2.299,49	1.163,81
∅ Rendite	4,59%	6,62%	27,41%	32,67%
Median Rendite	14,16%	18,78%	43,37%	45,20%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	925,04	745,77	3.907,36	1.761,01
∅ Rendite	5,90%	5,05%	16,13%	21,59%
Median Rendite	18,20%	14,34%	25,52%	29,88%
∅ EK (0% Margin)	49,64	33,39	144,68	71,91
∅ Rendite	109,94%	112,86%	435,68%	528,69%
Median Rendite	339,09%	320,27%	689,29%	731,61%
∅ Volatilität	151,19	95,85	657,91	352,32
∅ Sharpe-Ratio	0,3610	0,3931	0,9581	1,0790
Median Sharpe-Ratio	1,1134	1,1157	1,7069	1,4932

Seite zwar auch der Gewinn um etwa ein Drittel, ebenso fällt aber auch die durchschnittlich gehaltene Anzahl der Positionen signifikant – nach fünf Jahren kommt es hier etwa zu einer Halbierung. Diese Entwicklung führt dazu, dass die Rendite für einen gleitenden 0-Preis nach fünf Jahren in jedem Fall bessere Durchschnittswerte aufweist als für den konstanten 0-Preis.

Eine variable Anpassung des 0-Preises ist also zumindest nach den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation einem konstanten Wert überlegen. Zur Verifizierung wird diese These in Kapitel 5 auch für Realmarktdaten überprüft, wo dieses Resultat bestätigt wird.

### 3. Martingalsysteme in Finanzmärkten

#### 3.5.4 Fazit

In diesem Kapitel wurde mit der Swing-Strategie ein Handelssystem vorgestellt, welches potentiellen Über- und Unterreaktionen einer Finanzmarktzeitreihe durch gegenläufige Transaktionen entgegnet. Die Auswertung verschiedener Monte-Carlo-Simulationen zeigt, dass sich hierdurch im Mittel Gewinne generieren lassen, wenn es sich bei der Kurszeitreihe um einen Mean Reversion-Prozess handelt.

Der Gewinn ist dabei nicht nur stark von der Mean Reversion-Rate abhängig. Die Kenntnis des fairen Preises hat ebenso sowohl für Performance als auch Risiko große Auswirkungen – gerade kurzfristig führt die Einbeziehung zu deutlichen Verbesserungen. Für die Optimierung der Swing-Strategie ist die Schätzung der Parameter für die datengenerierenden Prozesse der Kurszeitreihen essentiell.

Wegen der zentralen Stellung der Ornstein-Uhlenbeck-Parameter wendet sich das nächste Kapitel der Bereitstellung von Verfahren für die Identifikation und Einordnung von Mean Reversion zu. Sollte es gelingen, datengenerierende Prozesse für Realmarktdaten präzise nachzubilden, so wäre dies ein großer Schritt hin zu einer erfolgreichen Verwendung der Swing-Strategie.

# Univariate Mean Reversion

Das vorige Kapitel wurde mit der Aussage begonnen, dass für die Entwicklung erfolgreicher Handelsstrategien zwei Voraussetzungen erfüllt sein müssen. Die erste, nämlich die Fähigkeit, aus einer gegebenen Systematik eine Überrendite zu generieren, wurde für Mean Reversion bereits nachgewiesen. Diese Erkenntnis allein ist jedoch wertlos, wenn der Effekt nicht in Realmarktdaten auftritt. Im Folgenden wird daher überprüft, ob der Effekt nachweisbar und sogar prognostizierbar ist. Es sind hierfür umfassende Untersuchungen mit der Zielsetzung empirischer Beweise für dessen Auftreten notwendig.

In diesem Kapitel werden daher Verfahren definiert, die eine kritische Auseinandersetzung mit der Existenz von Mean Reversion erlauben. Hierbei geht es nicht nur um die Stärke des Mean Reversion-Effekts, sondern ebenso um die Analyse des fairen Preises und dessen Änderungsrate. Hierfür werden Methoden beschrieben, die sich der Parameterschätzung geometrischer OU-Prozesse mit fairen Preisen widmen. Zum einen bilden diese Daten ein geeignetes Fundament für eine realistische Monte-Carlo-Simulation, zum anderen können hiermit Parameter für die Swing-Strategie optimiert werden.

## 4.1 Wissenschaftlicher Überblick

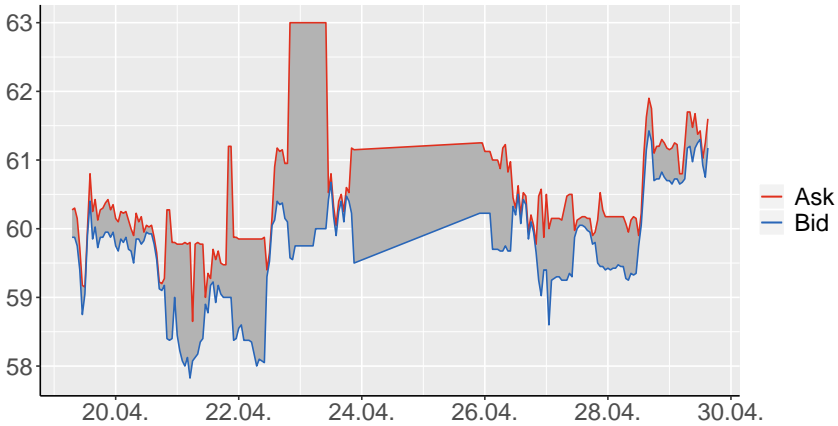
Tversky und Kahneman zeigten bereits im Jahr 1981, dass Aktienmarktteilnehmer zu Überreaktionen neigen. Seit Lo und MacKinlay dieses als Mean Reversion-Effekt bekannte Phänomen erstmals im Jahr 1988 formalisiert haben, ist die Frage nach dessen Existenz permanenter Bestandteil des wissenschaftlichen Diskurses im Forschungsbereich Finanzmarktanalyse. Für die Identifikation des Effekts haben sich seither verschiedene

#### 4. Univariate Mean Reversion

Hypothesentests etabliert. Allen voran ist der bereits 1979 veröffentlichte augmentierte Dickey-Fuller-Test [DF79] zu nennen. Mit ihm lässt sich die Nullhypothese eines Random Walks gegen die Alternative eines negativ autokorrelierten Prozesses testen. Da letzterer die in dieser Arbeit getroffenen Anforderungen eines Mean Reversion-Prozesses erfüllt, lässt sich dieser direkt als Mean Reversion-Test verstehen. In den letzten Jahrzehnten wurde er in zahlreichen Veröffentlichungen verwendet, um rückläufige Kursbewegungen in verschiedenen Marktsegmenten zu untersuchen und vorherzusagen [PT92; CRU93; Mag06]. Zusätzlich ist der ebenfalls etablierte Phillips-Perron-Test mit alternativer Teststatistik zu nennen [PP88], das 1995 vorgestellte ADF-GLS-Verfahren versucht zusätzlich typische Charakteristika von Finanzmarktzeitreihen zu berücksichtigen [CL95]. Während der Mean Reversion-Effekt von einer Seite bezweifelt wurde (beispielsweise [Jeg91; McQ92]), zeigt eine 2004 von Gropp veröffentlichte umfassende Untersuchung mit Hilfe des augmentierten Dickey-Fuller-Tests mit US-Aktienmarktdaten 1926 bis 1998 deutliche Hinweise, die für den Mean Reversion-Effekt sprechen. Über ein Bootstrapping-Verfahren approximierte Mukherji im Jahr 2011 Verteilungen stochastischer Prozesse und zeigte, dass sich der Mean Reversion-Effekt in den letzten Jahrzehnten verringert hat, aber nach wie vor existiert [Muk11].

Ziel dieses Kapitels ist es, nicht nur die Existenz von Mean Reversion in gegebenen Zeitreihen zu untersuchen. Unter Zuhilfenahme des Ornstein-Uhlenbeck-Modells soll auch die Stärke des Effekts quantifiziert und ein fairer Preis geschätzt werden. Ähnliche Versuche wurden erstmals von Poterba und Summers im Jahr 1988 unternommen, indem sie unter Annahme des Mean Reversion-Effekts einen Random Walk-Prozess mit einer stationären Komponente kombinierten, um beobachtete negative Autokorrelationen in einem stochastischen Prozess darzustellen [PS88]. Fama und French bestätigten im selben Jahr eine hohe Vorhersagequalität dieses Modells für einen Zeithorizont von drei bis fünf Jahren durch die Analyse von US-Aktienmarktdaten von 1926 bis 1985 [FF88]. Weitere Modelle wie der Wurzeldiffusionsprozess oder der hier verwendete Ornstein-Uhlenbeck-Prozess basieren auf der gleichen Kombination von Zufall und Mean Reversion-Komponente und finden vor allem bei der Vorhersage von Finanzmarktvolatilität ([SZ99]), Zinssätzen ([JYC09]) und bei der Untersuchung von langfristigen Gleichgewichten mehrerer Wert-

## 4.2. Identifikation von Mean Reversion



**Abbildung 4.1.** Ask- und Bidkurse Ölpreises (Western Texas Oil) im April 2015 in einem illiquiden Markt: Starke Spread-Schwankungen durch schwankende Abgebots- und Nachfragerlage führen zu starker, jedoch nicht ausnutzbarer Mean Reversion in Ask- und Bid-Preisen.

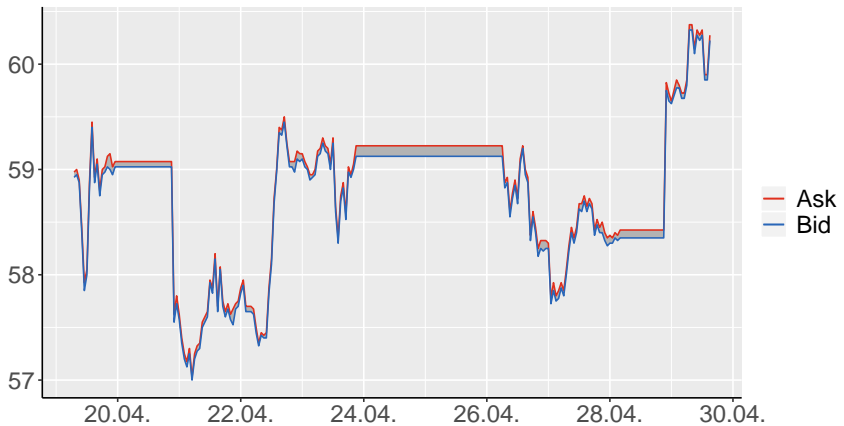
papiere ([Vas77; Dua94; Lew09]) Verwendung. Sie wurden in einigen Studien auch direkt eingesetzt, um faire Preise einzelner Assets zu ermitteln [CLO95; FHC02; BP18]. Barndorff-Nielsen gibt einen detaillierten Überblick über den Einsatz von Ornstein-Uhlenbeck-Modellen im Bereich der Finanzmarktanalyse [BS01].

In diesem Kapitel wird der Versuch unternommen, die Vorhersagequalität eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses durch eine erweiterte Modellierung mit variablem fairem Preis zu verbessern. Durch eine Untersuchung aller Varianzverhältnisse wird für jede Finanzmarktzeitreihe ein individueller Vorhersagehorizont bestimmt, für den die Parameter für das erweiterte Ornstein-Uhlenbeck-Modell geschätzt werden.

## 4.2 Identifikation von Mean Reversion

Die Suche nach Mean Reversion in Finanzmarktzeitreihen beginnt mit einer überraschenden Erkenntnis: Führt man eine separate Untersuchung

#### 4. Univariate Mean Reversion



**Abbildung 4.2.** Ask- und Bidkurse Ölpreises (Western Texas Oil) im April 2015 in einem liquiden Markt: Durchgängig geringe Spreads lassen eine deutlich bessere Abschätzung des realen Marktwert zu.

auf Ask- und Bid-Zeitreihen verschiedenster Finanzprodukte durch, so ist fast immer Mean Reversion zu erkennen - dies gilt insbesondere in illiquiden Märkten. So zeigen die in Abbildung 4.1 dargestellten Ask- und Bid-Kurse der Ölsorte Western Texas Intermediate teils große Schwankungen mit deutlicher Neigung zur Rückkehr zum gleitenden Durchschnitt. In der Nacht des 23. Aprils steigt der Ask-Kurs für wenige Stunden um über 3% auf 63 Dollar pro Barrel, nur um dann bei Börsenöffnung wieder auf einen Wert um 61 Dollar zu sinken. Zwar ist diese typische Tendenz zum Ausgleich von Überreaktionen sowohl im Ask- als auch Bid-Kurs erkennbar, jedoch folgen diese Bewegungen hier keinem gemeinsamen Muster. So ergibt sich aus einem vermeintlich überhöhten Ask-Kurs hier keine merklich höhere Chance auf einen sinkenden Bid-Kurs und umgekehrt.

Stattdessen lassen große Distanzen zwischen Ask- und Bid-Kurs nur die Prognose eines sinkenden Spreads zu. Der Spread selbst offenbart also einen starken Mean Reversion-Effekt und überträgt diesen auf Ask- und Bid-Kurse. Die Vorhersagbarkeit des Spreads lässt sich jedoch nicht in Form von Arbitrage-Handelssystemen ausnutzen. Abbildung 4.2 zeigt im selben Zeitbereich die Kursdaten in einem Markt mit durchgängig

## 4.2. Identifikation von Mean Reversion

hohem Angebot und hoher Nachfrage, die im Vergleich deutlich schwächere Bewegungen und geringere Mean Reversion aufzeigen. Dennoch führt der geringe konstante Spread natürlich nicht zu einer schlechteren Performance in einem Handelssystem.

Es bleibt also zunächst nur die Erkenntnis, dass sich aus Mean Reversion in Ask- und Bid-Kursen allein kein Aufschluss über die Nutzbarkeit in Handelssystemen ableiten lässt. Hierfür ist ein Vorverarbeitungsschritt nötig, der die Mean Reversion des Spreads von der Mean Reversion des Marktwerts trennt. Es wird daher ein Verfahren vorgestellt, welches Ask- und Bid-Kurse zu einem Kurswert kombiniert, der nur ausnutzbare Schwankungen beinhaltet und Spread-Schwankungen ignoriert.

### 4.2.1 Spread-Bereinigung

Angenommen, Ask- und Bid-Kurs des betrachteten Finanzprodukts näherten sich bei sinkendem Spread einem gemeinsamen Kurswert  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  an, der den transaktionskostenfreien Marktwert darstellt. Dieser Wert ist durch Kenntnis von Ask und Bid zwar approximierbar, gerade in illiquiden Märkten aber nur unpräzise. Die in Abbildung 4.2 gezeigten Kursdaten lassen eine wesentlich präzisere Aussage über den aktuellen Marktwert zu als die in Abbildung 4.1 dargestellten Werte.

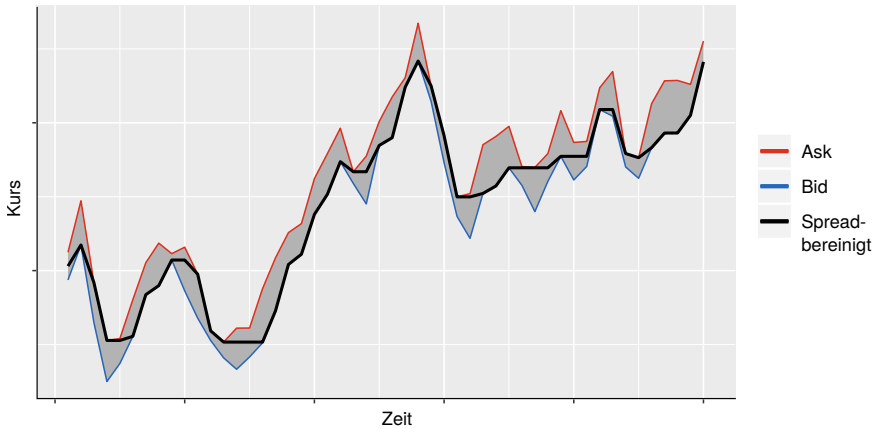
So ist zwar anzunehmen, dass der Marktwert in dem von Ask- und Bid-Kurs aufgespannten Bereich liegt, die Distanz von Ask- und Bid-Kurs zu diesem Wert ist jedoch unbekannt. Der hohe Spread kann sowohl Ausdruck eines zu hohen Ask- oder zu niedrigen Bid-Kurses sein.

### Univariate Vorverarbeitung

Da sich aus Ask- und Bid-Kurs nicht der genaue Marktwert ablesen lässt, wird die Schwankungsbreite in dem aufgespannten Bereich minimiert. Die Zeitreihe  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  wird daher so gewählt, dass sie mit minimaler Bewegung innerhalb der möglichen Grenzen von Ask- und Bid-Kurs bleibt:

$$X_{t+1} = \begin{cases} A_{t+1} & \text{falls } A_{t+1} < X_t \\ B_{t+1} & \text{falls } B_{t+1} > X_t \\ X_t & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

#### 4. Univariate Mean Reversion



**Abbildung 4.3.** Ask, Bid und Spread-bereinigter Kurs für Mean Reversion-Untersuchung

Durch die Reduktion auf durch den Ask-Kurs gesteuerte Abwärtsbewegungen, sowie durch den Bid-Kurs gesteuerte Aufwärtsbewegungen werden nur Schwankungen erfasst, die zu profitablen Transaktionen führen können. Jegliche Art irrelevanter Schwankung wird damit ebenso wie die nicht ausnutzbare Mean Reversion-Komponente des Spreads eliminiert. Für alle möglichen Zeitreihen in dem durch Ask- und Bid-Kurs aufgespannten Bereich wird so jene mit der minimalen Varianz der Inkremente erzeugt. Ist die in Definition 2.4.16 gegebene Mean Reversion-Bedingung hierfür erfüllt, so ist sie es auch für alle anderen Zeitreihen, die innerhalb des Ask-Bid-Bereiches liegen.

Ist bei dieser Spread-bereinigten Zeitreihe  $(X_f)_{t \in \mathbb{T}}$  weiterhin Mean Reversion zu erkennen, so ließe sich in dem untersuchten Zeitraum über die vorgestellte Swing-Strategie Gewinn erzielen. Der Effekt ist in diesem Fall signifikant genug, um auch die durch den Spread entstehenden Kosten zu decken.



## 4.3 Ornstein-Uhlenbeck-Fitting

Das in Kapitel 2.5.3 vorgestellte Ornstein-Uhlenbeck-Modell mit variablem fairem Preis generiert Mean Reversion-Prozesse über folgende definierende Parameter:

- ▷ **Startpreis**  $X_0$
- ▷ **Startwert für den fairen Preis**  $\mu_0$
- ▷ **Mean Reversion-Rate**  $\theta$
- ▷ **Diffusion**  $\sigma$
- ▷ **Einpreisungsrate**  $\chi$

Nimmt man vereinfachend an, Realmarktdaten verhielten sich wie Realisationen geometrischer OU-Prozesse, so wären Vorhersagen über zukünftige Elemente durch die Kenntnis dieser modellbildenden Variablen möglich. Es wird daher untersucht, wie diese Parametersätze für Realmarktdaten über statistische Auswertungen approximiert werden können. Daher ist ein Blick auf Methoden der Regressionsanalyse sinnvoll, die Beziehungen zwischen einer abhängigen und einer oder mehrerer unabhängiger Variablen erklären. Es wird damit begonnen, die geschätzten Parameter  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\theta}$  und  $\hat{\sigma}$  für die tatsächlichen Werte  $\mu$ ,  $\theta$  und  $\sigma$  zu ermitteln. Eine geschätzte Einpreisungsrate  $\hat{\chi}$  für variable faire Preise wird vorerst nicht gesucht, es wird stattdessen ein konstanter fairer Preis  $\hat{\mu}$  angenommen.

### 4.3.1 Maximum-Likelihood-Schätzung

Die Maximum-Likelihood-Methode ist eine Schätzmethode, nach welcher Parameter für ein stochastisches Modell anhand einer Menge gegebener Beobachtungen so berechnet werden, dass diese Beobachtungen maximal plausibel erscheinen. Das Verfahren wird im Folgenden direkt am Beispiel des Ornstein-Uhlenbeck-Modells mit stetiger Mean Reversion-Rate  $\lambda$  erklärt. Laut der Herleitung in Gleichung 2.5.6 definiert sich über dieses Modell der Zusammenhang zweier aufeinanderfolgender Beobachtungen  $X_{t-1}$  und  $X_t$  mit  $\theta = 1 - e^{-\lambda\delta}$  und der Schrittbreite  $\delta$  über

#### 4. Univariate Mean Reversion

$$X_t = (1 - e^{-\lambda\delta}) \mu + e^{-\lambda\delta} X_{t-1} + \underbrace{\sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2\lambda\delta}}{2\lambda}}}_{=\sigma^*} dW_t. \quad (4.3.1)$$

Wie gezeigt, gilt im Folgenden vereinfachend die Substitution

$$(\sigma^*)^2 = \sigma^2 \frac{1 - e^{-2\lambda\delta}}{2\lambda}. \quad (4.3.2)$$

#### Wahrscheinlichkeitsdichte

Um die Plausibilität einer Folge von Beobachtungen ermitteln zu können, muss die Wahrscheinlichkeit für deren Eintreten berechenbar sein.

Hierfür wird eine Dichtefunktion  $P : \Omega \rightarrow [0, 1]$  benötigt, die jedem möglichen Wert für  $X_t$  eine Eintretenswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von  $X_{t-1}$  im definierenden Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \Sigma, P)$  zuweist. Diese lässt sich für den OU-Prozess aus Gleichung 4.3.1 ableiten.

Die einzige Zufallskomponente  $dW_t$  ist normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung 1. Für das Produkt  $\sigma^* dW_t$  ergibt sich eine Standardabweichung  $\sigma^*$ . Die Differenz  $X_t - X_{t-1}$  ist folglich normalverteilt mit der Standardabweichung  $\sigma^*$ .

$\mathbb{E}(X_t | X_{t-1}; \mu, \lambda, \sigma^*)$  sei der Erwartungswert für  $X_t$  in Abhängigkeit von der Beobachtung  $X_{t-1}$  für frei wählbare Parameter  $\mu, \lambda$  und  $\sigma^*$ . Er ergibt sich ebenfalls über die Gleichung 4.3.1:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t | X_{t-1}; \mu, \lambda, \sigma^*) &= \mathbb{E}\left(\left(1 - e^{-\lambda\delta}\right) \mu + e^{-\lambda\delta} X_{t-1} + \sigma^* dW_t\right) \\ &=_{\mathbb{E}(dW_t)=0} \left(1 - e^{-\lambda\delta}\right) \mu + e^{-\lambda\delta} X_{t-1} \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Der Erwartungswert und die Standardabweichung sind für den Wert  $X_t$  unter Kenntnis von  $X_{t-1}$  also bekannt. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist wegen der Normalverteilung dann definiert über

$$P(X_t | X_{t-1}; \mu, \lambda, \sigma^*)$$

### 4.3. Ornstein-Uhlenbeck-Fitting

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^*)^2}} \exp\left(-\frac{(X_t - \mathbb{E}(X_t | X_{t-1}; \mu, \lambda, \sigma^*))^2}{2(\sigma^*)^2}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^*)^2}} \exp\left(-\frac{(X_t - (1 - e^{-\lambda\delta}) \mu - e^{-\lambda\delta} X_{t-1})^2}{2(\sigma^*)^2}\right).
 \end{aligned}$$

Die Funktion bestimmt für ein einzelnes Beobachtungspaar, wie plausibel der Wert  $X_t$  für einen vorhergehenden Wert  $X_{t-1}$  mit gegebenen Modellparametern  $\mu, \lambda$  und  $\sigma$  ist. Umgekehrt gedeutet, beschreibt diese Funktion, wie plausibel die Modellparameter  $\mu, \lambda$  und  $\sigma$  für ein gegebenes Beobachtungspaar sind. Sie ermöglicht also, verschiedene Parametersätze zu bewerten, eine essentielle Eigenschaft für ein Schätzverfahren. Aus der Dichtefunktion wird daher eine sogenannte Log-Likelihood- oder Plausibilitätsfunktion  $\mathcal{L}(\mu, \lambda, \sigma^*)$  erstellt, welche nicht die Beobachtungen, sondern die Ornstein-Uhlenbeck-Parameter als Variablen behandelt. Um nun nicht nur für zwei, sondern für  $T + 1$  aufeinanderfolgende Beobachtungen  $X_0$  bis  $X_T$  ( $T$  Beobachtungspaare) gleichzeitig passende Modellparameter zu finden, werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten aller Paare multipliziert (bzw. die logarithmierten bedingten Wahrscheinlichkeiten addiert). Vereinfachend gelten

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mu, \lambda, \sigma^*) &= \sum_{t=1}^T \ln P(X_t | X_{t-1}; \mu, \lambda, \sigma^*) \\
 &= \sum_{t=1}^T \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^*)^2}} \exp\left(-\frac{(X_t - (1 - e^{-\lambda\delta}) \mu - e^{-\lambda\delta} X_{t-1})^2}{2(\sigma^*)^2}\right) \right) \\
 &= T \ln \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^*)^2}} \right) + \sum_{t=1}^T \left( -\frac{(X_t - (1 - e^{-\lambda\delta}) \mu - e^{-\lambda\delta} X_{t-1})^2}{2(\sigma^*)^2} \right) \\
 &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - T \ln(\sigma^*) - \frac{1}{2(\sigma^*)^2} \sum_{t=1}^T (X_t - (1 - e^{-\lambda\delta}) \mu - e^{-\lambda\delta} X_{t-1})^2
 \end{aligned}$$

Je größer die Summe, desto plausibler die Modellparameter. Aus der Log-Likelihood-Funktion lassen sich durch Ableitung aller Modellparameter Schätzwerte generieren. Die gemeinsame Nullstelle der partiellen Ableitungen der Plausibilitätsfunktion liefert die Parameter  $\hat{\mu}, \hat{\lambda}$  und  $\hat{\sigma}^*$ , für die die Messwerte am wahrscheinlichsten sind.

Vereinfachend gelten die Substitutionen

#### 4. Univariate Mean Reversion

$$A = \left(1 - e^{-\lambda\delta}\right)\mu \quad \text{und} \quad B = e^{-\lambda\delta},$$

so dass die geänderte Plausibilitätsfunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(A, B, \sigma^*) &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - T \ln(\sigma^*) - \frac{1}{2(\sigma^*)^2} \sum_{t=1}^T (X_t - A - BX_{t-1})^2 \\ &= -\frac{T}{2} \ln(2\pi) - T \ln(\sigma^*) \\ &\quad - \frac{1}{2(\sigma^*)^2} \sum_{t=1}^T \left( X_t^2 + A^2 + B^2 X_{t-1}^2 - 2AX_t - 2BX_{t-1}X_t + 2ABX_{t-1} \right) \end{aligned}$$

untersucht wird. Die partielle Ableitung nach  $A$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(A, B, \sigma^*)}{\partial A} = -\frac{1}{2(\sigma^*)^2} \sum_{t=1}^T (2A - 2X_t + 2BX_{t-1})$$

ergibt die Nullstelle

$$\hat{A} = \bar{X}_t - \hat{B}\bar{X}_{t-1} \tag{4.3.4}$$

mit

$$\bar{X}_t = \sum_{t=1}^T \frac{X_t}{T} \quad \text{und} \quad \bar{X}_{t-1} = \sum_{t=1}^T \frac{X_{t-1}}{T}.$$

Die Nullstelle der partiellen Ableitung nach  $B$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(A, B, \sigma^*)}{\partial B} = \sum_{t=1}^T \left( 2BX_{t-1}^2 - 2X_{t-1}X_t + 2AX_{t-1} \right).$$

kann mit Gleichung 4.3.4 umgeformt werden zu

$$\hat{B} = \frac{\sum_{t=1}^T (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1})(X_t - \bar{X}_t)}{\sum_{t=1}^T (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1})^2}.$$

### 4.3. Ornstein-Uhlenbeck-Fitting

Durch Rücksubstitution ergeben sich die Schätzwerte

$$\hat{\lambda} = -\frac{1}{\delta} \ln \frac{\sum_{t=1}^T (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1}) (X_t - \bar{X}_t)}{\sum_{t=1}^T (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1})^2}$$

und mit Gleichung 2.5.2  $\left(\lambda = -\frac{\ln(1-\theta)}{\delta}\right)$

$$\hat{\theta} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1}) (X_t - \bar{X}_t)}{\sum_{t=1}^T (X_{t-1} - \bar{X}_{t-1})^2}.$$

Aus der Rücksubstitution von Gleichung 4.3.4 ergibt sich

$$\hat{\mu} = \frac{\bar{X}_t - e^{-\hat{\lambda}\delta} \bar{X}_{t-1}}{1 - e^{-\hat{\lambda}\delta}}.$$

Die partielle Ableitung nach  $\sigma^*$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mu, \lambda, \sigma^*)}{\partial \sigma^*} = -\frac{T}{\sigma^*} + \frac{1}{(\sigma^*)^3} \sum_{t=1}^T \left( (X_t - \mu) - e^{-\lambda\delta} (X_{t-1} - \mu) \right)^2$$

liefert über ihre Nullstelle die Schätzfunktion

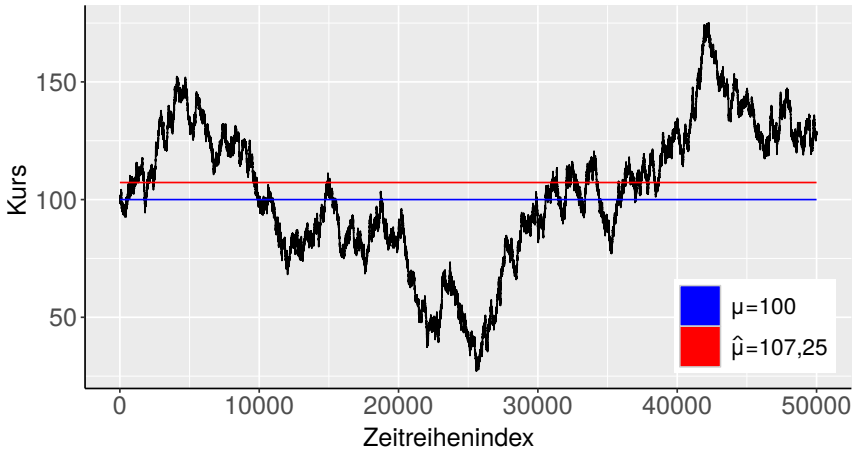
$$(\hat{\sigma}^*)^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( (X_t - \hat{\mu}) - e^{-\hat{\lambda}\delta} (X_{t-1} - \hat{\mu}) \right)^2.$$

Somit wurde für jeden OU-Parameter ein Schätzverfahren definiert.

#### 4.3.2 Evaluation

Abbildung 4.4 zeigt ein Beispiel für geschätzte und tatsächliche Ornstein-Uhlenbeck-Parameter. Für 50.000 Datenpunkte wird ein Gleichgewichtsniveau  $\hat{\mu} = 107,25$  mit  $\hat{\theta} = 0,0001348$  ermittelt. Die tatsächlichen Werte liegen bei  $\mu = 100$  und  $\theta = 0,0001$ . Um die Eignung des Approximationsverfahrens genauer zu verifizieren, zeigt Abbildung 4.5 den Zusammenhang zwischen Ursprungs- und Schätzwerten für die Mean Reversion-Rate

#### 4. Univariate Mean Reversion



**Abbildung 4.4.** Der dargestellte OU-Prozess wurde mit den Parametern  $\mu = 100, \theta = 0,0001$  und  $\sigma = 0,5$  erzeugt. Die Maximum-Likelihood-Schätzung errechnet  $\hat{\mu} = 107,25, \hat{\theta} = 0,0001348$  und  $\hat{\sigma} = 0,5022$ .

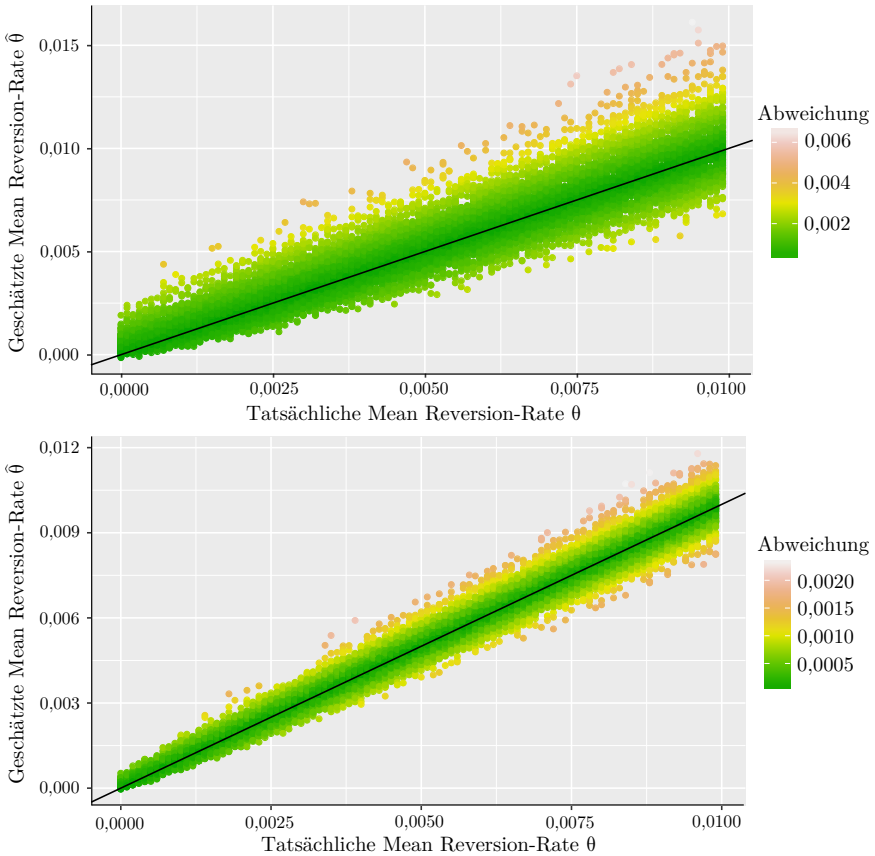
$\theta$ . Durchschnittliche Schätzwerte und jeweilige Fehler sind der Tabelle 4.1 zu entnehmen.

Für die künstlich erzeugten Daten ergibt sich eine tendentielle Überschätzung des Parameters  $\theta$ . Da anzunehmen ist, dass dieser Fehler ebenso bei Realdaten auftritt, wird das Verfahren durch Abzug des durchschnittlichen Fehlers in den kommenden Auswertungen korrigiert.

Die Untersuchung zeigt, dass das Schätzverfahren mit zunehmender Datenbasis genauer wird. Die Standardabweichung ist für 50.000 Datenpunkte etwa um den für Maximum-Likelihood-Schätzer erwarteten Faktor  $\frac{\sqrt{50.000}}{\sqrt{10.000}} = \sqrt{5} = 2,2361$  geringer als bei 10.000 Datenpunkten [Ald+97]. Zudem liegen Abweichungen im Bereich weniger Zehntausendstel. Diese Genauigkeit ermöglicht signifikante Aussagen über Mean Reversion-Rate.

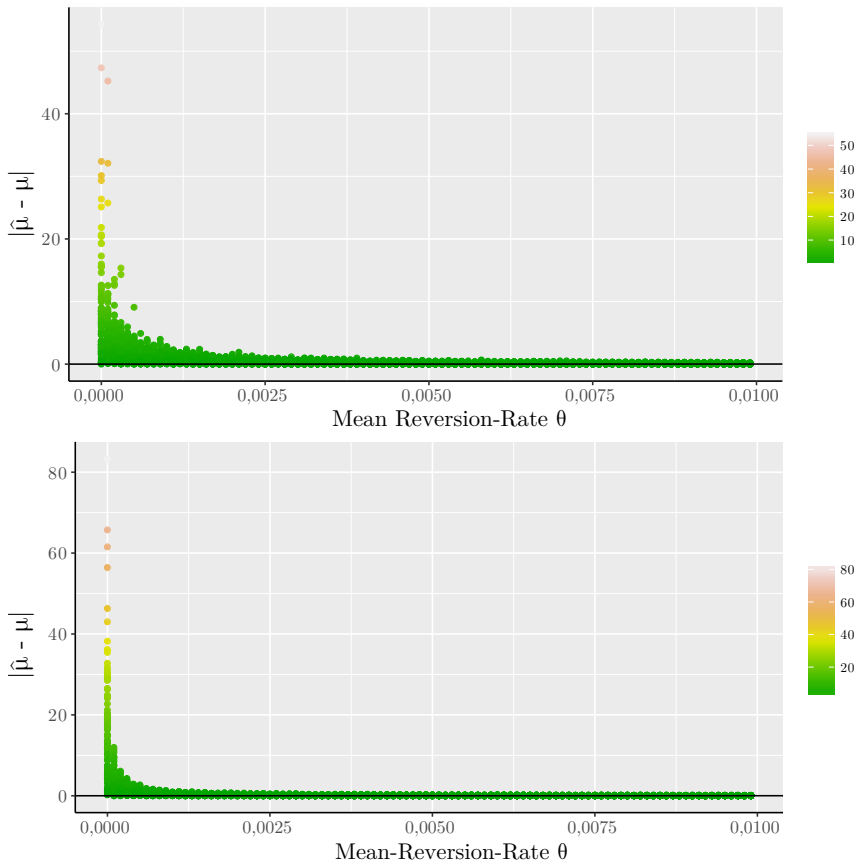
Abbildung 4.6 zeigt die Abweichungen des geschätzten fairen Preises  $\hat{\mu}$  vom tatsächlichen Wert  $\mu = 100$  in Abhängigkeit von der Mean Reversion-Rate  $\theta$ . Je größer die Mean Reversion-Rate, desto genauer die Schätzung. So ergeben sich gerade für  $\theta = 0$  sehr große Abweichungen. Dieser Umstand entspricht der Erwartung, da ein fairer Preis ohne Anziehungskraft ( $\theta = 0$ )

### 4.3. Ornstein-Uhlenbeck-Fitting



**Abbildung 4.5.** Approximation der Mean Reversion-Rate  $\theta$  für 10.000 (oben) und 50.000 (unten) Datenpunkte mittels Maximum-Likelihood-Schätzung, die schwarze Diagonale zeigt den tatsächlichen Zusammenhang

#### 4. Univariate Mean Reversion



**Abbildung 4.6.** Abweichung der Approximation des fairen Preises  $\hat{\mu}$  für 10.000 (oben) und 50.000 (unten) Datenpunkte mittels Maximum-Likelihood-Schätzung, der tatsächliche Wert ist  $\mu = 100$ .



### 4.3. Ornstein-Uhlenbeck-Fitting

**Tabelle 4.1.** Überblick über mittlere Schätzungen für die Mean Reversion-Rate  $\hat{\theta}$  mit jeweiligem durchschnittlichen Fehler in Abhängigkeit von  $\theta$

$\theta$	10.000 Datenpunkte		50.000 Datenpunkte	
	$\varnothing \hat{\theta}$	$\varnothing  \hat{\theta} - \theta $	$\varnothing \hat{\theta}$	$\varnothing  \hat{\theta} - \theta $
0	0,00053	0,00030	0,00011	0,00010
0,0001	0,00065	0,00035	0,00020	0,00011
0,0002	0,00074	0,00038	0,00029	0,00013
0,0003	0,00087	0,00052	0,00038	0,00013
0,0005	0,00105	0,00051	0,00058	0,00015
0,001	0,00148	0,00061	0,00110	0,00021
0,002	0,00251	0,00073	0,00259	0,00025
0,005	0,00545	0,00109	0,00509	0,00043

**Tabelle 4.2.** Durchschnittliche Fehler der Schätzungen  $\hat{\mu}$  in Abhängigkeit von  $\theta$ . Der tatsächliche Wert ist  $\mu = 100$ .

$\theta$	10.000 Datenpunkte	50.000 Datenpunkte
	$\varnothing  \hat{\mu} - \mu $	$\varnothing  \hat{\mu} - \mu $
0	13,040	24,250
0,0001	7,634	4,161
0,0002	4,209	2,316
0,0003	3,330	1,579
0,0005	2,006	0,926
0,001	1,009	0,428
0,002	0,467	0,205
0,005	0,202	0,087

#### 4. Univariate Mean Reversion

keinen Einfluss auf die Zeitreihe hat und somit auch nicht schätzbar sein kann. Der durchschnittliche Schätzwert liegt für alle Werte  $\theta$  etwa bei  $\mu = 100$ , so dass Tabelle 4.2 lediglich die Standardabweichung vom richtigen Wert zeigt. Auch hier führen mehr Datenpunkte tendenziell zu kleineren Abweichungen mit der eben erklärten Ausnahme für  $\theta = 0$ .

### 4.4 Varianzverhältnis

Lo und MacKinlay zeigten im Jahr 1988 empirisch, dass sich das Verhältnis von Varianzen zu Abtastbreiten bei Aktienkursen von 1962 bis 1985 nicht in dem Maße veränderte, wie es bei Random Walk-Prozessen zu erwarten wäre [LM88]. Während die Varianz der logarithmierten Kursdifferenzen für diese direkt proportional zur Zeitdifferenz sein müsste, konnte für einige Wertpapiere ein langsamerer Anstieg nachgewiesen werden. Die in dieser Arbeit gewählte Definition eines Mean Reversion-Prozesses

$$\text{Var} \left( \sum_{i=t}^u X_i \right) < \sum_{i=t}^u (\text{Var} (X_i)), \quad t < u \in \mathbb{T}$$

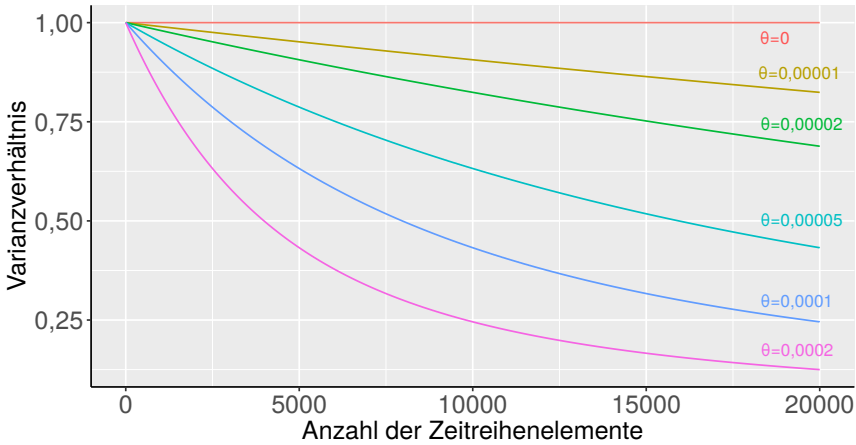
basiert auf dieser Kurseigenschaft. Für die Beschreibung von Mean Reversion-Prozessen wurden Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse mit konstantem und variablem fairem Preis vorgestellt, ohne dass deren Verbindung zu Varianzverhältnissen bisher systematisch untersucht wurden. Dieser Abschnitt widmet sich der Aufgabe, diese zwei Herangehensweisen zu verbinden.

Für den Prozess  $(X_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ergibt sich der verringere Faktor zwischen verschiedenen Intervallbreiten nach der Gleichung 2.5.5:

$$X_t \sim \mathcal{N} \left( \left(1 - e^{-\lambda t}\right) \mu + e^{-\lambda t} X_0, \frac{\sigma^2}{2\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda t}\right) \right)$$

Sie zeigt die Verteilung eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses und offenbart, dass die Varianz von der stetigen Mean Reversion-Rate  $\lambda$  abhängig ist. Statt einer Gesamtvarianz  $n\sigma^2$  des Random Walks ergibt sich nach  $n$  Zeitreihenelementen die Gesamtvarianz

#### 4.4. Varianzverhältnis



**Abbildung 4.7.** Verhältnis von Varianz zu Intervallbreite für unterschiedliche diskrete Mean Reversion-Raten  $\theta$ .

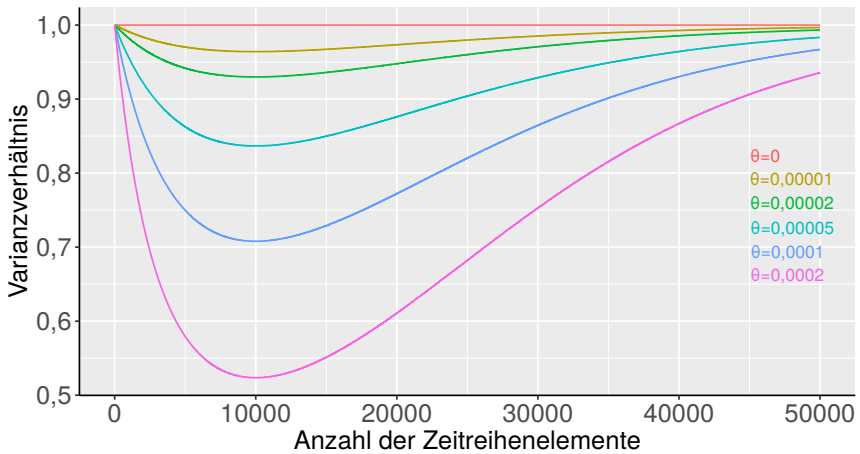
$$\frac{\sigma^2}{2\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda n}\right).$$

Diese Änderung lässt sich auch für den diskreten Fall beschreiben. Für  $n$  Zeitreihenelemente reduziert sich die Varianz bei stetiger (und diskreter) Mean Reversion-Rate  $\lambda$  (und  $\theta$ ) im Vergleich zu einem Random Walk über den Faktor

$$\frac{(1 - e^{-2\lambda n})}{2\lambda n} \approx -\frac{1 - (1 - \theta)^{2n}}{2n \ln(1 - \theta)}.$$

Abbildung 4.7 stellt diesen Zusammenhang grafisch dar. Ist für einen Random Walk-Prozess das Verhältnis zwischen Abtastbreite und Varianz also stets konstant (siehe Abbildung 4.7, rote Linie), so ergibt sich für die diskrete Mean Reversion-Rate  $\theta = 0,0001$  beispielsweise nach 5.000 Datenpunkten im Schnitt eine um den Faktor

#### 4. Univariate Mean Reversion



**Abbildung 4.8.** Varianzverhältnis für unterschiedliche diskrete Mean Reversion-Raten  $\theta$  und  $\chi = 0,0001$ .

$$\frac{1 - (1 - 0,0001)^{2 \cdot 5.000}}{2 \cdot 5.000 \ln(1 - 0,0001)} = 0,6321$$

verringerte Varianz (siehe Abbildung 4.7, blaue Linie). Interessant ist dabei, dass die Gesamtvarianz bei konstantem Gleichgewichtsniveau gegen einen Maximalwert konvergiert. Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{2\lambda} (1 - e^{-2\lambda n}) = \frac{\sigma^2}{2\lambda}$$

gilt, ist ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess daher nicht nur ein Mean Reversion-Prozess, sondern nähert sich bei entsprechend großer Abtastbreite einem stationären weißen Rauschen an. Zwar wäre dieses Verhalten für die Swing-Strategie ideal, es ist aber kein realistisches Kursverhalten und unterstreicht die Notwendigkeit eines variablen fairen Preises.

## 4.5. Fitting des variablen fairen Preises

### Variabler fairer Preis

Durch die variable Anpassung des Gleichgewichtsniveaus verringert sich dessen Anziehungskraft mit jedem neuen Zeitreihenelement um die Einpreisungsrate  $1 - \chi$ , nach  $n$  Schritten also um  $(1 - \chi)^n$ . Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \chi)^n \lambda = 0$$

gilt, sind langfristige Prognosen kaum genauer als für einen Random Walk-Prozess. Wie Abbildung 4.8 zeigt, konvergieren alle Varianzverhältnisse daher gegen 1. Kurzfristig gibt es allerdings sehr wohl Mean Reversion-Effekte, für  $\chi = 0,0001$  sinkt das Varianzverhältnis innerhalb von 10.000 zusammenhängenden Datenpunkten. Wie sich aus diesen Werten vermuten lässt, kann über eine Extremwertberechnung gezeigt werden, dass sich für  $\chi > 0$  das minimale Verhältnis von Varianz zu Intervallbreite stets bei der Intervallbreite  $\chi^{-1}$  ergibt. Hieraus lässt sich direkt ein Schätzwert ermitteln:

Sei  $\hat{\vartheta}$  die Intervallbreite für das minimale Varianzverhältnis. Es gilt dann

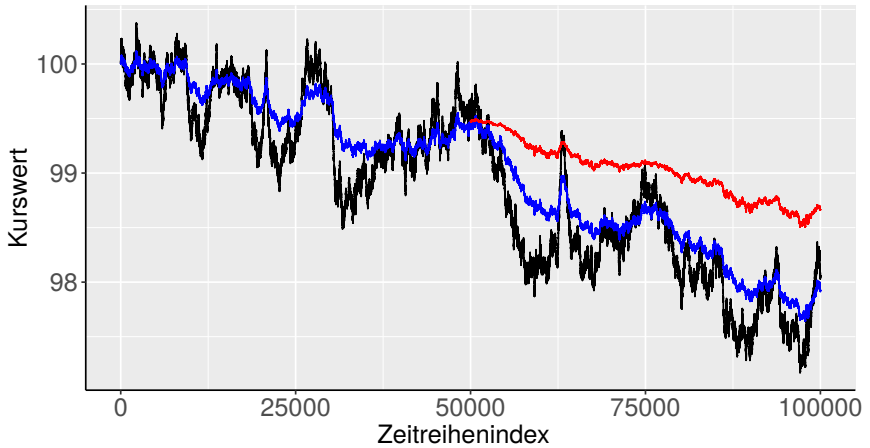
$$\hat{\chi} = \hat{\vartheta}^{-1}.$$

Im endlichen Bereich der letzten  $\hat{\vartheta}$  Datenpunkte ist also nach wie vor Mean Reversion zu erkennen. Während die Zeitreihe bei einem konstanten fairen Preis mit wachsenden Abtastintervallen gegen eine stationäre Zeitreihe konvergiert, nähert sich der Prozess mit variablen fairen Preis langfristig einen Random Walk an.

## 4.5 Fitting des variablen fairen Preises

Zwar lässt sich die Einpreisungsrate  $\chi$  über die Varianzverhältnisse ermitteln, möglicherweise ist es aber gar nicht notwendig, diesen Wert in der Maximum-Likelihood-Methode einzubeziehen. Da die wachsende Datenbasis mit jedem neuen Zeitreihenelement zu neuen Schätzwerten führt, ergibt sich sowieso ein variabler fairer Preis, der sich immer am

#### 4. Univariate Mean Reversion



**Abbildung 4.9.** Variabler fairer Preis mit  $\mu_0 = 100, \theta = 0,0001, \sigma = 0,01$  und  $\chi = 0,00005$ . Die Schätzungen  $\hat{\mu}_t$  basieren auf allen bisherigen (mindestens 50.000) Datenpunkten.

aktuellen Kenntnisstand orientiert. Es stellt sich jedoch die Frage, ob die Verwendung aller Datensätze die Schätzung nicht zunehmend verfälscht, da der Einfluss in der Vergangenheit liegender Kurse auf den aktuellen fairen Preis immer weiter abnimmt, ohne dass dies im Schätzverfahren berücksichtigt ist.

Abbildung 4.9 zeigt daher beispielhaft für einen simulierten Kurs (schwarz) den tatsächlichen fairen Preis  $(\mu_t)_{t \in \mathbb{T}}$  (blau) und den geschätzten Wert  $(\hat{\mu}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  (rot) nach 50.000 Datenpunkten, wenn alle bisherigen Kursdaten verwendet werden. Der geschätzte Wert nähert sich zwar dem tatsächlichen fairen Preis an, ist mit einer durchschnittlichen Differenz von 0,5543 allerdings eine schlechtere Schätzung als der Kurs selbst, der im Schnitt nur etwa um 0,2508 abweicht. Da das Schätzverfahren ein konstanten fairen Preis annimmt, werden ältere Daten zu stark berücksichtigt, verfälschen zunehmend die Präzision und führen zu einer zu trägen Anpassung. Zwar erscheint daher die Wahl eines beschränkten Zeitfensters sinnvoll, die Wahl einer optimalen Fensterbreite ist jedoch nicht trivial.

## 4.5. Fitting des variablen fairen Preises

**Tabelle 4.3.** Durchschnittliche Abweichung des geschätzten und tatsächlichen variablen fairen Preises und eines gleitenden Durchschnitts

Fensterbreite	Maximum-Likelihood	Gleitender Durchschnitt
1 (Aktueller Kurs)	-	0,2278815
10.000	0,2661582	0,1388113
15.000	0,2340795	0,1349944
20.000	0,0965203	0,1695563
25.000	0,1092057	0,1847003
30.000	0,1434887	0,2290404
35.000	0,1722802	0,2681708
40.000	0,2138093	0,3178533

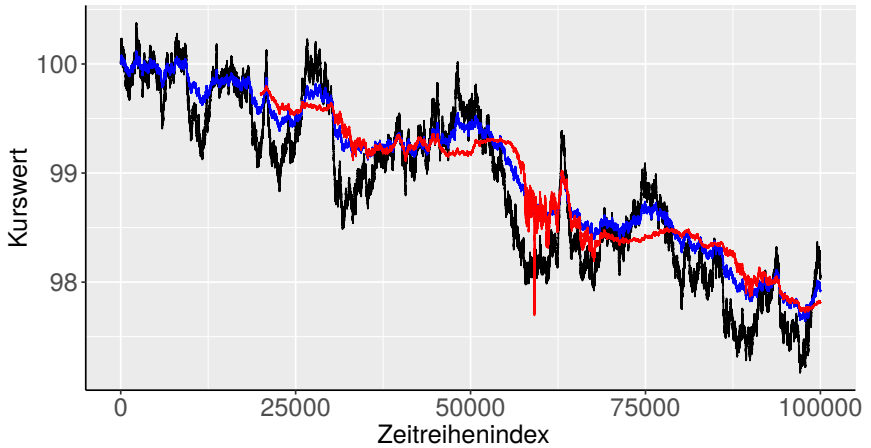
### Wahl der Fensterbreite

In einem ersten Schritt wird daher der Einfluss verschiedener Fensterbreiten auf die Ergebnisqualität untersucht. Gleichzeitig wird überprüft, ob eine Maximum-Likelihood-Schätzung besser als ein gleitender Durchschnitt abschneidet.

Tabelle 4.3 zeigt durchschnittliche Abweichungen des geschätzten variablen fairen Preises  $(\hat{\mu}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  zu den Werten von  $(\mu_t)_{t \in \mathbb{T}}$ . Während zu kleine Fensterbreiten für die Maximum-Likelihood-Schätzung zu stark schwankenden Schätzwerten führen, bewirken große Fensterbreiten zu langsame Anpassungen. Beide Szenarien führen zu Abweichungen, ein Optimum ist im gezeigten Beispiel bei ca. 20.000 Datenpunkten erreicht. Das Ergebnis dieser Schätzung ist in Abbildung 4.10 gezeigt.

Die Vorstellung, dass sich der Mean Reversion-Effekt über einige Monate, aber auch viele Jahre erstrecken kann, ist nicht unbegründet. In jedem Fall muss davon ausgegangen werden, dass die optimale Fensterbreite variabel ist und von den Parametern des DGPs abhängt. In Abschnitt 4.4 wurde gezeigt, dass Einfluss und Dauer der Mean Reversion aus Varianzverhältnissen für verschiedene Intervallbreiten ablesbar ist. Für eine genauere Analyse werden diese daher für den Prozess untersucht. Sie sind in Abbildung 4.11 dargestellt. Es zeigt sich, dass sich das Verhältnis der

#### 4. Univariate Mean Reversion

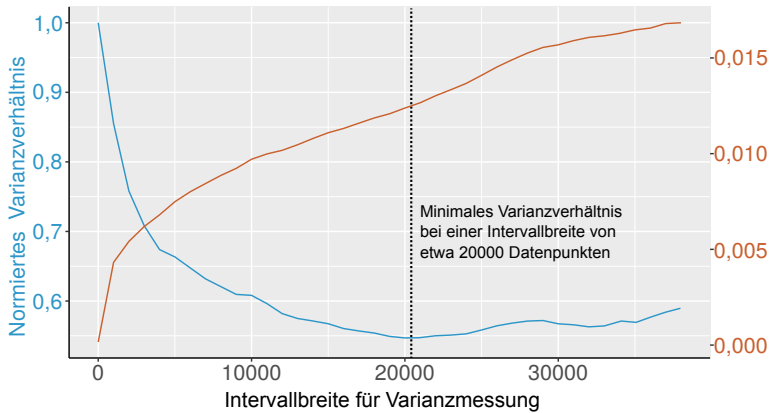


**Abbildung 4.10.** Geschätzter variabler fairer Preis mit einer Fensterbreite von 20.000 Datenpunkten

Varianzen für Intervallgrößen bis 20.000 stark absenkt, um dann auf einem Plateau zu stagnieren. Ist also innerhalb von 20.000 zusammenhängenden Datenpunkten Mean Reversion zu erkennen, reduziert sich für breitere Intervalle der Wert durch die variable Anpassung des fairen Preises. Tabelle 4.3 zeigt den Zusammenhang zwischen der Fensterbreite und dem mittleren Fehler der Schätzung.

Tatsächlich zeigt sich die beste Schätzung bei einer Fensterbreite von 20.000 Punkten, also genau der Intervallbreite mit dem minimalen Varianzverhältnis – diese ist in Abbildung 4.10 dargestellt. Der so ermittelte faire Preis liegt deutlich näher an dem tatsächlichen Wert und weist nur einen durchschnittlichen Fehler von 0,0965 auf. Die neue Zeitreihe ist damit eine deutlich bessere Schätzung als der Kurs selbst und kann als Indikator für zukünftige Kursbewegungen verwendet werden. Die Fensterbreite wird daher im Folgenden direkt an der Intervallbreite bis zum minimalen Varianzverhältnis ausgerichtet.





**Abbildung 4.11.** Normiertes Varianzverhältnis und Standardabweichung in Abhängigkeit von der Intervallbreite

## 4.6 Zusammenfassung

Für die Berechnung der Ornstein-Uhlenbeck-Parameter wurde ein Verfahren beschrieben, das die Parameter  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\theta}$  und  $\hat{\sigma}$  aus gegebenen Daten über die Maximum-Likelihood-Methode schätzt. Für eine erweiterte Modellierung mit variablem fairem Preis wurde die Dauer des Mean Reversion-Effekts über die Analyse der Varianzverhältnisse gemessen. Es zeigte sich, dass die Verwendung von Kursdaten, die noch vor der durch das minimale Varianzverhältnis gegebenen Intervallbreite liegen, nicht zielführend ist. Die besten Schätzwerte ergaben sich stattdessen bei einer durch das minimale Varianzverhältnis aufgespannte Intervall. Mit dieser Erkenntnis lässt sich zum einen der faire Preis für die Optimierung der Swing-Strategie schätzen, zum anderen können über die zusätzliche Approximation von  $\chi$  möglichst realistische künstliche Daten mit fairem Preis erzeugt werden. Ob diese Vermutungen auch Tests auf Realmarktdaten standhalten, wird in den folgenden Kapiteln überprüft.



**Teil II**

**Anwendung in  
Finanzmärkten**



# Mean Reversion in Finanzmärkten

## 5.1 Einleitung

Dieses Kapitel widmet sich der Auswertung der Swing-Strategie auf Real-daten verschiedener Marktsegmente. Um die bisherigen Überlegungen empirisch zu validieren, wird die Performance des Handelssystems mit unterschiedlichen Optimierungsstufen iterativ analysiert.

## 5.2 Devisen

Dieses Kapitel wird nicht zufällig mit einer genauen Analyse von Devisen, also Anlagen in Fremdwährungen, begonnen. Es lassen sich nämlich mehrere Gründe anführen, warum gerade eine Untersuchung von Devisen vielversprechend erscheint.

Zum einen ist der internationale Devisenmarkt Forex mit einem Tagesumsatz von ca. 5,1 Billionen US-Dollar im Jahr 2016 der größte Finanzmarkt der Welt [Int16]. Er ermöglicht durch den Erwerb von Devisen den Tausch unterschiedlicher Währungen und somit Spekulationen auf die Entwicklung von Wechselkursverhältnissen. Durch den großen Umsatz ergeben sich dabei in der Regel sehr günstige Konditionen. Außerdem lassen sich bei Forex-Positionen Sicherungseinlagen nahezu vermeiden, so dass von Margin-Anforderungen nahe 0% ausgegangen werden kann.

Zum anderen sind Wechselkurssysteme Gegenstand der Wirtschaftspolitik. Eine sichere und stabile Währung ist eines der Fundamente für die erfolgreiche Entwicklung einer Volkswirtschaft. Die Währungspolitik

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten

hat einen großen Einfluss auf die wirtschaftliche Dynamik miteinander interagierender währungsfremder Ökonomien. Sie befindet sich jedoch stets in einem Zielkonflikt. Das sogenannte *Trilemma des Wechselkursregimes* wurde erstmals im Jahre 1962 von John Marcus Fleming beschrieben [Dym13]. Es besagt, dass sich die drei wünschenswerten Szenarien Wechselkursstabilität, Autonomie der Geldpolitik und Kapitalverkehrsfreiheit gegenseitig ausschließen. Die Annäherung an zwei dieser Ziele kann stets nur durch den Verzicht auf die dritte Eigenschaft erreicht werden - ein Konflikt, der als *unmögliche Dreierheit* bekannt ist. Verschiedene nationale Interessen haben daher in einem komplexen System internationaler Verflechtungen zu einer Vielzahl unterschiedlicher Wechselkurssysteme geführt. Aus Sicht eines Investors ist interessant, wie sich diese unterschiedlichen Systeme auf einen Wechselkurs auswirken. Diese lassen sich von festen Verhältnissen bis hin zu völlig freien, marktwirtschaftlich geregelten Wechselkursen topologisieren.

### Fixed

Feste Wechselkurse minimieren das Risiko für Importeure und Exporteure und vereinfachen somit den Ausbau von Handelsbeziehungen. Eine direkte Kopplung ergibt sich vor allem dann, wenn eine Nation sehr stark von dem Handel mit einer anderen Nation abhängig ist. So wird zum Beispiel durch den europäischen Wechselkursmechanismus II (WKM II) die dänische Krone fest an den Euro gebunden und schwankt durch Deviseninterventionen fest in einem Bereich von einem etwa Prozent. Auch China erzielt durch den regelmäßigen Erwerb US-amerikanischer Staatsanleihen eine gleichbleibende Dollar-Nachfrage, die den chinesischen Renminbi künstlich an den US-Dollar koppelt. Die feste Bindung hat sich im letzten Jahrzehnt allerdings etwas gelockert.

### Floating

Wechselkurse, die sich rein durch Angebot und Nachfrage am Devisenmarkt ergeben, bezeichnet man als frei oder *Floating*. Üblicherweise handelt es sich hierbei um Währungspaare, die kaum wirtschaftliche Berührungspunkte haben. Beispielfhaft ließe sich das Wechselkursverhältnis

zwischen argentinischem Peso und der schwedischen Krone anführen. Sollten diese Währungen stark auseinanderdriften, sind dennoch keine staatlichen Devisenmarktinterventionen zu erwarten.

### Managed Floating

Zwar sind feste Wechselkurse in wirtschaftlich stark vernetzten Ökonomien wünschenswert. Bei autonomer Geldpolitik und freiem internationalen Kapitalverkehr sind hierfür allerdings immense, meist nicht finanzierbare Eingriffe in den Geldmarkt erforderlich. Die Globalisierung der Märkte führt zu internationalen Handelsbeziehungen und wirtschaftliche Verflechtungen, die freien Wechselkursen unterworfen sind.

Die Geschichte zeigt, dass durch die enorme ökonomische Relevanz auch in Systemen mit freien Wechselkursen staatliche Interventionen stattfinden. Handelt es sich um einmalige und nicht dauerhafte Eingriffe, so nennt man dieses Verhältnis *Managed Floating*. Neben Zinsentscheidungen sind Devisenmarktinterventionen, also Zu- oder Verkäufe ausländischer Währungsreserven durch Zentralbanken, aktive Mechanismen, die zu einer gesteuerten Auf- oder Abwertung der inländischen Währung führen. Von den Währungskriegen der 1930er Jahre bis hin zu der aktuellen aggressiven Abwertung des japanischen Yens unter Premierminister Abe lassen sich für politische Interventionen zahlreiche Beispiele finden. So hat der US-amerikanische Präsident Donald Trump angekündigt, durch seine Wechselkurspolitik gegen die aktuelle Stärke des US-Dollars zu kämpfen. Diese Äußerungen hinterlegen den im Kontext dieser Arbeit interessanten Punkt, dass solche Eingriffe anhaltenden Kursbewegungen häufig reaktiv entgegenen. Konzeptionell begünstigen sie damit eine Rückbewegung zu einem gleitenden Durchschnittswert und damit Mean Reversion. Beispiele für Managed Floatings sind die äußerst wichtigen Währungspaare Euro zu US-Dollar und Euro zu japanischem Yen.

Für die angestellten Untersuchungen stehen Managed Floatings im Vordergrund. Da man in solchen Regimes durch Devisenmarktinterventionen anhaltenden Kursbewegungen entgegenet, ist die tendentielle Rückkehr zu einem gleitenden Durchschnittswert im Sinne der agierenden Zentralbanken. Da das konzeptionell der Vorstellung von Mean Reversion entspricht, erfolgt eine genauere Analyse in diesem Bereich.

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten

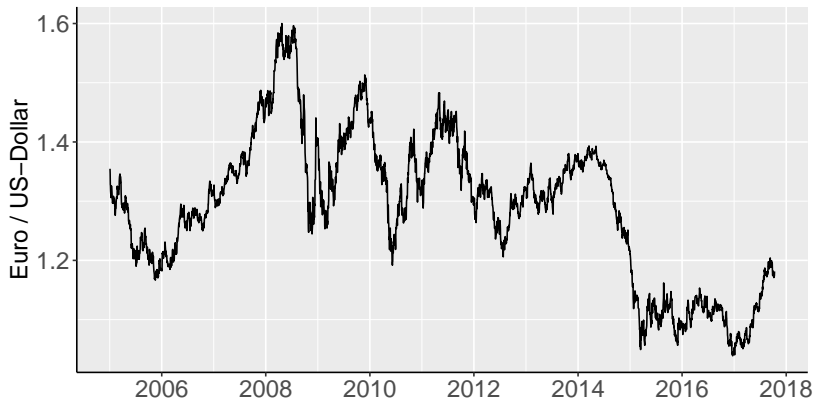


Abbildung 5.1. Beispiel für Managed Floating: Euro / US-Dollar von 2005 bis 2018

### 5.2.1 Euro / US-Dollar

Abbildung 5.6 zeigt das Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar von 2005 bis 2018. Die Vermutung, dass Managed Floatings zu Mean Reversion tendieren, müsste nach den Erkenntnissen aus Kapitel 3 dazu führen, dass die vorgestellte Swing-Strategie selbst ohne Parameteroptimierung im Mittel Gewinne generiert. Für einen Vergleich werden daher Performance und Risiko durch Backtests auf den in Kapitel 3.5 simulierten Intervallbreiten (ein bis fünf Jahre) mit folgenden Parametern gemessen:

- ▷  $Q_0$  = Aktueller Kurs zu Beginn der Auswertung
- ▷  $\Delta\% = 0,1152\%$ <sup>1</sup>
- ▷  $N = 1.000$  Euro

Im Bereich von 2005 bis 2018 wird dafür für jede beginnende Handelsstunde eine Swing-Strategie über das zu untersuchende Zeitintervall analysiert. Für die Intervallbreite von zwei Jahren werden also zum Beispiel Auswertungen vom 24.02.2008 um 12:00 Uhr bis zum 24.02.2010 um

<sup>1</sup>Eine Erklärung für diesen speziellen Wert folgt in Kapitel 5.2.4.



12:00 Uhr, sowie vom 24.02.2008 um 13:00 Uhr bis zum 24.02.2010 um 13:00 Uhr untersucht.

Abbildung 5.2 zeigt die Resultate dieser Backtests als Histogramme. Die wichtigsten Kennzahlen sind in Tabelle 5.1 dargestellt. Wie in Kapitel 3.5 werden Renditen nach vier unterschiedlichen Berechnungsgrundlagen für die nötige Kapitalmenge ermittelt. Wegen der hohen Hebelbarkeit im Forex-Handel orientiert sich die Analyse an den Ergebnissen für eine 0%-ige Margin.

**Tabelle 5.1.** Backtestergebnisse: Performance und Risiko der Swing-Strategie für Euro / US-Dollar.  $Q_0$  ist konstant und entspricht dem Startkurs.

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
∅ Ergebnis	950,23	5.236,32	12.906,01	19.118,26	25.825,40
Min. Ergebnis	-42.254,40	-54.815,50	-41.055,10	-44.000,80	-25.844,80
Max. Ergebnis	24.409,50	31.510,20	41.390,70	48.900,60	53.709,50
∅ Transaktionen	6.697,47	13.773,67	21.208,34	28.761,87	36.174,23
∅ Position	54.454,35	71.196,31	84.183,97	81.858,78	85.416,20
∅ Max. Position	127.080,56	173.315,30	204.929,97	214.750,90	225.503,41
∅ Max. Verlust	9.091,93	16.296,38	21.390,15	22.383,32	23.347,17
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	<b>146.766,08</b>	<b>194.859,22</b>	<b>233.389,75</b>	<b>243.333,46</b>	<b>253.582,70</b>
∅ Rendite	0,65%	2,69%	5,53%	7,86%	10,18%
∅ Rendite (annualisiert)	0,65%	1,34%	1,81%	1,91%	1,96%
∅ EK (100% Margin)	56.012,63	73.891,35	87.530,84	83.940,80	87.280,23
∅ Rendite	1,70%	7,09%	14,74%	22,78%	29,59%
∅ Rendite (annualisiert)	1,70%	3,48%	4,69%	5,26%	5,32%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	<b>32.393,57</b>	<b>38.875,45</b>	<b>48.972,78</b>	<b>50.057,65</b>	<b>50.629,63</b>
∅ Rendite	2,93%	13,47%	26,36%	38,19%	51,01%
∅ Rendite (annualisiert)	2,93%	6,52%	8,11%	8,42%	8,59%
∅ EK (0% Margin)	1.558,29	2.695,04	3.347,88	2.082,02	1.864,03
∅ Rendite	60,98%	194,30%	385,61%	918,26%	1.385,46%
∅ Rendite (annualisiert)	60,98%	71,55%	69,34%	78,63%	71,54%
∅ Volatilität	2.083,32	4.568,38	6.493,35	7.819,68	9.861,21
∅ Sharpe-Ratio	0,4562	1,1462	1,9876	2,4441	2,6188

Das gewählte Handelsvolumen von  $N = 1.000$  Euro pro Transaktion führt nach einem Jahr zu einem durchschnittlichen Gewinn von 950,23 Euro. Gleichzeitig ergibt sich aber in 5% der Fälle ein Verlust von über 32.393,57 Euro (MEK 95% (0% Margin)). Hält man dieses Kapital bereit, ist eine Rendite von durchschnittlich 2,93% im ersten Jahr zu erwarten.

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten

Die Standardabweichung der Vermögensschwankung innerhalb eines Jahres liegt bei 2.083,32 Euro. Durch diese hohe Volatilität ist der maximale temporäre Verlust pro Backtest im Mittel 9.091,93 Euro. Im Verhältnis zum Gewinn erscheint dieser Wert unverhältnismäßig hoch, das Sharpe-Ratio ist mit 0,4562 vergleichsweise gering und unterstreicht diesen Eindruck.

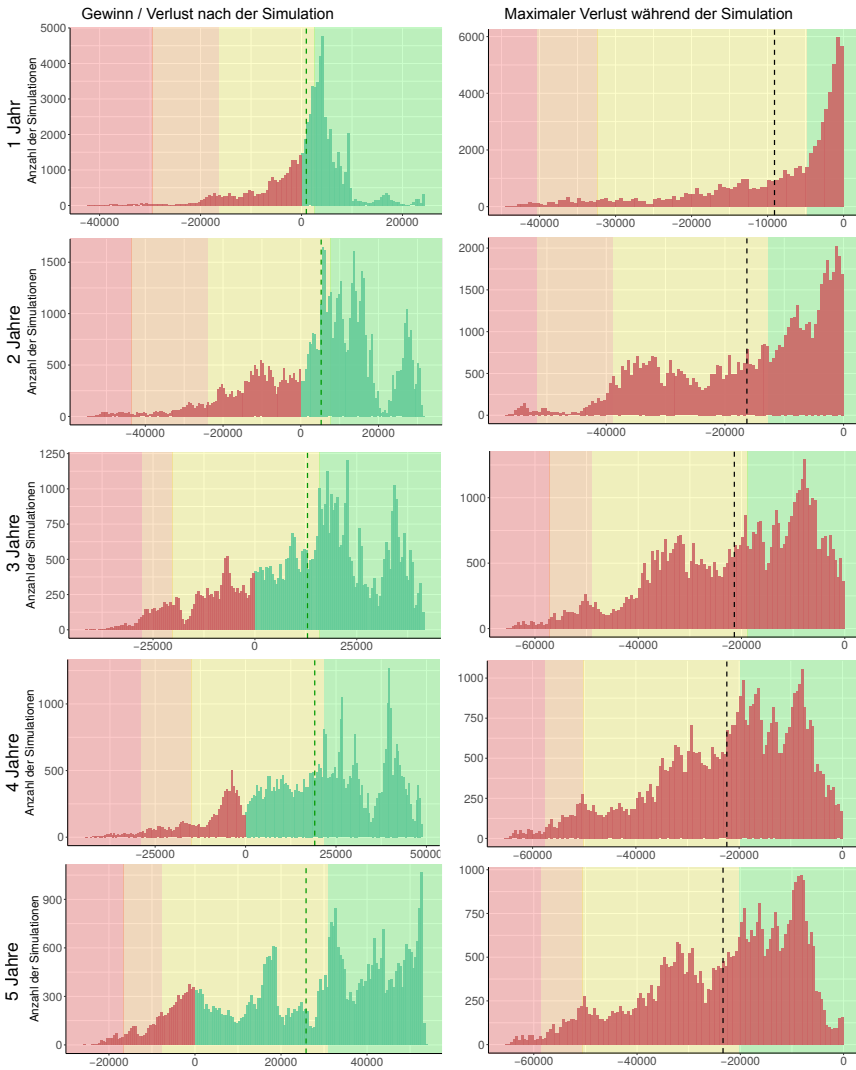
Interessanterweise zeigen Backtests über zwei Jahre deutlich bessere Ergebnisse. Der durchschnittliche Gewinn versechsfacht sich beinahe, während das MEK bei 0%-iger Margin um nicht einmal 7.000 Euro steigt. So ergibt sich bereits hier eine Rendite von 13,47% (annualisiert 6,52%). Dass der Wert merklich über der nach einem Jahr zu erwartenden Rendite von  $1,0269^2 - 1 = 5,45\%$  liegt, ist ein Phänomen, welches auch in der Monte-Carlo-Simulation in Kapitel 3.5 erkennbar ist. Dort deutet es auf Mean Reversion hin und ergibt sich nicht im Fall  $\theta = 0$ . Auch für drei, vier und fünf Jahre zeigen sich weitere Verbesserungen, die über eine einfache Extrapolation des Gewinns hinausgehen. Da sich zusätzlich das MEK kaum bewegt, steigt die Rendite nach fünf Jahren auf durchschnittlich 51,01%, was einer jährlichen Rendite von 8,59% entspricht.

Wie in Kapitel 3.5 gezeigt wurde, wäre für einen Random Walk-Prozess auch nach fünf Jahren ein durchschnittlicher Gewinn von 0 Euro zu erwarten. Natürlich ist der Mean Reversion-Effekt durch diese bloße Beobachtung nicht bewiesen. Die gezeigten Ergebnisse reichen aber als Motivation zur weiteren Analyse und Optimierung der Parameter der Swing-Strategie. Da sich das Wechselkursverhältnis in dem untersuchten Bereich wie ein Mean Reversion-Prozess verhält, werden im folgenden Abschnitt OU-Parameter mit variablem fairem Preis geschätzt.

### 5.2.2 Variabler fairer Preis, konstanter 0-Preis $Q_0$

Um die Parameter zu schätzen, ist eine möglichst breite Datenbasis sinnvoll. Es werden daher die in Abbildung 5.3 dargestellten Daten von 1980 bis 2018 verwendet. Die vor der Euro-Einführung am 1. Januar 1999 gezeigten Werte sind dessen Vorgänger, der europäischen Währungseinheit ECU (European Currency Unit), entliehen. Diese existierte bereits von 1979 bis zur Euro-Einführung und basierte auf dem selben Währungskorb. Die identische Berechnungsgrundlage ermöglicht eine Langzeitauswertung des Wechselkurses über 37 Jahre.

## 5.2. Devisen



**Abbildung 5.2.** Backtest-Ergebnisse: Histogramme über Gewinn (links) und maximalen Verlust (rechts) der Swing-Strategie für Euro / US-Dollar und Handelsperioden von einem, zwei, drei, vier und fünf Jahren (von oben nach unten) im Bereich von 2005 bis 2018.  $Q_0$  ist konstant und entspricht dem Startkurs.

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten

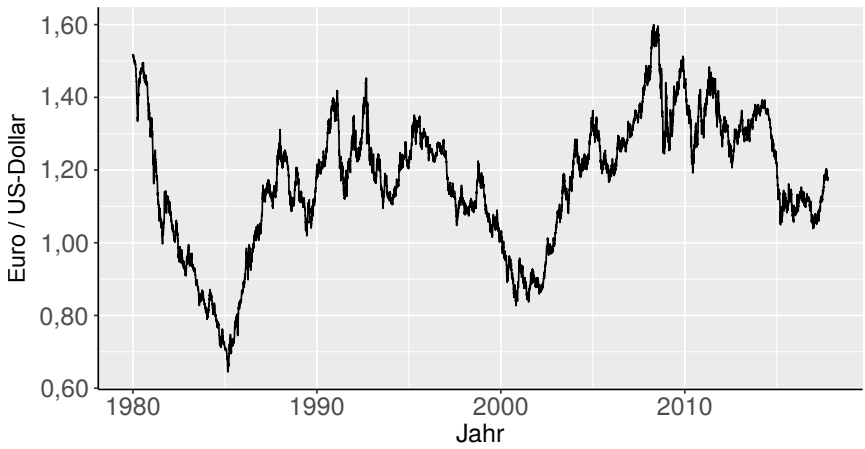


Abbildung 5.3. Euro (ECU) / US-Dollar von 1980 bis 2018

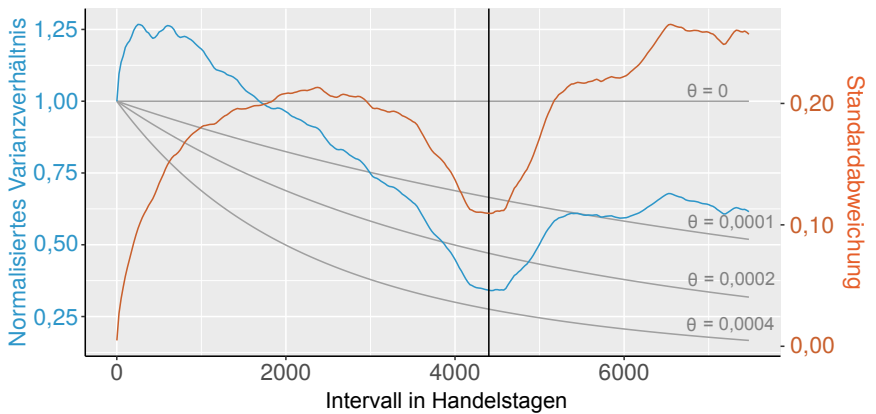
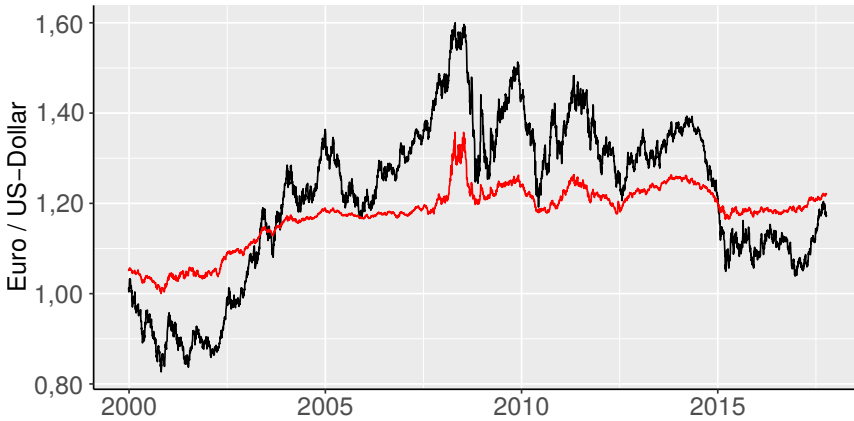


Abbildung 5.4. Varianzverhältnisse für Euro (ECU) / US-Dollar (logarithmiert) von 1980 bis 2018 mit einigen Beispielen für unterschiedliche Mean Reversion-Raten



**Abbildung 5.5.** Euro / US-Dollar: Kurs mit geschätztem fairem Preis zwischen 2000 und 2018

Abbildung 5.4 zeigt Standardabweichungen und Varianzverhältnisse für den logarithmierten Wechselkurs. Die maximale Intervallbreite entspricht 7.500 Handelstagen, bei 250 Handelstagen pro Jahr werden also maximal Intervalle von 30 Jahren untersucht.

Die durchschnittliche tägliche Standardabweichung liegt mit 0,005606 (logarithmierter Wert) bei etwa 0,5622% (prozentualer Wert). Für 250 Handelstage ergibt sich mit 0,1095 etwa eine jährliche Veränderung von 11,57%. Dieser Wert liegt über der für einen Random Walk zu erwartenden Änderung von  $\sqrt{250} \cdot 0,05606 \approx 0,08864$  (9,26827%). Es ist in diesem Bereich also nicht nur keine Mean Reversion zu erkennen, es zeigt sich sogar ein gegenteiliger Trend zur Verstärkung mittelfristiger Bewegungen. Das normierte Varianzverhältnis steigt daher zunächst auf etwa 1,25 an und sinkt erst bei Intervallbreiten von über sieben Jahren (etwa 1.750 Handelstagen) zurück auf 1,0. Nach diesem Punkt ergibt sich jedoch eine für diese Untersuchung sehr interessante Veränderung. Nach 3.300 Handelstagen erreicht die Standardabweichung bei 0,21492 (23,9763%) ein lokales Maximum und fällt nach etwa 4.400 Tagen zurück auf einen Wert von durchschnittlich 0,12584 (13,4101%). Das minimale Varianzverhältnis

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten

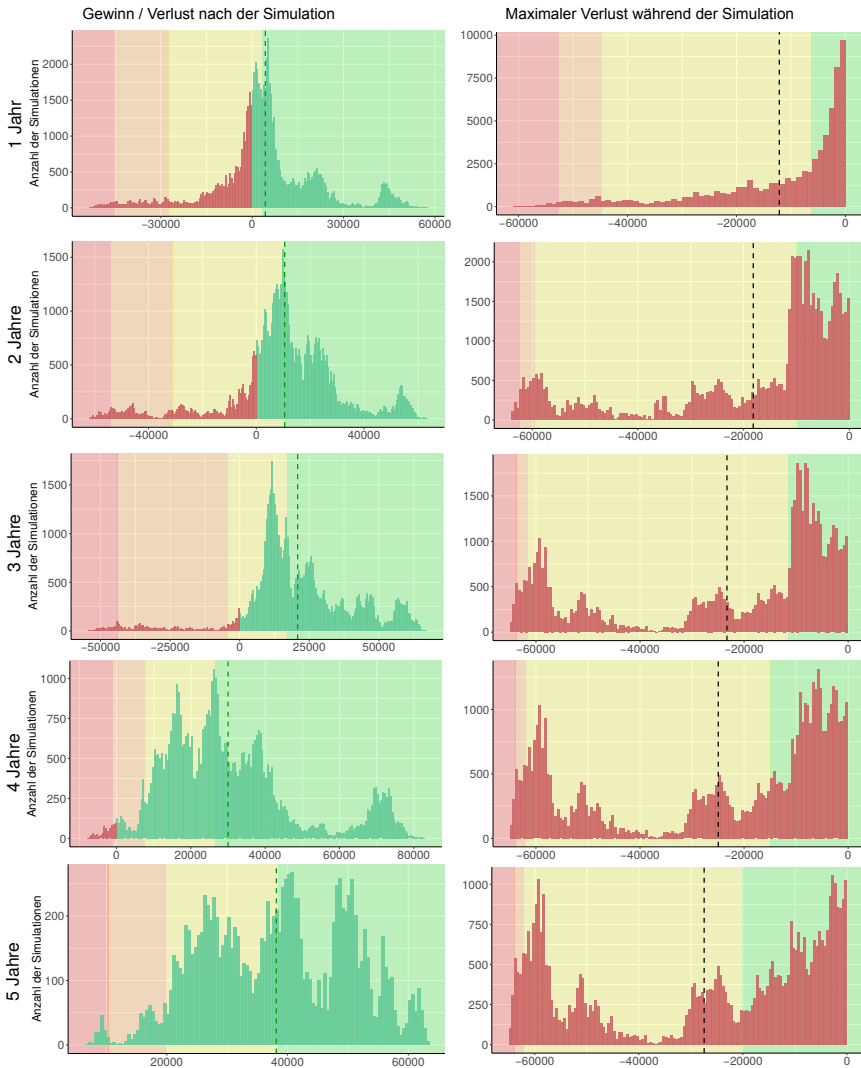
**Tabelle 5.2.** Backtestergebnisse: Performance und Risiko der Swing-Strategie für Euro / US-Dollar mit konstantem 0-Preis, der dem fairen Preis zum Startzeitpunkt entspricht

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
∅ Ergebnis	4.309,36	10.543,38	20.813,77	30.016,34	38.137,83
Min. Ergebnis	-53.317,50	-61.761,50	-54.401,50	-7.642,20	6.929,30
Max. Ergebnis	57.113,60	63.242,20	66.646,80	82.674,80	63.106,30
∅ Transaktionen	6.788,95	13.868,96	21.308,11	28.863,47	40.855,88
∅∅ Position	96.304,61	104.999,64	110.970,81	110.015,89	109.836,74
∅ Max. Position	166.859,16	200.720,56	221.236,24	227.543,82	235.536,17
∅ Max. Verlust	11.495,22	18.185,16	23.290,06	24.965,83	27.448,62
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	195.485,69	240.200,43	260.690,26	266.685,17	274.156,83
∅ Rendite	2,20%	4,39%	7,98%	11,26%	14,81%
∅ Rendite (annualisiert)	2,20%	2,17%	2,59%	2,70%	2,80%
∅ EK (100% Margin)	99.198,60	108.504,50	114.596,31	113.121,98	112.605,89
∅ Rendite	4,34%	9,72%	18,16%	26,53%	36,05%
∅ Rendite (annualisiert)	4,34%	4,75%	5,72%	6,06%	6,04%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	45.312,45	59.551,93	61.577,65	61.577,65	61.895,73
∅ Rendite	9,51%	17,70%	33,80%	48,49%	65,29%
∅ Rendite (annualisiert)	9,51%	8,49%	10,19%	10,39%	10,57%
∅ EK (0% Margin)	2.893,99	3.504,41	3.625,49	3.106,09	2.769,15
∅ Rendite	148,91%	300,86%	574,09%	966,37%	1.465,85%
∅ Rendite (annualisiert)	148,91%	100,21%	88,90%	80,71%	73,36%
∅ Volatilität	4.515,51	6.891,14	9.130,29	11.180,83	13.747,02
∅ Sharpe-Ratio	0,9546	1,5301	2,2749	2,6846	2,9528

liegt bei 0,3322, was dem erwarteten Verhalten eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit Mean Reversion-Rate  $\theta \approx 0,0003$  pro Handelstag entspricht. Da hier das Minimum erreicht ist, wird für die Schätzung des fairen Preises eine Fensterbreite von 4.400 Handelstagen gewählt.

Abbildung 5.5 zeigt den so errechnete fairen Preis, also den jeweiligen Wert, zu dem die maximale Mean Reversion-Rate innerhalb der letzten 4.400 Handelstage wirkt. Es schwankt seit dem Jahr 2000 im Bereich von 1,00 bis 1,35 und bewegt sich deutlich träger als der Kurs selbst. Im untersuchten Bereich ergibt sich ein durchschnittlicher geschätzter Wert  $\hat{\theta} = 0,000182$ . Im Jahr 2008 sinkt die geschätzte Mean Reversion-Rate zwischen Mai und August etwa auf den Wert 0 ab, was zu einer hohen Volatilität führt.

## 5.2. Devisen



**Abbildung 5.6.** Backtest-Ergebnisse: Histogramme über Gewinn (links) und maximalen Verlust (rechts) der Swing-Strategie für Euro / US-Dollar für Handelsperioden von einem, zwei, drei, vier und fünf Jahren (von oben nach unten) im Bereich von 2005 bis 2018,  $Q_0$  ist konstant und entspricht dem fairen Preis zum Simulationsstart.

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten

Tabelle 5.2 zeigt die Ergebnisse der Backtests, bei der der 0-Preis  $Q_0$  konstant auf den fairen Preis zum Startzeitpunkt gesetzt wird. Die deutlichste Änderung ergibt sich direkt nach einem Jahr. Der durchschnittliche Gewinn steigt von 950,23 Euro auf 4.309,36 Euro. Ebenfalls wächst das MEK von 32.393,57 Euro auf 45.312,45 Euro wegen der potentiell hohen Startposition, die bei großer Entfernung des Kurses zu  $Q_0$  eintritt. Gleichwohl ergibt sich statt einer Rendite von 2,93% durchschnittlich bereits nach einem Jahr ein Wert von 9,51%.

Wie schon in der Monte-Carlo-Simulation zeigt sich, dass eine geeignete Wahl des 0-Preises vor allem kurzfristige Ergebnisse stark verbessert. Dieser Effekt ist auch hier sichtbar. Zwar liegt die durchschnittliche Rendite nach fünf Jahren bei 65,29% (annualisiert 10,57%) immer noch über der vorher ermittelten Rendite 51,01% (annualisiert 8,59%), der Anstieg ist aber weit weniger signifikant als der von 2,93% auf 9,51%. Es ergibt sich dadurch aber ein wesentlich homogeneres Bild, da die jährliche Rendite des 5-Jahres-Zeitraums mit 10,57% sehr viel näher an 9,51% liegt.

Dennoch zeigt auch hier das erste Jahr im Verhältnis zu den Folgejahren ein hohes Risiko. Im Mittel gibt es im ersten Jahr bei einem Gewinn von 4.309,36 Euro je einen Zeitpunkt mit einem zwischenzeitlichen Verlust von 11.495,22 Euro. Nach fünf Jahren liegt der durchschnittliche Tiefpunkt bei 27.448,62 Euro, der Gewinn verneunfacht sich jedoch im Mittel auf 38.137,83 Euro. Interessanterweise gibt es keinen einzigen Zeitraum von fünf Jahren, nach welchem sich ein Verlust einstellt. Der minimale Gewinn liegt bei 6.929,30 Euro. Die Volatilität steigt verhältnismäßig langsamer als der Gewinn und führt zu wachsenden Sharpe-Ratios. Auch hier scheint die Strategie erfolversprechender, je länger sie konsequent angewendet wird.

### 5.2.3 Variabler fairer Preis, variabler 0-Preis $Q_{0,t}$

Tabelle 5.3 zeigt die Ergebnisse für den Fall, dass der 0-Preis  $Q_0$  stetig an den fairen Preis angepasst wird. Überraschend deutlich fällt die Gewinnsteigerung aus. Ergibt sich für einen konstanten 0-Preis ein durchschnittlicher Gewinn von 4.309,36 Euro im ersten Jahr, so liegt dieser nun bei 7.708,93 Euro. Das in Abbildung 5.7 gezeigte Gewinnhistogramm offenbart, dass diese Steigerung vor allem durch eine Abmilderung der Verlustfälle



**Tabelle 5.3.** Backtestergebnisse: Performance und Risiko der Swing-Strategie für Euro / US-Dollar mit variablem 0-Preis, der dem fairen Preis entspricht

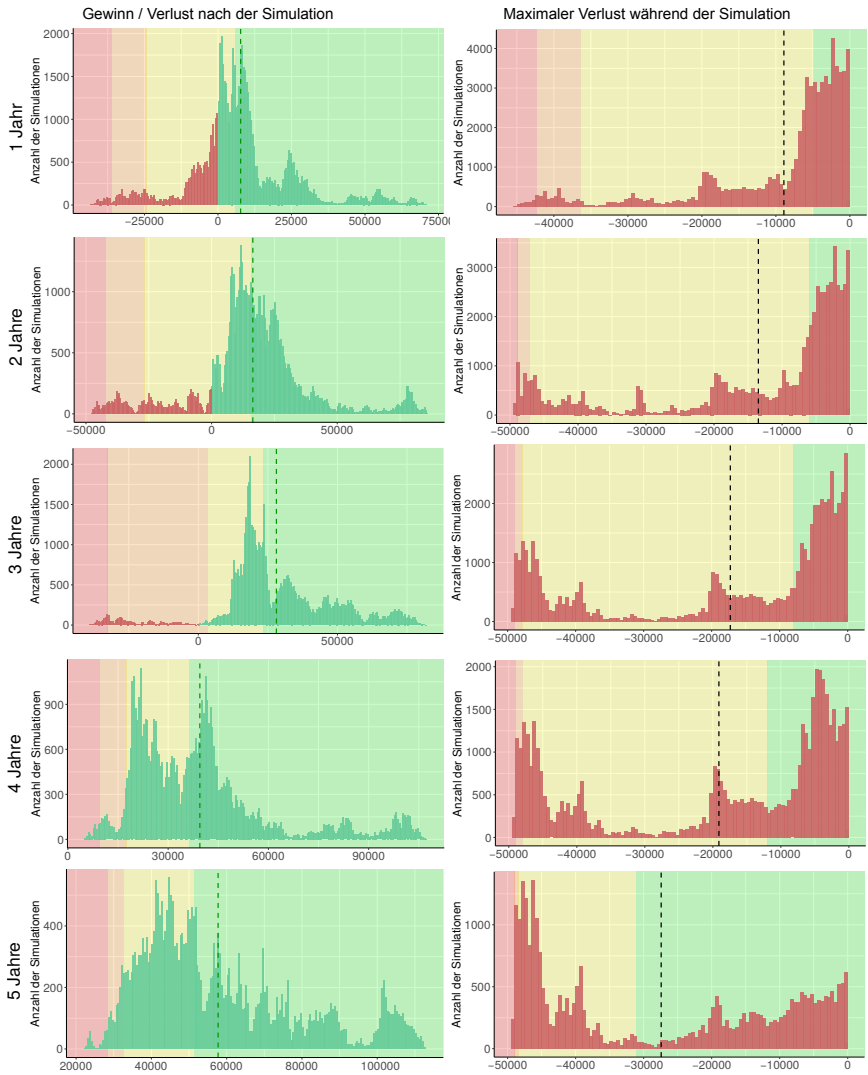
Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
∅ Ergebnis	7.708,93	16.418,97	28.056,80	39.485,74	57.727,95
Min. Ergebnis	-43.444,10	-47.975,50	-38.674,00	5.240,10	22.187,20
Max. Ergebnis	70.807,20	85.705,60	81.560,60	107.428,00	112.661,00
∅ Transaktionen	7.074,32	14.472,49	22.259,68	30.117,17	41.874,29
∅∅ Position	91.888,29	94.635,92	95.962,52	95.859,15	107.300,58
∅ Max. Position	146.357,69	161.433,35	171.336,16	178.460,23	204.063,04
∅ Max. Verlust	8.817,06	13.482,46	17.260,28	19.112,06	27.425,47
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	168.051,42	192.336,79	202.044,99	208.572,08	232.046,16
∅ Rendite	4,59%	8,54%	13,89%	18,93%	24,88%
∅ Rendite (annualisiert)	4,59%	4,18%	4,43%	4,43%	4,54%
∅ EK (100% Margin)	94.153,20	97.349,53	98.784,41	98.271,96	110.349,07
∅ Rendite	8,19%	16,87%	28,40%	40,18%	52,31%
∅ Rendite (annualisiert)	8,19%	8,11%	8,69%	8,81%	8,78%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	36.329,50	47.046,78	47.842,45	47.9578,75	48.389,43
∅ Rendite	21,22%	34,90%	56,89%	82,33%	119,30%
∅ Rendite (annualisiert)	21,22%	16,15%	16,20%	16,20%	17,01%
∅ EK (0% Margin)	2.264,90	2.713,60	2.821,89	2.412,80	3.048,49
∅ Rendite	340,36%	605,06%	994,25%	1.636,51%	1.893,66%
∅ Rendite (annualisiert)	340,36%	165,53%	122,01%	104,14%	81,94%
∅ Volatilität	4.390,05	7.803,42	10.656,31	13.204,07	18.779,67
Sharpe-Ratio	1,5764	2,1040	2,6322	2,9904	3,0706

entsteht. Das MEK sinkt dadurch von 45.312,45 Euro auf 36.329,50 Euro ab und führt damit zu einer Rendite von 21,22% im ersten Jahr. Da der Gewinn auch hier pro Jahr konstant etwa um den Gewinn des ersten Jahres steigt, das MEK nach zwei Jahren aber nahezu konstant bleibt, ergibt sich nach fünf Jahren eine Rendite von 119,30% (annualisiert 17,01%). Das Sharpe-Ratio hat insgesamt ein höheres Niveau und steigt von 1,5762 nach einem Jahr auf 3,0706 nach fünf Jahren.

### Monte-Carlo-Simulation

Insgesamt zeigt die Optimierung der Parameter in Backtests ähnliche Effekte wie in der Monte-Carlo-Simulation in Kapitel 3.5. Das maximal eingesetzte Kapital reduziert sich deutlich bei wachsendem durchschnitt-

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten



**Abbildung 5.7.** Backtest-Ergebnisse: Histogramme über Gewinn (links) und maximalen Verlust (rechts) der Swing-Strategie Euro / US-Dollar für Handelsperioden von einem, zwei, drei, vier und fünf Jahren (von oben nach unten) im Bereich von 2005 bis 2018,  $Q_{0,t}$  ist variabel und entspricht dem fairen Preis.

lichen Gewinn. Für eine maßgeschneiderte Simulation wird das in Kapitel 4.3 beschriebene Parameter-Fitting auf das Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar angewendet. Es ergibt sich folgender geschätzter DGP als Grundlage für eine Monte-Carlo-Simulation:

- ▷ **Startkurs** Es wird ein Startkurs von  $X_0 = 1,20$  angenommen.
- ▷ **Spread** Der durchschnittliche gemessene Spread beträgt 0,1245%.
- ▷ **Volatilität**  $\hat{\sigma} = 0,001918$  pro Stunde ( $\approx 13,56\%$  pro Jahr)
- ▷ **Mean Reversion-Rate**  $\hat{\theta} = 0,000182$  pro Stunde
- ▷ **Einpreisungsrate**  $\hat{\chi} = 2,7652 \cdot 10^{-7}$  pro Stunde

Tabelle 5.4 zeigt Ergebnisse dieser Simulationen mit zusätzlichen Daten über 10 und 20 Jahre.

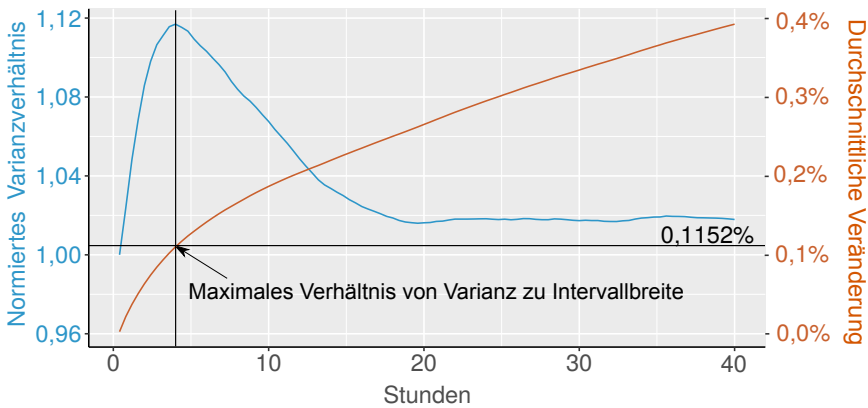
Die simulierten Ergebnisse fallen gerade für Zeiträume von mehreren Jahren insgesamt etwas schlechter aus als die Backtests auf Realmarktdaten. Das liegt vor allem daran, dass sich das Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar seit 2005 verlässlich innerhalb weniger Jahre immer wieder dem 0-Preis annäherte und sich nie mehr als 26 Cent entfernte. Wie gezeigt gibt es daher seit 2005 auch kein 4-Jahres-Intervall, in dem die Swing-Strategie Verlust generiert hätte. Natürlich können sich aber auch Mean Reversion-Prozesse längere Zeiträume von ihrem Ursprung distanzieren, auch größere Differenzen als 26 Cent sind nicht unwahrscheinlich. Die in Tabelle 5.4 gezeigten Ergebnisse verlagern daher vor allem das jeweilige Worst-Case-Szenario in noch tiefere Verlustbereiche, was sich auch in einem geringeren durchschnittlichen Gewinn niederschlägt. So liegt die Rendite nach fünf Jahren nicht mehr bei 119,30% des MEKs ohne Margin, sondern nur noch bei 55,65%. Während nach 10 Jahren ein Verlust aber auch hier sehr unwahrscheinlich ist, liegt das schlechteste Ergebnis nach 20 Jahren bereits in der Gewinnzone.

Zwar zeichnen die künstlich erzeugten Kursdaten unter den gegebenen Modellannahmen also insgesamt ein etwas verhalteneres Bild als die Backtests auf Realdaten, die grundsätzliche Aussage bleibt aber bestehen: Wie das Beispiel der Swing-Strategie zeigt, lassen sich allein durch die Ausnutzung kurzfristiger Schwankungen langfristige Gewinne erzielen.

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten

**Tabelle 5.4.** Monte-Carlo-Simulation mit künstlichem DGP, deren Parameter aus dem Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar geschätzt wurden: Performance und Risiko der Swing-Strategie für Euro / USD mit gleitendem 0-Preis, der dem fairen Preis entspricht.

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	10 Jahre	20 Jahre
Ø Ergebnis	9.943,85	17.306,54	24.496,16	29.805,47	36.034,58	62.410,00	118.439,04
Min. Ergebnis	-106.980,00	-97.179,10	-108.307,00	-164.064,00	-100.045,00	-44.183,90	17.030,10
Max. Ergebnis	119.061,00	193.529,00	237.867,00	216.417,00	274.277,00	243.230,00	507.333,00
Ø Transaktionen	8.344,31	16.538,63	24.674,17	32.888,29	41.128,50	81.977,99	163.959,22
Ø Ø Position	136.763,91	128.535,39	121.658,18	121.677,63	114.606,46	110.208,83	105.340,78
Ø Max. Position	213.545,00	233.549,00	244.825,00	255.371,00	261.345,00	293.809,00	325.922,00
Ø Max. Verlust	12.521,16	16.024,72	18.220,23	19.987,25	19.771,77	26.627,95	26.118,95
MEK 95% (100% Margin)	233.710,10	259.291,03	277.525,12	295.618,20	296.459,24	343.533,13	374.590,09
Ø Rendite (annualisiert)	4,25%	6,67%	8,83%	10,08%	12,15%	18,17%	31,62%
Ø Rendite (annualisiert)	4,25%	3,28%	2,86%	2,43%	2,32%	1,68%	1,38%
Ø EK (100% Margin)	139.259,21	131.293,40	124.314,96	124.274,46	116.707,78	112.146,54	106.252,51
Ø Rendite	7,14%	13,18%	18,70%	23,98%	30,88%	55,65%	111,47%
Ø Rendite (annualisiert)	7,14%	6,39%	5,88%	5,52%	5,53%	4,52%	3,82%
MEK 95% (0% Margin)	41.519,60	49.096,93	57.182,62	65.784,22	61.248,74	79.105,04	81.260,29
Ø Rendite	23,95%	35,25%	42,84%	45,31%	58,83%	78,90%	145,75%
Ø Rendite (annualisiert)	23,95%	16,30%	12,62%	9,79%	9,69%	5,99%	4,60%
Ø EK (0% Margin)	2.495,30	2.758,00	2.656,78	2.595,97	2.101,33	1.937,71	911,73
Ø Rendite	389,50%	627,50%	922,02%	1.147,70%	1.271,484%	3.220,81%	12.990,62%
Ø Rendite (annualisiert)	389,50%	169,72%	117,01%	87,94%	76,54%	41,95%	27,60%
Ø Volatilität	6,858,63	9,462,52	10,967,99	12,253,93	12,785,41	16,246,65	18,318,59
Sharpe-Ratio	1,4498	1,8290	2,2334	2,4323	2,8184	3,8414	6,4655

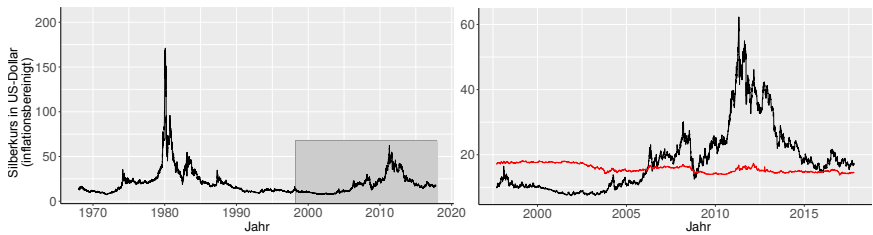


**Abbildung 5.8.** Varianzverhältnisse unterschiedlicher Intervallbreiten für die Wahl des Parameters  $\Delta$ . Für das Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar ergibt sich ein lokales Maximum bei 0,1152% (nach Spread-Bereinigung der Kurszeitreihe).

### 5.2.4 Optimaler Parameter $\Delta$

Der Parameter  $\Delta$  wurde für jegliche Auswertungen auf 0,1152% gesetzt. Dieser doch sehr spezielle Wert wurde bisher nicht weiter erklärt, ist aber auch nicht willkürlich gewählt. Tatsächlich orientiert er sich an den Varianzverhältnissen logarithmierter Kurse für Euro / US-Dollar. Betrachtet man Abbildung 5.8, so zeigt sich im Bereich der ersten 40 Stunden nach etwa vier Stunden ein maximales Verhältnis von Varianz zu Intervallbreite. Die durchschnittliche Veränderung in dieser Zeitspanne liegt wiederum bei 0,1152%. Wählte man den Parameter  $\Delta$  noch größer, so würden überproportional viele Transaktionen nicht ausgeführt. Zwar muss generell davon ausgegangen werden, dass noch kleinere Werte zur Ausnutzung noch geringerer Fehlbewertungen beitragen, dieser Effekt würde aber durch Spread und weitere anfallende Handelskosten reduziert. Evaluationen für diese Arbeit zeigen allerdings so geringe Unterschiede, dass eine weitere detailliertere Auseinandersetzung nicht sinnvoll erscheint. Auch für folgende Auswertungen orientiert sich der Parameter  $\Delta$  daher am Verhältnis von Varianz zu Intervallbreite.

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten



**Abbildung 5.9.** Inflationbereinigter Silberkurs von 1968 bis 2018 (links) mit Ausschnitt von 1998 bis 2018 (rechts), der zusätzlich den inflationbereinigten fairen Preis zeigt.

### 5.3 Rohstoffe: Beispiel Silber

In Kapitel 7 wird gezeigt, dass sich Performance- und Risikowerte durch Diversifikation der Swing-Strategie auf mehrere Assets verbessern lassen. Es wird daher noch auf eine andere Investmentklasse eingegangen, die einige Änderungen in der Anwendung der Swing-Strategie motiviert.

Neben Devisen stellen sich nämlich auch einige Rohstoffe auf den ersten Blick als interessant heraus. So wurde der Silberkurs nicht zufällig bereits in der Einleitung verwendet, um die Idee des Mean Reversion-Effekts zu vermitteln. Edelmetalle gelten seit jeher als verlässliche Vermögensanlagen. Natürlich schwankt auch ihr Preis – es erscheint aber sehr unwahrscheinlich, dass Edelmetalle jemals ganz ihren Wert verlieren.

Wegen seiner interessanten Eigenschaften wird Silber zum Gegenstand einer weiteren Analyse. Es werden jedoch einige Änderungen vorgenommen:

#### ▽ Keine Short-Positionen

Zwar ist der Verlust durch Long-Positionen begrenzt, da der Kurs nicht unter den Wert 0 sinken kann. Eine solche natürliche Grenze gibt es aber nicht für Short-Positionen. Abbildung 5.9 (links) zeigt inflationbereinigten Silberkurs seit 1968. Berücksichtigt man die Silber-Manie der frühen 1980er Jahre, erscheint es sehr riskant gegen ein Investment zu wetten, dessen Wert sich spekulativ in kürzester Zeit verzehnfachen kann. Auch ohne genaue Analyse lässt sich feststellen, dass eine Wette

gegen Silber sowohl in den 1980ern als auch in der jüngeren Entwicklung um 2012 nur mit immensem Kapitaleinsatz erfolgreich gewesen wäre. Ein sehr hohes MEK würde in diesen Bereichen eine geringe Rendite nach sich ziehen. Um diesem Problem zu entgegenen, wird der Handel in Phasen vermeintlicher Überbewertungen ausgesetzt. Es werden also nur Long-Positionen gehandelt.

#### ▷ **Höherer 0-Preis**

Das bisherige Vorgehen, den 0-Preis  $Q_{0,t}$  dem fairen Preis  $\mu_t$  anzupassen, wird verändert – stattdessen wird ein höherer 0-Preis gewählt. Hierfür gibt es mehrere Gründe: Zum einen ist durch die Inflation auch weiterhin ein langfristiger Preisanstieg zu erwarten, der hierdurch berücksichtigt werden kann. Zum anderen kann so der zeitliche Anteil überbewerteter Phasen verringert werden. Betrachtet man den geschätzten fairen Preis für Silber in Abbildung 5.9 (rechts), so stellt sich das Edelmetall seit 10 Jahren als durchgehend überbewertet heraus. Da nun aber keine Short-Positionen gekauft werden, würde in dieser Dekade nahezu kein Handel stattfinden. Durch einen höheren 0-Preis könnte auch in dieser Periode noch gehandelt werden.

### 5.3.1 Evaluation

Es stellt sich die Frage, wie der 0-Preis in einem Szenario ohne Short-Positionen zu wählen ist. Die Suche nach der optimalen Lösung hängt dabei sehr vom subjektiven Risikoempfinden ab. Zusammenfassend lassen sich zwei Annahmen treffen:

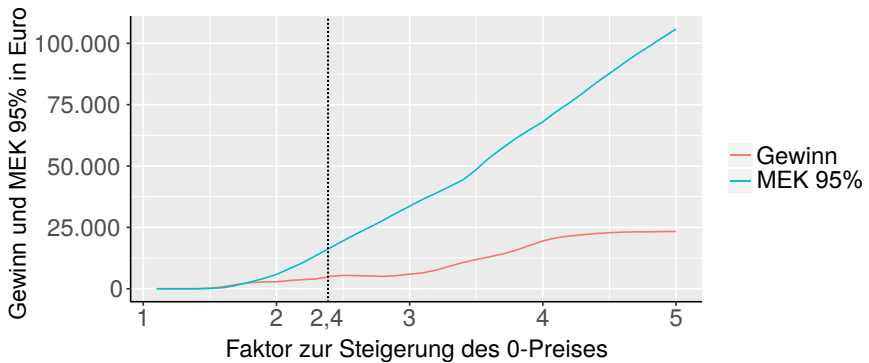
#### ▷ **Je höher der 0-Preis, desto größer der potentielle Gewinn.**

Da während Phasen eines überbewerteten Silberkurses nicht gehandelt wird, führt ein höherer 0-Preis zu längeren Phasen aktiven Handels. Längere Handelsphasen führen wiederum im Mittel zu steigenden Gewinnen.

#### ▷ **Je geringer der 0-Preis, desto geringer das potentielle Risiko.**

Kaufte man Positionen nur in Phasen deutlicher Unterbewertung, so ließe sich in Folge der Mean Reversion-Vermutung eine mittelfristige

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten



**Abbildung 5.10.** Gewinn und MEK 95% in Abhängigkeit des Faktors, um den der 0-Preis gesteigert wird. Es handelt sich um Durchschnittswerte für ein Jahresintervall, die im Bereich von 2008 bis 2018 ermittelt wurden.

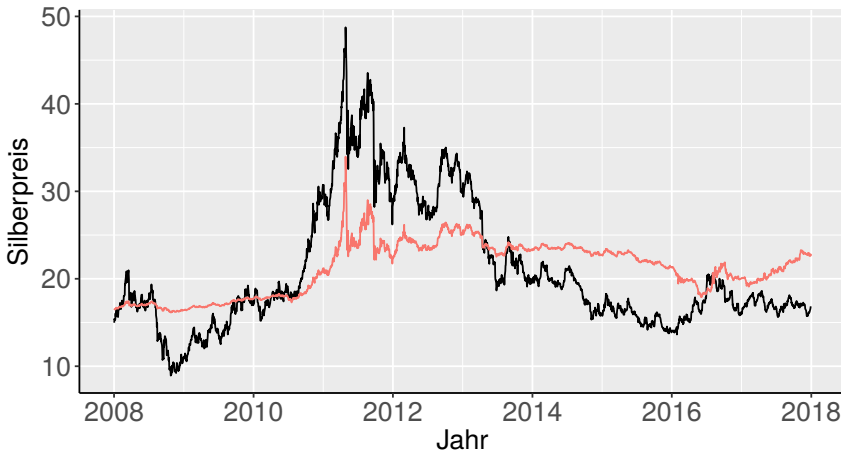
Preissteigerung erwarten, ohne dass weitere Preiseinbrüche wahrscheinlich wären. Der Value at Risk müsste in einem solchen Szenario deutlich geringer ausfallen.

Abbildung 5.10 zeigt den durchschnittlichen Gewinn und das MEK über verschiedene Steigerungsfaktoren für den 0-Preis. Sie bestätigt die Vermutungen und zeigt, dass das sich bessere Verhältnisse von Gewinn zu MEK für geringe 0-Preise, höhere absolute Gewinne aber für höhere 0-Preise ergeben.

In dieser Auswertung wird der Faktor 2,4 gewählt, da er den fairen Preis so steigert, dass der 0-Preis zu Beginn des Evaluationszeitraums (1. Januar 2008) dem aktuellen Preis entspricht. Ohne Inflationsbereinigung läge sein Wert noch bei etwa 7 US-Dollar, die Multiplikation führt zu einem Wert nahe dem Silberkurs von 17 US-Dollar. Abbildung 5.11 zeigt den so errechneten fairen Preis, Tabelle 5.5 die Ergebnisse der dazugehörigen Backtests. Wie bereits erwähnt, wird in Phasen, in denen der Silberpreis über dem fairen Preis liegt, kein Handel ausgeführt. Der Parameter  $\Delta$  wird nach dem in Kapitel 5.2.4 beschriebenen Verfahren gewählt, mit Hilfe von  $N$  werden die Ergebnisse in eine einfach vergleichbare Dimension skaliert. Es ergeben sich folgende Werte:



### 5.3. Rohstoffe: Beispiel Silber



**Abbildung 5.11.** Silberpreis (schwarz) von 2008 bis 2018 mit 2,4-fachem fairem Preis (rot)

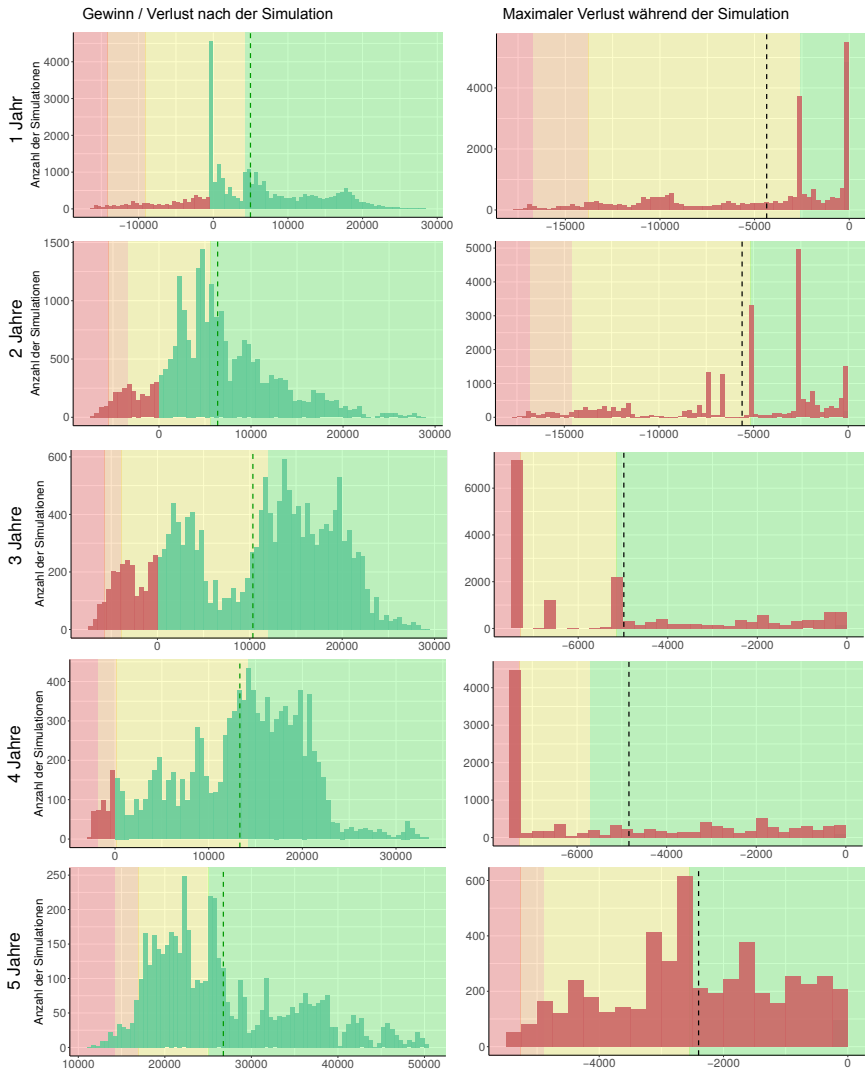
▷  $\Delta\% = 0,9015\%$

▷  $N = 100$

Die Ergebnisse der Backtests werden in Tabelle 5.5 dargestellt, Abbildung 5.12 zeigt die dazugehörigen Histogramme. Bereits in einem Jahr ergibt sich ein durchschnittlicher Gewinn von 4.980,21 Euro, der einem maximal eingesetztem Kapital von 13.764,40 Euro gegenübersteht. Die auf dieses Risikomaß bezogene Rendite von 36,18% liegt deutlich über der für Euro / US-Dollar gemessenen Rendite von 21,22%. Auch andere Renditemaße übertreffen die des Wechselkursverhältnisses erheblich. Das Sharpe-Ratio ist mit 1,5522 allerdings nahezu identisch, die gesteigerte Rendite wird also mit einer im gleichen Maße höheren Volatilität in der Vermögensentwicklung erkaufte.

Anders als bei dem Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar ergeben sich für längere Zeiträume hier Ergebnisse, die unter den Erwartungen einer direkten Extrapolation liegen. So ist der durchschnittliche Gewinn nach zwei Jahren mit 6.375,00 Euro nur etwa 1.400 Euro höher als nach einem Jahr. Die Renditemaße steigen daher kaum, das Sharpe-Ratio sinkt

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten



**Abbildung 5.12.** Backtest-Ergebnisse: Histogramme über Gewinn (links) und maximalen Verlust (rechts) der Swing-Strategie mit Silber für Handelsperioden von einem, zwei, drei, vier und fünf Jahren (von oben nach unten) im Bereich von 2008 bis 2018,  $Q_0$  ist konstant und entspricht dem Startkurs.

### 5.3. Rohstoffe: Beispiel Silber

**Tabelle 5.5.** Backtestergebnisse: Performance und Risiko der Swing-Strategie für Silber mit gleitendem 0-Preis, der dem 2,4-fachen fairen Preis entspricht.

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
∅ Ergebnis	4.980,21	6.375,00	10.333,00	13.325,94	26.704,50
Min. Ergebnis	-16.318,00	-7.227,00	-7.227,00	-2.564,00	11.458,00
Max. Ergebnis	28.054,00	28.643,00	29.028,00	33.089,00	50.283,00
∅ Transaktionen	544,30	1.004,72	1.519,21	2.013,48	2.726,62
∅∅ Position	1.664,67	1.481,88	1.389,76	1.513,95	1.685,77
∅ Max. Position	3.123,30	3.922,70	4.685,16	5.589,64	5.900,00
∅ Max. Verlust	4.361,47	5.605,97	4.980,72	4.842,29	2.401,04
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	55.928,94	67.554,83	70.535,61	82.746,18	84.533,40
∅ Rendite	8,90%	9,44%	14,65%	16,10%	31,66%
∅ Rendite (annualisiert)	8,90%	4,61%	4,66%	3,80%	5,66%
∅ EK (100% Margin)	25.838,59	22.968,85	21.055,58	22.880,31	25.302,68
∅ Rendite	19,27%	27,75%	49,07%	58,24%	105,76%
∅ Rendite (annualisiert)	19,27%	13,03%	14,23%	12,16%	15,52%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	13.764,40	14.598,40	7.286,00	7.286,00	4.883,40
∅ Rendite	36,18%	43,67%	141,82%	182,90%	547,99%
∅ Rendite (annualisiert)	36,18%	19,86%	34,22%	29,69%	45,32%
∅ EK (0% Margin)	868,49	740,64	209,12	171,00	16,19
∅ Rendite	583,44%	860,74%	4.941,09%	7.798,11%	165.253,72%
∅ Rendite (annualisiert)	583,44%	209,96%	269,41%	198,11%	340,23%
∅ Volatilität	3.208,40	4.769,31	4.944,92	6.684,66	6.600,37
Sharpe-Ratio	1,5522	1,3367	2,0896	1,9935	4,0544

sogar auf 1,3367. Die Backtestergebnisse für drei und vier Jahre setzen die für zwei Jahre gezeigten Resultate konsequent fort. Interessanterweise sinkt das maximal eingesetzte Kapital mit wachsender Periodendauer, obwohl der Wert nach bisherigen Erkenntnissen monoton steigen müsste. Diese Anomalität ist dem Umstand geschuldet, dass sich die größten temporären Verluste für Backtests ergeben, die nach 2015 starten – in diesen Bereich fallen jedoch nur Auswertungen von maximal zwei Jahren, da die Datenbasis mit dem Jahr 2017 abschließt.

Auch deshalb steigt das durchschnittliche Ergebnis von Backtests über eine Periode von fünf Jahren massiv auf 26.704,50 Euro an und verdoppelt sich so gegenüber dem Wert für vier Jahre. Ebenso sinken das maximal eingesetzte Kapital und durchschnittliche temporäre Verluste, so dass gemittelte Renditen in jeder Kategorie deutlich ansteigen.

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten

Die Histogramme weisen einige Peaks auf, die sich aus der etwa zwei-jährigen Phase der Überbewertung ergeben. So gibt es nach einem Zeitraum von einem Jahr eine hohe Anzahl an Backtests, in denen kein Handel stattfand und Gewinn und maximaler temporärer Verlust folglich den Wert 0 annehmen. Auch für zwei, drei und vier Jahre sind gerade bei den temporären Verlusten deutliche Peaks zu erkennen. Diese stammen aus der immer gleichen Handelsaktivität nach überwundener Überbewertung im Jahr 2013.

### Monte-Carlo-Simulation

Zwar deuten die Backtests auf eine insgesamt erfolgreiche Anwendung der Swing-Strategie, die Besonderheiten in der ausgewerteten Dekade und die damit verbundenen großen Sprünge zwischen unterschiedlichen Intervallbreiten ergeben aber ein diffuses Bild. Die Backtestergebnisse werden daher mit einer Monte-Carlo-Simulation unterstützt. Durch das Parameter-Fitting ergeben sich folgende Werte:

- ▷ **Startkurs** Es wird ein Startkurs von  $X_0 = 15,00$  angenommen.
- ▷ **Spread** Der durchschnittliche gemessene Spread beträgt 0,2474%.
- ▷ **Volatilität**  $\hat{\sigma} = 0,002297$  pro Stunde ( $\approx 16,24\%$  pro Jahr)
- ▷ **Mean Reversion-Rate**  $\hat{\theta} = 0,0001378$  pro Stunde
- ▷ **Einpreisungsrate**  $\hat{\chi} = 1,3233 \cdot 10^{-7}$  pro Stunde

Es wird zusätzlich eine Inflation von 2% in der Monte-Carlo-Simulation angenommen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.6 dargestellt. Sie zeigen ein homogeneres Bild mit linear ansteigendem Gewinn über die untersuchten 20 Jahre. Durch die eingerechnete Inflation liegt der faire Preis meist deutlich über dem Startpreis – dies führt zu höheren Durchschnittspositionen (und Margins) als in den Backtests. So ergibt sich im Fall einer 100%-igen Margin im ersten Jahr nur eine Rendite von 3,90% im Bezug zum maximal eingesetzten Kapital, die sich in längeren Perioden annualisiert weiter verringert. Zwar ergibt sich dieser typische Effekt auch bei 0%-iger Margin, die Rendite nach einem Jahr ist jedoch bereits 21,69%. Die unterdurchschnittlich steigende Volatilität der Vermögensentwicklung führt wieder

zu wachsenden Sharpe-Ratios. Liegt es nach einem Jahr noch bei 1,2505, so ist sein Wert nach fünf Jahren bereits 2,4624. Die Volatilität der Vermögensentwicklung bzw. des Gewinns steigt also langsamer als der Gewinn selbst. Je länger der untersuchte Zeitraum ist, desto gleichmäßiger ist der erzielte Vermögenszuwachs.

## 5.4 Fazit

Es wurde mit jeweils einem Beispiel für Devisen (Euro / US-Dollar) und Rohstoffe (Silber) gezeigt, dass historische Daten messbare Anzeichen von Mean Reversion aufweisen. Erfolgreiche Backtests für die Swing-Strategie untermauern diese Analyseergebnisse. Dass die Monte-Carlo-Simulation mit gemessenen OU-Parametern ähnliche Resultate liefert, ist gleich aus zwei Gründen als Erfolg zu werten. Zum einen deutet es darauf hin, dass die Modellannahmen schlüssig sind und Monte-Carlo-Simulationen mit künstlichen Kursdaten glaubwürdige Werte liefern. Wenn man den Ergebnissen der Monte-Carlo-Simulation wiederum vertraut, so stützen sie die positiven Backtestdaten und bestätigen damit zum anderen die Vermutung, dass die Swing-Strategie langfristig erfolgreich sein kann.

## 5. Mean Reversion in Finanzmärkten

**Tabelle 5.6.** Monte-Carlo-Simulation mit künstlichem DGP, deren Parameter aus Silberkursen von 1968 bis 2018 geschätzt wurden: Performance und Risiko der Swing-Strategie für Silber mit gleitendem 0-Preis, der dem 24-fachen fairen Preis entspricht. Es werden nur Long-Positionen gehandelt.

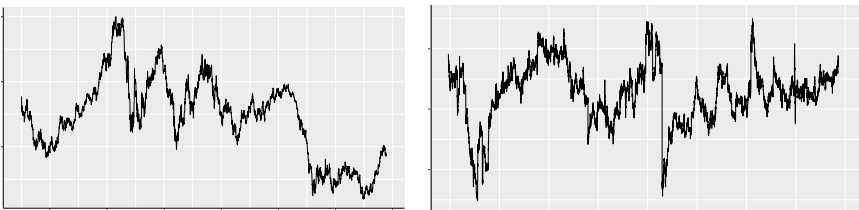
Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	10 Jahre	20 Jahre
Ø Ergebnis	4.420,45	7.591,83	13.017,06	16.850,71	20.087,27	38.576,41	79.018,94
Min. Ergebnis	-34.974,60	-85.366,40	-52.476,60	-47.012,50	-59.820,90	-31.612,50	-18.649,10
Max. Ergebnis	63.154,60	98.079,10	119.095,00	145.011,00	183.936,00	192.418,00	232.642,00
Ø Transaktionen	508,77	948,49	1.393,91	1.839,67	2.291,15	4.562,74	9.256,19
Ø Ø Position	4.490,05	4.186,42	4.479,65	4.338,95	4.154,82	4.142,06	3.974,48
Ø Max. Position	6.891,00	7.098,60	7.987,20	8.219,30	8.362,25	9.469,30	10.523,05
Ø Max. Verlust	6.725,77	9.033,64	10.673,17	11.464,58	12.263,95	14.431,81	15.578,92
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	<b>113.313,33</b>	<b>121.956,40</b>	<b>138.615,82</b>	<b>143.215,86</b>	<b>147.466,21</b>	<b>168.218,68</b>	<b>182.213,20</b>
Ø Rendite (annualisiert)	3,90%	6,23%	9,39%	11,77%	13,62%	22,93%	43,37%
Ø EK (100% Margin)	3,90%	3,07%	3,04%	2,82%	2,59%	2,09%	1,82%
Ø Rendite	68.897,21	64.578,80	69.069,28	66.849,65	64.026,58	63.498,27	60.327,32
Ø Rendite (annualisiert)	6,42%	11,76%	18,85%	25,21%	31,37%	60,75%	130,98%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	<b>20.284,83</b>	<b>26.125,34</b>	<b>30.788,62</b>	<b>32.255,31</b>	<b>34.575,85</b>	<b>40.383,13</b>	<b>40.152,08</b>
Ø Rendite (annualisiert)	21,69%	13,60%	12,47%	11,08%	9,59%	6,93%	5,59%
Ø EK (0% Margin)	1,546,42	1,782,57	1,874,58	1,780,38	1,705,24	1,367,36	710,08
Ø Rendite	285,95%	425,89%	694,40%	946,47%	1.177,97%	2.821,26%	11.128,18%
Ø Rendite (annualisiert)	285,95%	129,32%	99,53%	79,86%	66,46%	40,14%	26,62%
Ø Volatilität	3,535,07	5,027,96	6,436,97	7,378,03	8,157,34	11,445,43	15,595,27
Sharpe-Ratio	1,2505	1,5099	2,0222	2,2839	2,4624	3,3705	5,0669

# Kointegration in Finanzmärkten

Es ließen sich nun noch weitere Assets untersuchen, die über Jahrzehnte durchgehende Anzeichen von Mean Reversion aufweisen. Eventuell würden Finanzprodukte mit gleichem oder sogar höherem Potential gefunden. Dennoch wird in diesem Kapitel ein anderer Weg beschritten – allerdings mit der gleichen Zielsetzung, nämlich der Identifikation vielversprechender Realmarktdaten für die Swing-Strategie.

Hierfür wird mit einem kurzen Blick auf Abbildung 6.1 begonnen, die zwei nicht weiter beschriebene Zeitreihen zeigt. Skalen wurden bewusst entfernt, es geht allein um die Form der Kurven. Es ergibt sich die Fragestellung, welche der zwei dargestellten Kursentwicklungen für die Swing-Handelsstrategie geeigneter ist.

Die rechte Zeitreihe zeigt im vom Maximal- bis zum Minimalwert aufgespannten Bereich eine wesentlich stärkere Volatilität. Gleichzeitig scheint das Erreichen eines Extremwerts eine schnelle Trendumkehr nach sich zu ziehen. Zwar zeigt die linke Zeitreihe ähnliche Tendenzen zur Rückkehr, aber mit sichtlich geringerer Intensität. Die Antwort ist eindeutig: die rechte Zeitreihe verspricht ein besseres Verhältnis von Rendite zu Risiko,



**Abbildung 6.1.** Optimalitätskriterien anhand zweier (skalenloser) Zeitreihen

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

da sie wesentlich schneller zu einem gedachten Mittelwert zurückkehrt. Tatsächlich ist die gemessene Mean Reversion-Rate in der rechten Zeitreihe  $\hat{\mu} = 0,0004255$ , links nur  $\hat{\mu} = 0,000182$ .

Bei der linken Zeitreihe handelt es sich um das bereits im letzten Kapitel genau untersuchte Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar von 2005 bis 2018. Die rechte Zeitreihe ist ein Ergebnis des Verfahrens, welches in diesem Kapitel vorgestellt wird. Was sich genau hinter ihr verbirgt und welche Folgen sich für das Swing-Handelssystem ergeben, wird nach einer einleitenden Beschreibung der grundlegenden Idee veranschaulicht.

### 6.1 Pairs Trading

Grundsätzlich geht es beim spekulativen Wertpapierhandel um den Kauf unterbewerteter und den Verkauf überbewerteter Finanzprodukte. Diese einfache Faustregel stellt den Marktteilnehmer jedoch vor die komplexe Herausforderung, aktuelle Preise auf Basis einer zwar immensen, aber gleichwohl unzureichenden Informationslage richtig zu analysieren. Das wohl mächtigste Werkzeug ist dabei der Vergleich im Gefüge ähnlicher Wertpapiere, deren Kurse normalerweise stark korreliert sind. Geht man von gegenseitigen Wechselwirkungen aus, so müsste sich ein Vergleich tatsächlich für eine aussagekräftige Bewertung eignen.

Entwickeln sich Preise zweier Konzerne eines Segments (z.B. Coca Cola und Pepsi) ohne erkennbaren Grund stark auseinander, so ließe sich infolgedessen eine nachträgliche Konvergenz dieser Kurse vermuten. In diesem Umfeld ist eine gegenseitige Indikation naheliegend und wie im Folgenden genannte Quellen zeigen, nachweislich erfolgreich.

Es lässt sich aber auch direkt auf Konvergenz spekulieren, ohne dass der Anleger von Marktschwankungen betroffen ist. Durch den Kauf von Long- und Short-Positionen der unter- und überbewerteten Aktien in gleicher Größenordnung kann auf ausgleichende Bewegungen gewettet werden. Idealerweise löscht sich das generelle Marktrisiko der Anlagen aus, lediglich die Kursdifferenz ist entscheidend. Diese Idee begründet das *Pairs Trading*, welches in den 1980er Jahren von Nunzio Tartaglia bei Morgan Stanley entwickelt wurde [Vid04]. Es erfordert, dass durch die Analyse relativer Preisveränderungen von stark korrelierten Paaren in



## 6.2. Kointegrierte Kombinationen

einer zurückliegenden Zeitspanne Fehlbewertungen aufgedeckt und ausgenutzt werden können. Gatev, Goetzmann und Rouwenhorst erreichten mit Portfolios solcher Paare in den Jahren 1962 bis 2002 eine annualisierte Rendite von 11% [GGR06]. Broussard und Vaihekoski erzielten in den Jahren 1987 bis 2008 durchschnittlich 12,5% [BV12]. Weitere Untersuchungen kamen in den letzten Jahrzehnten zu ähnlichen Resultaten [CM13; CW11]. Diese Erfolge sind auch deshalb beachtlich, da Pairs Trading eben nicht von der generellen Wertsteigerung der Aktienmärkte profitiert. Es zieht seine Rendite einzig aus der Tendenz rückläufiger Überreaktionen.

Zwar gilt die kontinuierlich sinkende Profitabilität des Pairs Tradings wegen der detaillierten wissenschaftlichen Auseinandersetzung als sicher, eine völlige Auslöschung ist aber nicht zu erwarten [DF10]. Kraus kategorisiert verschiedene Ansätze des Pairs Tradings [Kra17], die jedoch stets auf der Annahme kointegrierter Zeitreihen basieren.

## 6.2 Kointegrierte Kombinationen

Verfolgt man den Gedanken des Pairs Trading konsequent, stellt sich unweigerlich die Frage, ob die Betrachtung größerer Mengen von Assets weitere Verbesserungen bewirkt. Wenn durch Kombination zweier Wertpapiere Mean Reversion erzeugt oder verstärkt wird, ist der Schluss naheliegend, dass eine gewichtete Kombination einer beliebigen Anzahl weitere Steigerungen nach sich ziehen kann. Im Folgenden wird daher ein Verfahren definiert, welches geeignete Kombinationen identifiziert.

### 6.2.1 Identifikation kointegrierter Portfolios

Gesucht wird also nach einer Kombination von Gewichtungen für verschiedene Assets, so dass der resultierende Portfolioprozess eine hohe Mean Reversion-Rate aufweist. Hierfür müssen aber zusätzlich geeignete Kandidaten gefunden werden, da beliebige Assets nicht zwangsläufig kointegriert sind. Es ergeben sich also zwei Probleme:

1. Berechnung optimaler Gewichtungen für gegebene Assets, so dass die Mean Reversion-Rate der Kombination maximal wird.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

- Suche nach kointegrierten Assets, für welche eine Kombination mit hoher Mean Reversion-Rate existiert.

Es wird mit der Untersuchung des erstgenannten Problems begonnen. Es wird also darauf eingegangen, wie Gewichtungen für eine gegebene Menge von Assets gefunden werden können.

### 6.2.2 Optimierungsverfahren

Seien  $n$  Assets gegeben. Sei  $X \in \mathbb{R}^{T \times n}$  die Matrix der Log-Preise dieser Assets über  $T$  Zeitpunkte, so dass eine Zeile  $X_t \in \mathbb{R}^n$  alle Log-Preise zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  beschreibt.

Es wird nun nach einem Gewichtsvektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

gesucht, so dass der Portfolioprozess  $P_t = X_t x$  sich durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

$$dP_t = \theta (\mu - P_t) dt + \sigma dW_t^P$$

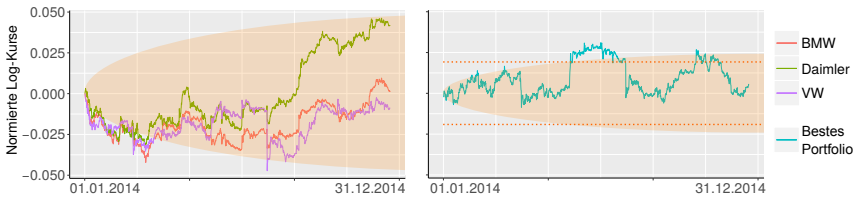
mit Zufallskomponente  $dW_t^P$  und möglichst hoher Mean Reversion-Rate  $\theta$  darstellen lässt.

**6.2.1 Beispiel.** Seien für  $n = 3$  Aktien (BMW, Daimler, VW) 43.550 Datenpunkte vom 01.01.2014 bis 31.12.2014 gegeben, so dass die Matrix der Log-Preise  $X \in \mathbb{R}^{43.550 \times 3}$  bekannt ist. Diese Werte sind im linken Diagramm der Abbildung 6.2 gezeigt, der Startkurs wurde für eine bessere Darstellung jeweils auf 0 gesetzt. Der optimale Gewichtsvektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5816 \\ 0,4383 \\ 0,9793 \end{pmatrix}$$

für BMW, Daimler und VW führt zu dem rechts dargestellten Portfolioprozess mit maximaler Mean Reversion-Rate. Es soll nun geklärt werden, wie der Gewichtsvektor berechnet wird.

## 6.2. Kointegrierte Kombinationen



**Abbildung 6.2.** Log-Kurse dreier deutscher Autokonzerne im Jahr 2014 (links) und das Portfolio aus diesen Aktien mit höchster Mean Reversion-Rate  $\theta$  (rechts). Der orangene Bereich zeigt schematisch die zeitliche Entwicklung der Varianz. Die horizontalen, gestrichelten Linien in der rechten Abbildung zeigen die Varianzentwicklung im optimalen Fall eines stationären Prozesses.

Für ein besseres Verständnis der grundlegenden Idee sind in Abbildung 6.2 orangene Bereiche gezeigt, die schematisch darstellen, wie die Varianz der jeweiligen Prozesse zeitabhängig anwächst. Wie bei der Einführung der Mean Reversion-Rate in Kapitel 2.4.3 schon diskutiert wurde, führt eine hohe Mean Reversion-Rate zu einem geringeren Wachstum. Die Varianz des errechneten Portfolios steigt tatsächlich langsamer als für die einzelnen Aktien. Ideal wäre eine stationäre Zeitreihe mit konstanter Varianz, schematisch durch die gestrichelte Linie im rechten Diagramm angedeutet.

Um zu verstehen, wie das Wachstum minimiert werden kann, folgt eine kurze Rekapitulation, wie sich die Varianz zusammensetzt.

Assetkurse zum Zeitpunkt  $t$  hängen natürlich von den Kursen zum Zeitpunkt  $t - 1$  ab. Geht man von kointegrierten Kursen aus, existieren hier Zusammenhänge auch zwischen unterschiedlichen Assets. Im genannten Beispiel ist der Kurs der Daimler-Aktie zum Zeitpunkt  $t$  also nicht nur vom eigenen Kurs zum Zeitpunkt  $t - 1$  abhängig, sondern auch von BMW- und VW-Kursen zu diesem Zeitpunkt.

Die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  beschreibe die Änderung jeder dieser Log-Preis-Zeitreihen in Abhängigkeit der vorigen Zeitelemente bestmöglich, so dass  $X_t \in \mathbb{R}^n$  mit  $dW_t^X \in \mathbb{R}^n$  als autoregressiver Prozess dargestellt werden kann mit

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

$$X_t = X_{t-1}A + dW_{t-1}^X.$$

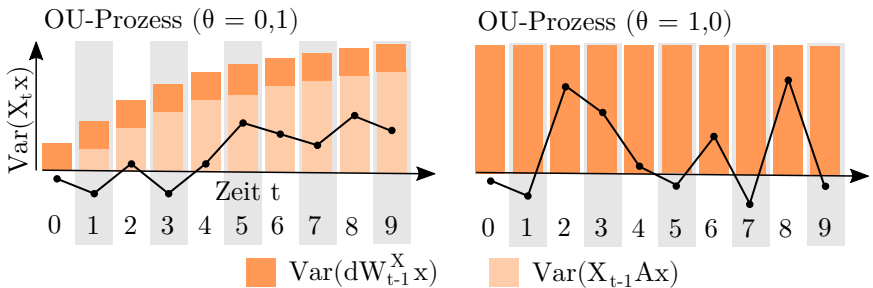
Für das Portfolio mit Gewichtsvektor  $x$  gilt somit

$$\begin{aligned} P_t &= X_t x = (X_{t-1}A + dW_{t-1}^X)x \\ &= X_{t-1}Ax + dW_{t-1}^X x. \end{aligned}$$

Für die Varianz des Portfolios gilt dann

$$\text{Var}(X_t x) = \text{Var}(X_{t-1}Ax) + \text{Var}(dW_{t-1}^X x).$$

Die Varianz des Portfolioprozesses  $X_t x$  zum Zeitpunkt  $t$  setzt sich also aus zwei Varianzanteilen zusammen, wie in Abbildung 6.3 genauer dargestellt wird. Sie zeigt für unterschiedliche Mean Reversion-Raten  $\theta$ , welchen Einfluss vorige Elemente ( $\text{Var}(X_{t-1}Ax)$ ) und die aktuelle Kursänderung ( $\text{Var}(dW_{t-1}^X x)$ ) auf die Gesamtvarianz ( $\text{Var}(X_t x)$ ) haben.



**Abbildung 6.3.** Verteilung von Varianzanteilen in der Gesamtvarianz  $\text{Var}(X_t x)$  in Abhängigkeit von der Mean Reversion-Rate  $\theta$

Je größer die Mean Reversion-Rate  $\theta$ , desto geringer der Einfluss früherer Zeitreihenelemente auf die Varianz. Im Idealfall eines stationären Prozesses mit  $\theta = 1,0$  ist der übertragene Varianzanteil früherer Elemente  $\text{Var}(X_{t-1}Ax) = 0$ . Dieser Fall entspräche in Abbildung 6.2 wie erwähnt der idealen, gestrichelten Linie mit zeitunabhängiger Varianz. Er wird zwar mit Realmarktdaten nicht erreichbar sein, zumindest wäre aber

## 6.2. Kointegrierte Kombinationen

ein möglichst geringer Anteil von  $\text{Var}(X_{t-1}Ax)$  in der Gesamtvarianz  $\text{Var}(X_t x)$  wünschenswert. Dieser Anteil lässt sich für einen Zeitpunkt  $t$  durch den Quotienten

$$\nu(x) = \frac{\text{Var}(X_{t-1}Ax)}{\text{Var}(X_t x)} \quad (6.2.2)$$

darstellen. Wie in Abbildung 6.3 gezeigt, nähert sich dieser Prozess einem weißen Rauschen an, wenn der Einfluss von  $\text{Var}(X_{t-1}Ax)$  gering ist. Je kleiner  $\nu(x)$ , desto höher ist nach dieser Vorstellung also die Mean Reversion-Rate des Prozesses  $X_t x$ . Tatsächlich gilt nach d'Aspremont ([dAs11]) sogar

$$\theta(x) = 1 - \nu(x),$$

wobei  $\theta(x)$  die Mean Reversion-Rate des für  $x$  entstehenden Portfolioprozesses ist. Natürlich können die Varianzen und damit auch  $\nu(x)$  für Realmarktdaten nur approximiert werden, ebenso wie die Matrix  $A$ . Für eine endliche Menge von Beobachtungen  $X \in \mathbb{R}^{T \times n}$  und eine vorgegebene Matrix  $\hat{A}$  ergibt sich nach Gleichung 6.2.2 mit

$$S_{t-1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{T-1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_t = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_T \end{pmatrix}$$

die Approximation

$$\hat{\nu}(x) = \frac{\text{Var}(S_{t-1}\hat{A}x)}{\text{Var}(S_t x)}. \quad (6.2.3)$$

Für das Beispiel der Aktien BMW, Daimler und VW mit  $X \in \mathbb{R}^{43.550 \times 3}$  stehen also 43.549 Paare für die Berechnung einer geschätzten Mean Reversion-Rate  $\hat{\theta}$  in Abhängigkeit vom Gewichtsvektor  $x \in \mathbb{R}^3$  zur Verfügung. Für eine maximale Mean Reversion-Rate  $\hat{\theta}(x)$  muss  $\hat{\nu}(x)$  minimiert werden.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

**6.2.4 Bemerkung.** Um zu diesem Minimierungsverfahren anschaulich hinzuleiten, folgen einige kurze Hinweise zur Berechnung der Varianzen im Zähler und Nenner der Gleichung 6.2.3.

Es wird mit dem Nenner begonnen, der die Varianz des Portfolios  $\text{Var}(S_t x)$  im Zeitbereich  $[1, T]$  beschreibt. Hierfür muss man sich bewusst machen, dass Log-Preise einzelner Assets nicht unabhängig voneinander sind. Unter Berücksichtigung des Gewichtsvektors  $x$  sind nicht nur Einzelvarianzen der Log-Preise der Assets entscheidend, die Portfoliovarianz hängt auch von der Kovarianz der Assets untereinander ab.

Seien hierfür  $S_{t,1}, S_{t,2}, \dots, S_{t,n} \in \mathbb{R}^{T-1}$  die  $n$  Spalten der Matrix  $S_t$ , also die jeweiligen Log-Preise der Assets 1 bis  $n$  im Zeitbereich  $[1, T]$ . Die Kovarianzmatrix  $\text{Cov}(S_t)$  ist gegeben durch

$$\text{Cov}(S_t) = \begin{pmatrix} \text{Var}(S_{t,1}) & \text{Cov}(S_{t,1}, S_{t,2}) & \cdots & \text{Cov}(S_{t,1}, S_{t,n}) \\ \text{Cov}(S_{t,2}, S_{t,1}) & \text{Var}(S_{t,2}) & \cdots & \text{Cov}(S_{t,2}, S_{t,n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(S_{t,n}, S_{t,1}) & \text{Cov}(S_{t,n}, S_{t,2}) & \cdots & \text{Var}(S_{t,n}). \end{pmatrix}$$

mit

$$\text{Cov}(S_{t,i}, S_{t,j}) = \mathbb{E}((S_{t,i} - \mathbb{E}(S_{t,i})) \cdot (S_{t,j} - \mathbb{E}(S_{t,j}))).$$

Zusätzlich soll hier daran erinnert werden, dass die Varianz einer gewichteten Zufallsvariable  $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$  quadratisch mit der Gewichtung  $a \in \mathbb{R}$  steigt, also

$$\text{Var}(aY_t) = a^2 \text{Var}(Y_t)$$

gilt. Betrachtet man die Kovarianz zweier Prozesse  $(Y_t)_{t \in \mathbb{T}}$  und  $(Z_t)_{t \in \mathbb{T}}$  mit Gewichtungen  $a, b \in \mathbb{R}$ , so gilt für diese

$$\text{Cov}(aY_t, bZ_t) = ab \text{Cov}(Y_t, Z_t).$$

Die Portfoliovarianz  $\text{Var}(S_t x)$  ergibt sich über die Summen der gewichteten Elemente der Kovarianzmatrix  $\text{Cov}(S_t)$ , mit transponiertem Gewichtsvektor  $x^T$  ergibt sich folgende Darstellung:

## 6.2. Kointegrierte Kombinationen

$$\text{Var}(S_t x) = x^T \text{Cov}(S_t) x \quad (6.2.5)$$

Für die Berechnung des Zählers in Gleichung 6.2.3 ( $\text{Var}(S_{t-1} \hat{A} x)$ ) muss zunächst die Matrix  $\hat{A}$  geschätzt werden, die die Abbildung von  $S_{t-1}$  nach  $S_t$  möglichst fehlerfrei beschreibt. Die Gauß'sche Methode der kleinsten Quadrate sei an dieser Stelle nicht genauer erläutert, ihre Verfahrensweise wird in zahlreichen Lehrbüchern (z. B. [Geo15]) detailliert beschrieben. Sie liefert das optimale Ergebnis

$$\hat{A} = \left( S_{t-1}^T S_{t-1} \right)^{-1} \left( S_{t-1}^T S_t \right).$$

Die vom Zeitpunkt  $t-1$  nach  $t$  übertragene Varianz kann aus der Kovarianzmatrix dann analog zu Gleichung 6.2.5 geschätzt werden mit

$$\text{Var}(S_{t-1} \hat{A} x) = x^T \hat{A}^T \text{Cov}(S_{t-1}) \hat{A} x$$

Statt  $\text{Cov}(S_{t-1})$  und  $\text{Cov}(S_t)$  kann die Kovarianzmatrix  $\text{Cov}(X_t)$  genutzt werden, die jeweils einen Messwert mehr nutzt und somit die Schätzung verbessert. Mit  $\Gamma = \text{Cov}(X_t)$  ergibt sich also das Optimierungsmaß

$$\hat{v}(x) = \frac{x^T \hat{A}^T \Gamma \hat{A} x}{x^T \Gamma x}. \quad (6.2.6)$$

**6.2.7 Bemerkung.** Die Minimierung erfolgt über die Berechnung von Eigenvektoren, daher soll hier in Kürze anschaulich die Idee dahinter erläutert werden.

Die Multiplikation einer Kovarianzmatrix  $\Gamma$  mit einem Gewichtsvektor  $x$  ist eine lineare Abbildung  $\mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ein Eigenvektor einer solchen linearen Abbildung ist ein Vektor mit der besonderen Eigenschaft, dass er durch die Transformation lediglich skaliert wird, sich seine Richtung aber nicht ändert. Für eine Kovarianzmatrix (im Regelfall regulär und symmetrisch) ergeben sich  $n$  orthogonale Eigenvektoren. Man kann sich also vorstellen, dass diese Eigenvektoren der Kovarianzmatrix im Abbildungsraum ein neues Koordinatensystem aufspannen. Eigenvektoren werden um ihren jeweiligen Eigenwert skaliert, es kommt also zu

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

unterschiedlichen Skalierungen in den  $n$  Dimensionen des gedachten Koordinatensystems. Je nach Orientierung eines Vektors ergibt sich ein anderer Skalierungsfaktor, der kleinste Faktor ergibt sich in Richtung des Eigenvektors mit dem kleinsten Eigenwert. Der Eigenvektor mit dem kleinsten Eigenwert einer Kovarianzmatrix wird im Abbildungsraum also kürzer als jeder andere Eingabevektor gleicher Länge. Wählt man diesen Eigenvektor als Gewichtsvektor  $x$ , so ergibt sich demnach im Verhältnis zu den Gewichten die geringste Varianz  $x^T \Gamma x$ .

Die Minimierung des Quotienten in Gleichung 6.2.6 folgt der gleichen Idee. Box und Tiao beschreiben den Lösungsweg für dieses analytische Problem [BT77]. Sie zeigen, dass sich der minimale Wert  $\hat{v}(x)$  über den Eigenvektor  $v_{\min}$  zum kleinsten Eigenwert  $\lambda_{\min}$  mit

$$\det(\lambda_{\min} \Gamma - \hat{A}^T \Gamma \hat{A}) = 0$$

ergibt. Nach der Umformung von Box und Tiao ist der Gewichtsvektor  $x$  mit

$$x = \Gamma^{-1/2} v_{\min}$$

mit dem Eigenvektor  $v_{\min}$  zum kleinsten Eigenwert  $\lambda_{\min}$  der Matrix

$$\Gamma^{-1/2} A^T \Gamma A \Gamma^{-1/2}$$

optimal. Je kleiner der Eigenwert  $\lambda_{\min}$  ist, desto höher ist die Mean Reversion-Rate des Portfolioprozesses. Für die drei Aktien BMW, Daimler und VW ergeben sich hierüber die Gewichte -1,5816, 0,4383 und 0,9793, die zum in Abbildung 6.2 dargestellten Portfolio führen.

### 6.3 Anwendung in Realmarktdaten

Natürlich ist die Suche nach Kombinationen mit herausragenden Eigenschaften nur zielführend, wenn sich für diese auch in folgenden Zeiträumen überdurchschnittliche Werte ergeben. In diesem Abschnitt werden



daher Mean Reversion-Raten zweier Zeiträume verglichen. Im Kalibrierungszeitraum werden nach dem gerade vorgestellten Verfahren Gewichte für Kombinationen mit maximaler Mean Reversion-Rate errechnet. Ein disjunkter Evaluierungszeitraum wird genutzt, um die Prognostizierbarkeit der Mean Reversion-Rate zu analysieren. Je höher die Korrelation der Mean Reversion-Raten zwischen beiden Zeiträumen ist, desto genauere Vorhersagen sind möglich.

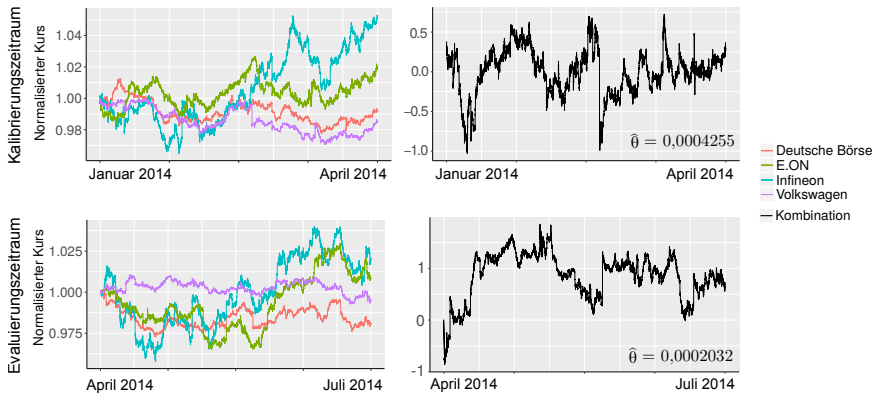
Zunächst müssen aber sinnvolle Kombinationsgrößen gefunden werden. Allgemein gilt, dass eine höhere Anzahl von Assets im Kalibrierungszeitraum zu einer höheren Mean Reversion-Rate führt. Dass diese dann aber auch generell bessere Werte in einem disjunkten Evaluierungszeitraum liefern, ist ein Fehlschluss. Zweifelsohne lässt sich aus einer Linearkombination beliebig vieler (zufälliger) Zeitreihen eine neue Zeitreihe erstellen, die extrem attraktive Eigenschaften aufweist. Wenn aber keine Kointegration existiert, ist ein zukünftiges Wiedereintreten dieses Musters reiner Zufall. Es besteht daher die Gefahr einer Überoptimierung, also einer Wahl zu vieler oder irrelevanter Assets. Aus diesem Grund werden nur kleine Kombinationen bis zu einer Größe von 12 Assets untersucht.

#### 6.3.1 Aktien: Beispiel DAX-Unternehmen

Die im folgenden Abschnitt beschriebenen Ergebnisse basieren auf einer erschöpfenden Suche nach außergewöhnlich kleinen Eigenwerten  $\lambda_{\min}$  zu Assetkombinationen fester Größe. Um eine ausreichende Anzahl von Testfällen überprüfen zu können, werden Gewichte über alle Aktien des deutschen Aktienindex DAX mit Kardinalitäten 4, 6, 8, 10 und 12 im Quartal von Januar bis April 2014 ermittelt. Es folgt eine anschließende Auswertung der Kombinationen im folgenden Quartal mit der Hoffnung, dass Mean Reversion-Raten in den zwei Zeiträumen zumindest in gewissem Maß korrelieren.

Da der Aktienindex die Wertentwicklung der 30 größten Unternehmen des deutschen Aktienmarkts abbildet, ergeben sich beispielsweise  $\binom{30}{12} \approx 86$  Millionen Kombinationen aus 12 Aktien. Sollte sich im Mittel zumindest eine gewisse Persistenz der Mean Reversion über den Kalibrierungszeitraum hinaus ergeben, so kann dies als signifikantes Zeichen für existierende Kointegration gedeutet werden.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten



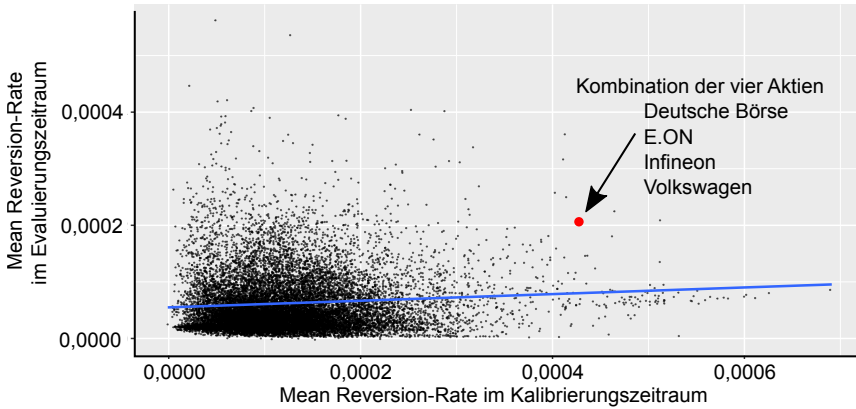
**Abbildung 6.4.** Vier Aktien (links) und deren gewichtete Kombination (rechts) mit maximaler Mean Reversion-Rate  $\hat{\theta} = 0,0004255$  im Kalibrierungszeitraum. Gleiche Gewichte führen zu  $\hat{\theta} = 0,0002032$  im Evaluierungszeitraum.

Für eine bessere Anschauung folgt zunächst ein einfaches Beispiel: Abbildung 6.4 zeigt die Berechnung einer Gewichtung für vier Aktien, die im deutschen Aktienindex DAX gelistet sind: Deutsche Börse, E.ON, Infineon und Volkswagen. Obwohl bei diesen Aktien auf den ersten Blick keine starken Zusammenhänge zu vermuten sind, ermittelt das Verfahren im ersten Quartal 2014 eine maximale Mean Reversion-Rate  $\hat{\theta} = 0,0004255$  für die Gewichtungen  $-21,09$ ,  $4,61$ ,  $-1,46$  und  $15,23$  in gleicher Reihenfolge für diese Aktien.

Mit diesem gewichteten Prozess wurde am Anfang des Kapitels das Verfahren motiviert, da der Wert  $\hat{\theta}$  vier mal höher als beim Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar ist. Wichtiger ist natürlich, ob sich diese Ergebnisse auch im Evaluationszeitraum widerspiegeln. Verwendet man die gewichtete Kombination im zweiten Quartal 2014, so ergibt sich tatsächlich auch hier ein Mean Reversion-Prozess mit hohem Wert  $\hat{\theta} = 0,0002032$ .

Es wurde schon angemerkt, dass ein einzelnes Beispiel kaum Aufschluss darüber geben kann, ob und wie genau Vorhersagen zur zukünftigen Mean Reversion-Rate möglich sind. Daher stellt Abbildung 6.5 die jeweiligen Mean Reversion-Raten von Kalibrierungs- und Evaluierungs-

### 6.3. Anwendung in Realmarktdaten



**Abbildung 6.5.** Verhältnis von Mean Reversion-Raten aller Kombinationen aus vier Aktien des DAX in Kalibrierungs- und Evaluierungszeitraum. Die blaue Linie zeigt als Regressionsgerade einen positiven Zusammenhang zwischen beiden Zeiträumen. Der rote Punkt entspricht der schon näher untersuchten Kombination mit Deutscher Bahn, E.ON, Infineon und Volkswagen.

zeitraum für alle Kombinationen aus vier Aktien in Bezug. Jeder Punkt steht für eine Kombination.

Idealerweise lägen alle Punkte auf einer steigenden Geraden, so dass ein direkter, signifikanter und exakt prognostizierbarer Zusammenhang zwischen aktueller und zukünftiger Mean Reversion-Rate bestünde. Das ist zwar auch schon wegen der gerade genannten Problematik der Überoptimierung gar nicht möglich, da sich selbst unabhängige Zeitreihen in der Kalibrierung zu Mean Reversion-Prozessen kombinieren. Zumindest sollte aber eine gewisse Korrelation zwischen den Daten bestehen, die dann auf dem Einfluss der wenigen tatsächlich kointegrierten Kombinationen beruht. Tatsächlich vermittelt die blaue Regressionsgerade in Abbildung 6.5 einen positiven Zusammenhang. Es besteht also eine Korrelation – eine überdurchschnittliche Mean Reversion-Rate während der Kalibrierung führt im Mittel zu einer überdurchschnittlichen Mean Reversion-Rate im Evaluationszeitraum.

Tabelle 6.1 zeigt genaue Auswertungen für diese und weitere Kardinalitäten. Zum einen werden durchschnittliche Mean Reversion-Raten

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

**Tabelle 6.1.** Durchschnittliche Mean Reversion-Raten während Kalibrierungs- und Evaluationszeitraum

Kardinalität	∅ Kalibrierung	∅ Evaluation	Signifikanz	Korrelation
4	0,0001643	0,0000660	1,626%	0,0914
6	0,0001759	0,0000752	2,741%	0,1142
8	0,0001861	0,0000862	3,528%	0,1284
10	0,0001892	0,0000841	3,215%	0,1096
12	0,0001905	0,0000729	3,001%	0,1235

während des Kalibrierungs- und Evaluierungszeitraums dargestellt. Zum anderen zeigen Signifikanz und Korrelation, mit welcher Gewissheit Voraussagen möglich sind. Die Signifikanz beschreibt, welcher Anteil einer gesteigerten Mean Reversion-Rate durchschnittlich im Evaluationszeitraum ankommt. Sie ist somit die Steigung der Regressionsgeraden, wie in Abbildung 6.5 dargestellt. Für vier Aktien liegt der Wert bei 1,626%, eine um 0,001 höhere Mean Reversion-Rate während der Kalibrierung führt im Evaluationszeitraum also durchschnittlich zu einer Steigung um 0,00001626. Dieser sehr gering anmutende Wert ist zudem nur ungenau prognostizierbar, der Korrelationskoeffizient zwischen Vorhersage und Wirklichkeit liegt bei gerade einmal 0,0914.

Beide Werte lassen sich damit erklären, dass der größte Anteil aller Kombinationen vermutlich nicht kointegriert ist und völlig zufällige Ergebnisse liefert. Dennoch sind Signifikanz und Korrelation nicht nur stets positiv, sie steigen auch spürbar bis zur Kombination von acht Aktien an. Das ist auch deshalb bemerkenswert, da die steigende Überoptimierung bei höheren Kardinalitäten normalerweise zum gegenteiligen Effekt führen müsste.

Die einzig plausible Erklärung besteht darin, dass sich die Mean Reversion-Rate durch das Hinzufügen weiterer Aktien bis hin zu acht Wertpapieren tatsächlich auch nachhaltig im Evaluationszeitraum steigern lässt. Die hohe Anzahl möglicher Kombinationen verleiht dieser Beobachtung Nachdruck, denn bei über fünf Millionen Varianten erscheint reiner Zufall unwahrscheinlich.

### 6.3. Anwendung in Realmarktdaten



**Abbildung 6.6.** Logarithmierte und normierte Performance-Kurse vierer nationaler Aktienindizes zwischen 2001 und 2008

Unter dieser Annahme von Kointegration, lassen sich Kursbewegungen in einem wechselseitigen Gefüge nutzen, um Vorhersagen treffen zu können. Im folgenden Abschnitt wird das Verfahren daher mit der Swing-Strategie verknüpft.

#### 6.3.2 Aktienindizes

Wenn Aktien kointegriert sind, erscheint es ebenso wahrscheinlich für Aktienindizes, die gleichzeitige Wertentwicklungen mehrerer Wertpapiere zu einer Kennzahl zusammenfassen. Während einzelne Unternehmen für extreme Kursausschläge anfällig sind, sind Aktienindizes wesentlich unempfindlicher gegenüber individuellen Risiken wie beispielsweise Übernahmen oder Insolvenzen. Da solche Ereignisse erkannte Kursbalancen möglicherweise langfristig stören, sind fehlende Individualrisiken als Vorteil zu werten. Für Aktienindizes gibt es zudem gehebelte Finanzprodukte mit geringer Margin und geringen Handelskosten, die sie für die Swing-Handelsstrategie attraktiver machen. Für eine gesonderte Analyse werden daher folgende vier nationale Aktienindizes genauer untersucht:

- ▷ CAC 40 (Französischer Aktienindex)
- ▷ DAX 30 (Deutscher Aktienindex)

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

▷ S&P 500 (US-Amerikanischer Aktienindex)

▷ Nikkei 225 (Japanischer Aktienindex)

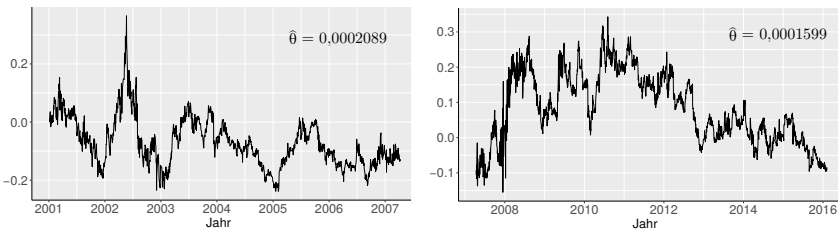
Sie wurden deshalb ausgewählt, weil die Kointegrationsanalyse eine überdurchschnittliche gemeinsame Mean Reversion-Rate  $\hat{\theta} = 0,0002089$  im Zeitbereich von 2001 bis 2008 ermittelt. Abbildung 6.6 zeigt die Entwicklung der Indizes in diesem Bereich. Für einen Vergleich wurden die jeweiligen Performance-Indizes gewählt, bei denen auch Dividenden und sonstige Einnahmen aus dem Besitz der Aktien eingerechnet werden. Ebenso wurden Währungsschwankungen berücksichtigt, indem der S&P 500 und der Nikkei 225 mit dem jeweiligen Wechselkurs in Euro überführt wurden. Gezeigt werden die logarithmierten und normierten Performance-Kurse der vier Indizes und deren Durchschnittswert.

Auch ohne tiefere Analyse lässt sich direkt eine deutliche Korrelation der Aktienindizes erkennen. Tendentiell fallende und steigende Phasen haben Einfluss auf alle Kurven, wenn auch häufig mit unterschiedlicher Intensität. Zwar werden die Abstände zwischen den Indizes bis 2008 größer, dennoch kreuzen sich die normierten Indizes häufiger. So verliert der DAX beispielsweise um 2003 herum deutlicher als andere Werte, steigt aber bis 2008 wieder auf den zweiten Platz.

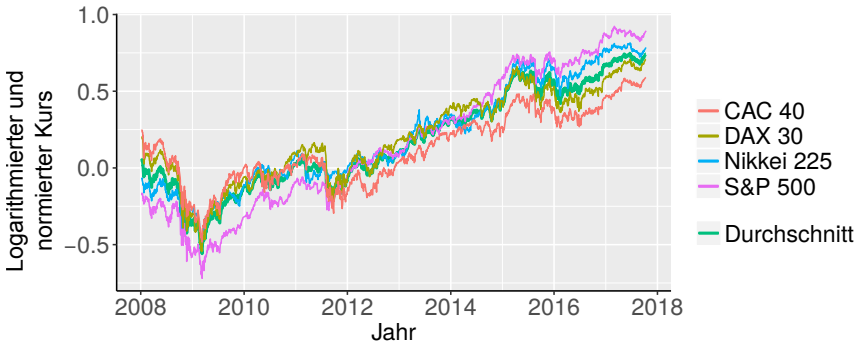
Die überdurchschnittliche Mean Reversion-Rate  $\hat{\theta} = 0,0002089$  lässt vermuten, dass die Aktienindizes in diesem und damit möglicherweise in folgenden Zeitintervallen zu einer Bewegung zum gemeinsamen Durchschnitt tendieren. Abbildung 6.7 bestätigt diese Vermutung und zeigt, dass das Portfolio der vier Aktienindizes tatsächlich auch über die nächsten 10 Jahre eine Mean Reversion-Rate  $\hat{\theta} = 0,0001599$  erreicht. Abbildung 6.8 zeigt die dazugehörige Entwicklung der Indizes.

Natürlich ist es auch hier nicht unwahrscheinlich, dass sich eine komplexe Balance zwischen den Indizes langfristig verändern kann. Wie schon beim Wechsel vom konstanten auf einen variablen fairen Preis erscheint daher auch hier eine stetige Rückführung der Differenzen an einen Durchschnittswert sinnvoll. Das resultierende Verfahren wird im Folgenden beschrieben.

### 6.3. Anwendung in Realmarktdaten



**Abbildung 6.7.** Mean Reversion-Raten der Kombination aus vier Aktienindizes während Kalibrierungszeitraum (2001 bis 2008) und Evaluierungszeitraum (2008 bis 2018)



**Abbildung 6.8.** Logarithmierte und normierte Performance-Kurse vierer nationaler Aktienindizes zwischen 2008 und 2018

#### 6.3.3 Fairer Preis

Sei  $(X_t^i)_{t \in \mathbb{T}}$  der währungsbereinigte, logarithmierte und normierte Performance-Kurs des  $i$ -ten von  $n$  Aktienindizes mit  $i \in [1, n]$ . Sei  $(\varnothing_t)_{t \in \mathbb{T}}$  der Durchschnitt über alle  $(X_t^i)_{t \in \mathbb{T}}$ . Es wird nun angenommen, dass der Differenzprozess  $(X_t - \varnothing_t)_{t \in \mathbb{T}}$  ein Mean Reversion-Prozess ist. Auf die in Kapitel 4 beschriebene Art lassen sich dann Einpreisungsraten  $\chi^i$  für jeden Aktienindex schätzen. In diesem Verfahren wird die gemittelte Einpreisungsrate  $\chi$  aller Aktienindizes genutzt, um langfristig anhaltende Differenzen gleichmäßig einzupreisen.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

Sei dafür  $d\varnothing_t$  die durchschnittliche Kursentwicklung von  $t - 1$  nach  $t$ . Sei  $(Y_t^i)_{t \in \mathbb{T}}$  der faire (währungsbereinigte, logarithmierte und normierte) Performance-Kurs dann definiert über

$$Y_t^i = \chi X_{t-1}^i + (1 - \chi)Y_{t-1}^i + d\varnothing_t$$
$$Y_0^i = \varnothing_0.$$

Die noch währungsbereinigten, logarithmierten und normierten fairen Performance-Kurse müssen dann in den jeweiligen Abbildungsbereich zurückgerechnet werden.

### 6.3.4 Evaluation

Für die Evaluation der Swing-Strategie werden Backtests über den Zeitraum 2008 bis 2018 ausgeführt. Ohne genauer auf mögliche Finanzprodukte einzugehen, wird davon ausgegangen, dass die jeweiligen Aktienindizes mit ihrem Kurs in der nationalen Währung handelbar sind. Für die vier Aktienindizes CAC 40, DAX 30, S&P 500 und Nikkei 225 werden die jeweiligen fairen Preise nach der gerade beschriebenen Methode berechnet, die Differenz  $\Delta^{\%}$  und die Anzahl gehandelter Positionen  $N$  werden so gewählt, dass der Wert pro Abweichung um  $\Delta^{\%}$  vom fairen Preis zu Beginn des Backtests etwa gleich ist. Tabelle 6.2 zeigt solche Parameter beispielsweise für den Jahresbeginn 2008. Die Parameter werden nicht während des Backtests geändert.

**Tabelle 6.2.** Kurse und dazugehörige Wechselkurse nach Euro zu Beginn des Jahres 2008 und hierfür gewählte Parameter für die Swing-Strategie

Index	Kurs	Wechselkurs	$N$	$\Delta^{\%}$
CAC 40	5.459,40 Euro	1,0	2	0,428%
DAX 30	7.839,23 Euro	1,0	1	0,372%
S&P 500	1.397,25 USD	1,3638	12	0,6%
Nikkei 225	14.436,71 Yen	161,58	142	0,6%



### 6.3. Anwendung in Realmarktdaten

#### Backtests

Die Ergebnisse der Backtests zur Swing-Strategie über den Zeitraum von 2008 bis 2018 sind in Tabelle 6.3 dargestellt. Die Anzahl der Positionen wird nicht mehr in die Tabelle aufgenommen, da sie für eine Kombination von Papieren mit unterschiedlichen Handelsvolumina keine Aussagekraft besitzt.

**Tabelle 6.3.** Backtests: Performance und Risiko der Swing-Strategie für CAC 40, DAX 30, S&P 500 und Nikkei 225 mit variablem fairem Preis, der sich aus der durchschnittlichen Kursänderung ergibt.

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
∅ Ergebnis	57.250,55	98.352,23	147.717,02	197.539,59	302.342,66
Min. Ergebnis	-83.917,89	-92.429,36	-49.642,24	15.229,98	56.679,69
Max. Ergebnis	253.680,47	280.064,56	301.979,66	324.482,90	351.361,49
∅ Max. Verlust	48.843,00	42.231,42	41.584,85	36.121,72	34.849,88
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	<b>1.260.627,00</b>	<b>1.250.201,29</b>	<b>1.105.989,62</b>	<b>1.066.206,00</b>	<b>1.040.811,50</b>
∅ Rendite	4,54%	7,87%	13,36%	18,53%	29,05%
∅ Rendite (annualisiert)	4,54%	3,86%	4,27%	4,34%	5,23%
<b>∅ EK (100% Margin)</b>	<b>465.352,30</b>	<b>429.052,43</b>	<b>387.320,19</b>	<b>367.507,38</b>	<b>309.442,57</b>
∅ Rendite	12,30%	22,93%	38,14%	53,75%	97,71%
∅ Rendite (annualisiert)	12,30%	10,87%	11,37%	11,35%	14,61%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	<b>183.597,63</b>	<b>204.065,11</b>	<b>236.271,07</b>	<b>243.317,36</b>	<b>250.972,46</b>
∅ Rendite	31,18%	48,20%	62,52%	81,19%	120,47%
∅ Rendite (annualisiert)	31,18%	21,74%	17,57%	16,02%	17,13%
<b>∅ EK (0% Margin)</b>	<b>14.755,81</b>	<b>10.946,16</b>	<b>7.928,60</b>	<b>5.594,12</b>	<b>4.123,15</b>
∅ Rendite	387,86%	898,51%	1.863,09%	3.531,20%	5.404,65%
∅ Rendite (annualisiert)	387,86%	315,99%	269,76%	245,48%	222,92%
∅ Volatilität	21.193,50	31.807,23	38.672,87	44.236,26	54.105,89
Sharpe-Ratio	2,7013	3,0921	3,8197	4,4656	5,5880

Die Resultate bestätigen die Vorstellung, dass die Aktienindizes im gesuchten Zeitraum kointegriert sind. Zumindest in den untersuchten 10 Jahren ergeben sich deutliche Gewinne. Einem minimalen Ergebnis von -83.917,89 Euro steht nach einem Jahr ein maximaler Gewinn von 253.680,47 Euro bei einem Durchschnittswert von 57.250,55 Euro gegenüber. Da sich im Portfolio befindliche Long- und Short-Positionen ausgleichen, müssen für solche Gewinne relativ hohe Positionen gehalten werden. Das Verhältnis von Volatilität zu eingesetztem Kapital ist bei auf Pairs Trading aufbauenden Systemen daher stets geringer.

Dieser Umstand erklärt das hohe MEK (100% Margin) von über 1,2 Millionen Euro im ersten Jahr. Es ergibt sich hier eine Rendite von 4,54%. Die annualisierte Rendite bleibt auch über längere Zeiträume etwa bei

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

5%, wobei das schlechteste Ergebnis nach vier Jahren bereits positiv ist – minimal wird ein Gewinn von 15.229,98 Euro erzielt. Durch laufende Gewinne sinkt das durchschnittlich eingesetzte Kapital langfristig und führt zu steigenden annualisierten Renditen bis 14,61% nach fünf Jahren.

Wegen der hohen Margin-Anforderung fällt die Veränderung zu den Backtest-Ergebnissen ohne Margin noch etwas drastischer aus als bei bisherigen Beispielen. Die gemessene Rendite bzgl. MEK liegt im ersten Jahr bei 31,18% und sinkt in den kommenden Jahren annualisiert etwa auf 17%. Legt man nur das durchschnittlich eingesetzte Kapital ohne Margin zugrunde, ergeben sich annualisierte Renditen von 387,66% (nach einem Jahr) bis 222,92% (nach fünf Jahren) mit sinkender Tendenz für längere Zeiträume.

Die errechneten Sharpe-Ratios sind interessanterweise deutlich höher als bei den Backtests für einzelne Assets. Lag das Sharpe-Ratio für das Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar und den Rohstoff Silber für ein Jahr bei jeweils etwa 1,5, so wird hier direkt ein Wert von 2,7013 erreicht. Zwar fallen Renditemaße ähnlich oder sogar etwas geringer aus, der Gewinn wird aber zumindest deutlich gleichmäßiger und schwankungsärmer erzielt. So hat das Sharpe-Ratio nach fünf Jahren mit 5,5880 den bisher höchsten gemessenen Wert.

### **Monte-Carlo-Simulation**

Für die Monte-Carlo-Simulation werden vier OU-Prozesse gleichzeitig erstellt, die die jeweiligen normierten Log-Preise repräsentieren. Der faire Preis jedes Prozesses wird über den gemeinsamen Mittelwert der letzten Prozesselemente über die in Abschnitt 6.3.3 gezeigte Berechnungsvorschrift ermittelt. Die Prozesse hängen also voneinander ab und sind kointegriert. Die so errechneten OU-Prozesse werden schließlich in Kursdaten mit den in Tabelle 6.2 gezeigten Startkursen überführt. Die Strategieparameter sind identisch zu denen in den Backtests. Die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation sind in Tabelle 6.4 dargestellt.

Die Resultate der Monte-Carlo-Simulation decken sich überwiegend mit denen der Backtests. Das durchschnittliche Ergebnis steigt jährlich um etwa 50.000 Euro linear an, der zwischen minimalen und maximalen Ergebnis aufgespannte Bereich ist allerdings gerade nach unten deutlich

### 6.3. Anwendung in Realmarktdaten

**Tabelle 6.4.** Monte-Carlo-Simulation mit künstlichem DGP, deren Parameter aus den vier untersuchten Aktienindizes generiert wurden.

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	10 Jahre	20 Jahre
Ø Ergebnis	48.131,64	94.324,15	147.142,56	190.477,76	271.185,40	530.876,73	1.094.420,11
Min. Ergebnis	-332.171,10	-544.922,25	-710.406,67	-681.749,19	-712.455,52	-584.111,95	-217.200,53
Max. Ergebnis	262.125,30	322.511,69	395.105,68	469.863,31	497.139,48	1.142.538,57	2.418.853,33
Ø Max. Verlust	62.231,15	72.518,60	75.188,49	78.897,92	80.114,00	85.616,55	89.995,62
MEK 95% (100% Margin)	1.212.939,24	1.412.512,88	1.695.966,65	1.799.541,19	1.841.185,12	2.004.411,10	2.234.511,64
Ø Rendite	3,97%	6,68%	8,67%	10,58%	14,73%	26,49%	48,98%
Ø Rendite (annualisiert)	3,97%	3,29%	2,81%	2,55%	2,79%	2,38%	2,01%
Ø EK (100% Margin)	550.646,00	532.346,69	519.412,57	488.640,11	474.111,50	416.105,64	387.710,53
Ø Rendite	8,74%	17,71%	28,33%	38,98%	57,20%	127,58%	282,28%
Ø Rendite (annualisiert)	8,74%	8,49%	8,67%	8,58%	9,47%	8,57%	6,93%
MEK 95% (0% Margin)	160.558,87	202.425,64	221.124,24	246.435,12	255.515,30	305.512,25	318.420,18
Ø Rendite	29,98%	46,60%	66,54%	77,29%	106,13%	173,77%	343,70%
Ø Rendite (annualisiert)	29,98%	21,08%	18,53%	15,39%	15,57%	10,60%	6,37%
Ø EK (0% Margin)	11.117,78	10.599,33	9.594,32	8.311,94	6.993,77	2.223,45	511,20
Ø Rendite	432,92%	889,90%	1.533,64%	2.291,62%	3.877,53%	23.876,26%	214.088,44%
Ø Rendite (annualisiert)	432,92%	314,48%	253,74%	221,14%	208,89%	172,97%	146,74%
Ø Volatilität	19.912,15	37.722,25	49.925,41	55.211,42	72.236,89	121.567,72	170.001,50
Sharpe-Ratio	2,4172	2,5005	2,9472	3,4499	3,7541	4,3669	6,4377

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

breiter. So gibt es nach einem Jahr eine Simulation mit einem Ergebnis von -332.171,10 Euro, nach fünf Jahren liegt der minimale Wert bei -712.455,52 Euro.

Die annualisierten Renditen bei 100%-iger Margin sind durchgängig geringer. Für das MEK liegt sie nach einem Jahr bei 3,97% und sinkt beständig auf 2,01% nach 20 Jahren. Für das durchschnittlich eingesetzte Kapital hält sie sich bei etwa 8% pro Jahr. Lässt man die Margin allerdings außer Acht, ergeben sich Renditen, die beinahe identisch mit den gemessenen Werten der Backtests sind: für das MEK im ersten Jahr etwa 30%, im zweiten Jahr annualisiert 21% – es zeigt sich eine langfristig fallende Tendenz der jährlichen Rendite, da das Ergebnis nur linear wächst, das MEK aber selbst beständig steigt. Da das durchschnittlich eingesetzte Kapital durch laufende Gewinne stetig sinkt, ergeben sich hier ebenso wie im Backtest hohe Renditen, annualisiert sind es auch nach 20 Jahren 146,74%.

Auch in der Monte-Carlo-Simulation ist die Volatilität des Portfolio-werts im Verhältnis zum Wertzuwachs geringer als bei bisherigen Auswertungen. Das Sharpe-Ratio ist nach einem Jahr daher auch in dieser theoretischen Modellauswertung bei 2,4172 und steigt für längere Zeiträume weiter an. Nach 20 Jahren ergibt sich somit ein sehr guter Wert von 6,4377.

Bisher wurde nicht darauf eingegangen, auf welche Weise Aktienindizes überhaupt handelbar sind. So sind sie anders als Devisen oder Rohstoffe kein direkt handelbares Gut, sondern lediglich eine repräsentative Kennzahl für die Wertentwicklung verschiedener Marktsegmente. Gleichwohl haben sich einige Finanzprodukte entwickelt, mit denen Anleger direkt von der Kursveränderung von Aktienindizes profitieren können. Diese Untersuchungen basieren auf der Anlageklasse der sogenannten Futures, die mehrere Vorteile, aber auch einige Herausforderungen mit sich bringen. Sie werden im Folgenden genauer vorgestellt.

### 6.4 Futures

Schon im antiken Griechenland war Güterhandel nicht nur auf direkten Umschlag beschränkt, auch vertragliche Absprachen über zukünftige Warenströme sind dokumentiert. Diese terminliche Festlegung bevorste-

hender Geschäfte ermöglichte eine sichere und langfristige Planung von Produktionsketten und verringerte Risiken durch kurzfristige Schwankungen in Angebot und Nachfrage. Die beiden Handelspartner waren sich dabei bekannt und beschrieben Vertragskonditionen individuell. Diese Art von Kontrakt über einen terminlich gebundenen Handel wird im modernen Finanzwesen als *Forward* bezeichnet.

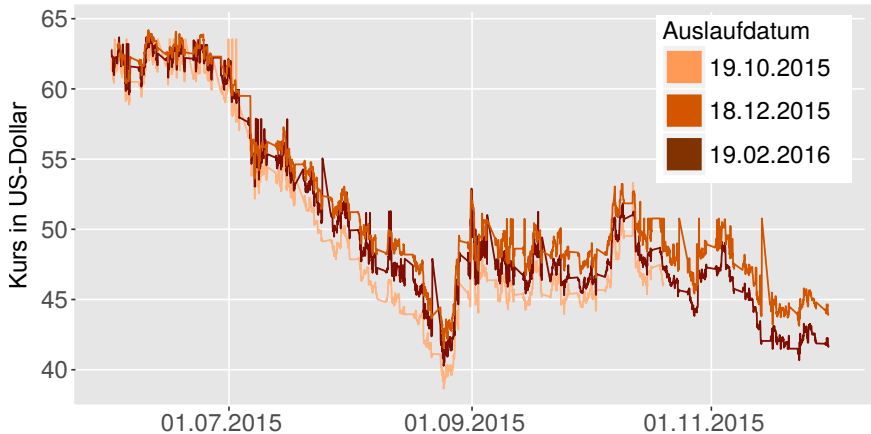
Der Forward-Handel wurde erstmals in den 1860er Jahren an der Chicago Stock Exchange durch den Börsenstart einer verwandten Handelsform erweitert. Durch normierte börsengehandelte Verträge über zukünftige Warenströme wurden erstmalig anonyme Termingeschäfte ermöglicht – der sogenannte *Future* gab sein Debüt. Die standardisierte Form und Börsennotierung der neuen Investmentklasse vereinfachte den Handel und sorgte für einen transparenten Markt für Termingeschäfte. Futures etablierten sich daher schnell an diversen Handelsplätzen – sie werden für Wertpapiere, Rohstoffe und sogar virtuelle Größen wie Aktienindizes aufgelegt. Wegen ihrer großen Akzeptanz sind Future-Märkte in der Regel sehr liquide und bieten große Volumina bei geringen Handelskosten. Daher haben sie sich zu einem wichtigen Investmentvehikel, auch für den spekulativen Handel, entwickelt. Es folgt daher eine Beschreibung der im Future-Handel gebräuchlichen Terminologie.

**6.4.1 Definition (Future).** Ein *Future* (oder auch *Future-Kontrakt*)  $F_\tau$  ist ein normiertes, börsengehandeltes Termingeschäft. Kauft oder verkauft man einen Future-Kontrakt zu einem Vertragsgegenstand, geht man eine Verpflichtung ein, ein bestimmtes Gut zu einem festgelegten Stichtag, dem *Auslaufdatum*  $\tau \in \mathbb{T}$ , zu kaufen oder zu verkaufen.

**6.4.2 Definition (Future-Klasse).** Eine Future-Klasse  $\mathbb{F}$  sei die Menge aller Future-Kontrakte  $F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \dots, F_{\tau_n} \in \mathbb{F}$  mit Auslaufdaten  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \mathbb{T}$  zu einem gegebenen Vertragsgegenstand mit festgelegter Kontraktgröße.

**6.4.3 Beispiel.** Für ein tieferes Verständnis des Begriffs Future wird beispielhaft ein genauerer Blick auf die Angebotsstruktur für die in den USA verbreitetste Ölsorte Western Texas Intermediate (kurz: WTI) an der Terminbörse der Chicago Merchantile Exchange geworfen. Hierbei handelt es sich um den größten Markt für WTI, auf den über das elektronische

## 6. Kointegration in Finanzmärkten



**Abbildung 6.9.** Ask-Kurse verschiedener Mini-Future-Kontrakte für WTI

Handelssystem Globex weltweit zugegriffen werden kann. Für den Terminhandel von WTI werden zwei unterschiedliche Vertragsgrößen angeboten: Mit dem Kauf oder Verkauf eines Kontrakts der Future-Klasse WTI verpflichtet man sich zum Kauf oder Verkauf von 5000 Barrel Rohöl, das Handelsvolumen der sogenannten der Future-Klasse WTI Mini umfasst 1000 Barrel. Für beide Klassen wird monatlich jeweils ein Future aufgelegt, so dass für jeden Monat ein Auslaufdatum existiert. Einzelne Kontrakte sind daher über Vertragsgegenstand, Handelsgröße und Auslaufdatum eindeutig beschrieben.

Durch die Struktur des Future-Handels gibt es zu jedem Zeitpunkt für ein einzelnen Vertragsgegenstand mehrere Kontrakte mit unterschiedlichen Auslaufdaten und individueller Preisstruktur. Wie Abbildung 6.9 zeigt, variieren Preise von Futures mit unterschiedlichen Auslaufdaten spürbar. Wird innerhalb einer spekulativen Handelsstrategie ein Termingeschäft eingegangen, ohne dass die tatsächliche Auslieferung der Ware zum Stichtag beabsichtigt wird, muss dieser Kontrakt vor seiner Fälligkeit wieder veräußert werden. Dass für solch kurzfristige Transaktionspaare an den Terminbörsen grundsätzlich mehrere Varianten bereitstehen, motiviert

die Analyse, ob Rendite und Risiko allein durch die Wahl von Futures mit individuellen Auslaufdaten beeinflusst werden können.

Im Rahmen dieser Untersuchung werden daher Preiszusammenhänge verschiedener Future-Kontrakte eingehend untersucht. Insbesondere werden im Kontext der Optimierung des beschriebenen Martingal-Handelssystems Verfahren definiert und evaluiert, die durch intelligente Auswahl von Futures zum einen Handelskosten minimieren und zum anderen durch Ausnutzung möglicher Ineffizienzen sogar darüber hinausgehend Gewinne steigern. Hierfür wird zunächst die Preisstruktur von Future-Märkten genau untersucht.

### 6.4.1 Termstruktur von Termingeschäften

Sei eine Future-Klasse  $\mathbb{F}$  eine Menge von Future-Kontrakten  $F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \dots, F_{\tau_n}$  mit Auslaufdaten  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \mathbb{T}$  zu einem gegebenen Vertragsgegenstand mit festgelegter Kontraktgröße.

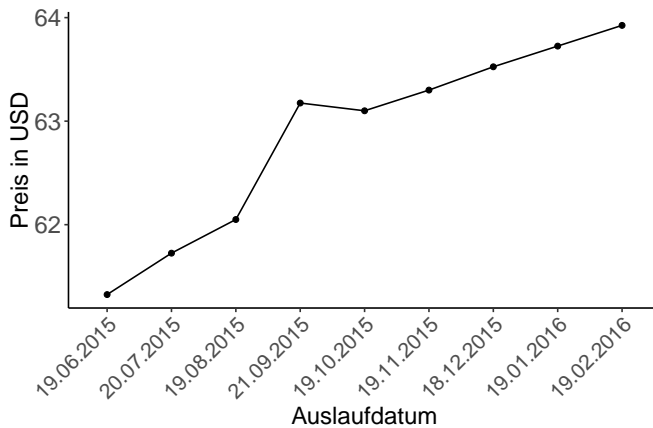
Sei  $F_{\tau,t}$  mit  $t \leq \tau$  der Preis des Futures  $F_{\tau}$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  und  $S_t$  der sogenannte *Spot-Preis*, also der aktuelle Preis des Vertragsgegenstandes außerhalb des Future-Markts. Die Gesamtheit zur Verfügung stehender Kursdaten für eine Future-Klasse wird *Termstruktur* genannt. Natürlich besteht zwischen Kontrakt- und Spot-Preisen einer Future-Klasse ein starker Zusammenhang, eine genaue Beschreibung dieser Relation ist jedoch eine komplexe Aufgabe. In vergangenen Arbeiten wurden daher einige Einflussfaktoren identifiziert und mehrere Modelle publiziert, die die Zusammenhänge der Termstruktur möglichst exakt zu erklären versuchen.

Das Cost-of-Carry-Modell [CF83] beschreibt die Zusammensetzung eines Terminpreises  $F_{\tau,t}$  über einen stetig verzinsten Spot-Preis  $S_t$  mit

$$F_{t,\tau} = S_t \cdot e^{i_{\tau} \cdot (\tau-t)} \text{ mit stetigem Zins } i_{\tau} = r + s - c_{\tau} \quad (6.4.4)$$

Der Terminpreis  $F_{\tau,t}$  konvergiert mit näher rückendem Auslaufdatum also gegen den Spot-Preis mit stetigem Zinssatz  $i_{\tau}$ . Dieser ergibt sich aus dem Finanzmarktzins  $r$  und Lagerkostenzins  $s$ . Die Verfügbarkeitsprämie  $c_{\tau}$  ist ein zusätzlicher Parameter, der individuelle Markterwartungen für einzelne Future-Kontrakte  $F_{\tau}$  in die Gleichung einbettet und so außergewöhnliche Schwankungen zu erklären versucht.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten



**Abbildung 6.10.** Partielle Termstruktur der WTI-Mini-Futures am 11. Juni 2015. Sie zeigt die Preise von neun Kontrakten, die sich jeweils im Auslaufdatum unterscheiden.

Abbildung 6.10 zeigt beispielhaft die Termstruktur der WTI Mini Futures am 11. Juni 2015. Die Kurve ist fast monoton steigend, lediglich der Preis des im September auslaufenden Kontraktes erscheint außergewöhnlich hoch. Diese typische Marktsituation wird *Contango* genannt und ergibt sich aus Zinseffekten und weiteren Kosten. So ist der Preis für eine Lieferung im Juni auch deshalb geringer als im Dezember, weil der verkaufende Vertragspartner das Öl ein halbes Jahr länger lagern muss. Auch eine fallende Kurve ist temporär beispielsweise durch saisonale Nachfrageschwankungen oder außergewöhnlich geringe Lagerbestände denkbar. Dieses Phänomen ist unter dem Begriff *Backwardation* bekannt.

Entscheidet man sich für ein Future-basiertes Investment, stehen also generell mehrere mögliche Kontrakte mit unterschiedlichen Auslaufdaten und Kostenstrukturen bereit. Da mehrere Optionen existieren, stellt sich die Frage, ob bestehende Handelsstrategien durch intelligente Auswahl verschiedener Kontrakte ihre Performance nachhaltig steigern können. Der folgende Abschnitt befasst sich mit dieser Fragestellung.



## 6.5 Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts

In Definition 2.6.4 wurde eine Handelsstrategie für  $n$  Assets als Funktion beschrieben, die aus einer gegebenen Informationsmenge ein Zielfortfolio in  $\mathbb{R}^{n+1}$  generiert. Wenn Handelsentscheidungen für Future-Klassen getroffen werden, kann dieses ohne Auswahl spezifischer Kontrakte nicht ermittelt werden. Es fehlt also noch eine Auswahlstrategie, die einer Handelsabsicht einen Kontrakt zuweist.

**6.5.1 Definition** (Auswahlstrategie). Sei  $(\mathcal{D}_t)_{t \in \mathbb{T}}$  der Prozess von Handelsentscheidungen, so dass  $\mathcal{D}_t \in \mathbb{Z}$  die Anzahl der zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  zu handelnden Kontrakte einer Future-Klasse  $\mathbb{F}$  enthält. Dabei stehen positive Werte für Käufe, negative für Verkäufe, beim Wert 0 soll nicht gehandelt werden.

Eine Auswahlstrategie sei dann eine Funktion

$$A : \Omega \times \mathbb{T} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F},$$

die für eine Ereignismenge  $\Omega$  und eine Handelsentscheidung  $\mathcal{D}_t \in \mathbb{Z}$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  den zu handelnden Future-Kontrakt  $F_\tau \in \mathbb{F}$  wählt. Sei  $\mathcal{A}$  die Menge aller Auswahlstrategien.

**6.5.2 Bemerkung.** Die Gesamtposition im Portfolio zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  entspricht der Summe aller durch die Handelsentscheidungen vorgegebenen Positionen  $\sum_{i=0}^t \mathcal{D}_i$ . Eine Gesamtposition von 0 bedeutet nicht zwangsläufig, dass jeder offene Kontrakt liquidiert wurde. Auch eine Kombination von jeweils  $n$  Long- und Short-Positionen führt zu einer neutralen Gesamtposition.

Die bisherige Definition einer Handelsstrategie wird nun um die Integration einer Auswahlstrategie erweitert. Es wird vereinfachend nur eine Future-Klasse zugelassen.

**6.5.3 Definition** (Handelsstrategie für eine Future-Klasse). Sei eine Handelsstrategie  $H$  für eine Future-Klasse  $\mathbb{F}$  mit  $n$  Kontrakten eine Funktion

$$H : \Omega \times \mathbb{T} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

mit den in Definition 2.6.4 für Handelsstrategien geltenden Bedingungen.

Es wird nun nach einer Auswahlstrategie  $A \in \mathcal{A}$  gesucht, die die Rendite einer Handelsstrategie maximiert.

### 6.5.1 Entwicklung einer Auswahlstrategie

Es wird zunächst davon ausgegangen, dass Future-Märkte effizient und somit frei von Fehlbewertungen sind. Ob diese Annahme zutrifft, wird in Abschnitt 6.6 genauer analysiert. Sie vereinfacht allerdings das Entscheidungsszenario und ermöglicht so einen einfacheren Einstieg in die Auswahlproblematik.

Für effiziente Future-Märkte ist die Idee naheliegend, Kontrakte so auszuwählen, dass anfallende Handelskosten insgesamt minimal sind. Der Begriff Handelskosten bezieht sich in diesem Kapitel nur auf Ask-Bid-Spreads, andere Handelsgebühren werden nicht beachtet. Für eine Minimierung ergeben sich mehrere Ansatzpunkte. Zum einen sollten Kauf- und darauf folgende Verkaufskosten eines Kontrakts möglichst gering sein. Zum anderen sollte der Portfolioaufbau so gestaltet werden, dass sogenannte *Future Rollings* nicht notwendig sind. Hierbei handelt es sich um Transaktionen für die Verlängerung gehaltener Future-Positionen, die nach dem Auslaufdatum weiter bestehen sollen. Diese Positionen müssen im auslaufenden Kontrakt liquidiert und in einem anderen Kontrakt neu erworben werden – bei geschickter Vorausplanung sind Future-Rollings und die dadurch entstehenden Kosten in der Regel vermeidbar. Um sich diesem Problem zu nähern, wird mit einem konkreten Beispiel begonnen.

#### Beispiel eines Auswahlzenarios

Es ist der 16. März 2017 um 15 Uhr, im Portfolio befinden sich drei Long-Positionen und eine Short-Position (mit negativem Vorzeichen) unterschiedlicher WTI-Mini-Kontrakte, die in Tabelle 6.5 dargestellt sind.

Neben den Positionen im Portfolio werden Preise weiterer handelbarer Kontrakte gezeigt – es sind in diesem Fall die sechs noch handelbaren Futures mit den frühesten Auslaufdaten gezeigt.

## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts

**Tabelle 6.5.** Ask- und Bid-Preise sechs verschiedener WTI-Mini-Kontrakte (in US-Dollar) am 16.03.2017 um 15:00 Uhr mit gehaltenem Beispielfortfolio

Bezeichnung	Auslaufdatum	Ask	Bid	Spread	Position
April 17	20.03.2017	48,775	48,750	0,025	0
Mai 17	19.04.2017	49,300	49,250	0,050	2
Juni 17	19.05.2017	49,725	49,675	0,050	1
Juli 17	19.06.2017	50,100	49,900	0,200	-1
August 17	19.07.2017	50,325	50,100	0,225	0
September 17	21.08.2017	50,450	50,250	0,200	0

Die Handelsstrategie gibt nun vor, dass eine weitere Long-Position gekauft werden soll. Es stellt sich also die Frage, welcher Kontrakt hierfür optimal ist.

Eine Idee ist in diesem Fall, denjenigen Kontrakt mit dem geringsten Spread auszuwählen. Man könnte also eine Long-Position für den April-Kontrakt eingehen, da die durch den Spread dargestellten Handelskosten hier am geringsten sind. Ein möglicher Nachteil könnte aber eine hohe Wahrscheinlichkeit für Future Rollings sein, da das Auslaufdatum in vier Tagen erreicht ist. Hier zeigt sich bereits, dass die Handelsfrequenz einen entscheidenden Einfluss auf die Auswahl haben kann. Würden alle paar Stunden neue Handelsentscheidungen getroffen, so wäre eine mögliche Liquidation vor dem Auslaufdatum sehr wahrscheinlich und der Kauf des April-Kontrakts vermutlich die beste Lösung. *Zukünftige Handelszeitpunkte und -volumina* müssen im Kontext des aktuellen Portfolios analysiert werden, um das Risiko von Future Rollings genau zu bestimmen.

Sollte sich abzeichnen, dass die Gefahr zusätzlicher Transaktionen beim Kauf eines April-Kontrakts zu hoch ist, so wäre die Auswahl des Juli-Kontrakts aus ganz anderen Gründen attraktiv. Zwar ist der Spread mit 20 US-Cent deutlich höher, aber statt der Eröffnung einer zusätzlichen Position kann hier die bereits bestehende Short-Position liquidiert werden. Das muss je nach Handelsaktivität zwar kein Vorteil sein, bietet aber in jedem Fall mehr Flexibilität. Um die Qualität dieser Auswahl einschätzen zu können, sind Prognosen des Spreads für den Juli-Kontrakt entscheidend.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

Sollte es wahrscheinlich sein, dass der Spread bis zum Auslaufdatum sinkt, so wäre diese Liquidation vermutlich noch nicht sinnvoll. Es sind also *Prognosen für zukünftige Spreads* notwendig.

Sollte aus genannten Gründen weder der April- noch der Juli-Kontrakt in Frage kommen, wäre der Juni-Kontrakt wohl die nächste Wahl. Der Mai-Kontrakt hat bei gleichem Spread und näherem Auslaufdatum bereits eine höhere Position, wodurch Future Rollings hier wahrscheinlicher sind. Eine genauere Aussage darüber erfordert, dass die *Wahrscheinlichkeit für Future Rollings und daraus entstehende erwartete Handelskosten* bekannt sind.

Zusammenfassend ergeben sich minimale Kosten für eine Transaktion genau dann, wenn die Summe aus aktuellen und erwarteten zukünftigen Handelskosten minimal ist. Letztere lassen sich für das Optimierungsproblem auf die erwarteten Mehrkosten reduzieren, die für die Liquidation des bestehenden Portfolios nach der Wahl eines Kontrakts erwartet werden. Wie dieses Beispiel zeigt, müssen hierfür sowohl Handelsintervalle- und volumina, das aktuelle Portfolio als auch Spread-Prognosen einfließen. Für die optimale Auswahl eines Kontrakts sind also einige Analysen nötig, die im folgenden Abschnitt nacheinander behandelt werden.

### 6.5.2 Optimale Liquidation eines Portfolios

Ginge man nun davon aus, das Handelssystem sei bereits statistisch ausgewertet, so dass zum aktuellen Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  bereits  $T$  weitere zukünftige Handelszeitpunkte  $t_1, \dots, t_T \in \mathbb{T}$  geschätzt wurden. Diese seien aufsteigend sortiert. Wie bei der Swing-Strategie üblich sei das Handelsvolumen konstant – vereinfachend wird entweder eine Long- oder Short-Position gehandelt, so dass  $\mathcal{D}_{t_i} \in \{-1, 1\}$  für  $i \in [0, T]$ .

Sei zudem eine Funktion  $C: \mathbb{F} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  bekannt, so dass  $C(F_\tau, t_0, t_i)$  die zum Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  erwarteten Handelskosten für den Zeitpunkt  $t_i \in \mathbb{T}$  für eine Position im Kontrakt  $F_\tau$  ausgibt ( $i \in [0, T]$ ). Die zeitliche Unschärfe von Prognosen in der Zukunft liegender Handelszeitpunkte und dadurch entstehende Risiken für Future Rollings seien bereits akkurat eingerechnet.

Ginge man des Weiteren davon aus, es gäbe eine Funktion  $\mathcal{L}: \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\mathcal{L}(P, t_0)$  für den Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  und das

## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts

Portfolio  $P \in \mathbb{R}^{n+1}$  die minimalen Kosten berechnet, für die das gesamte Portfolio einzig durch eine Untermenge der prognostizierten Handelsentscheidungen  $\mathcal{D}_{t_0}, \dots, \mathcal{D}_{t_T}$  liquidiert werden kann.

Die Mehrkosten durch die Liquidation des Portfolios  $P$  seien dann durch eine Funktion  $\mathcal{M} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert mit

$$\mathcal{M}(P, t) = \mathcal{L}(P, t) - |P| \cdot \text{Minimale Handelskosten.} \quad (6.5.4)$$

Es wird also vereinfachend angenommen, dass für jede nötige Transaktion für eine Liquidation stattdessen auch minimale gemessene Handelskosten erreicht werden könnten, wenn ein beliebiger Kontrakt gewählt würde.

Mit diesen Funktionen ließen sich dann die Gesamtkosten minimieren. Sei dafür eine Handelsentscheidung  $\mathcal{D}_{t_0} \in \{-1, 1\} \subset \mathbb{Z}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  gegeben, für die ein optimaler Future aus  $n$  Kontrakten  $F_{\tau_1}, \dots, F_{\tau_n}$  ausgewählt werden soll.

Sei  $\mathcal{T} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{F} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $\mathcal{T}(P, F_{\tau}, \mathcal{D}_t)$  eine Funktion, die die Anzahl der Positionen des Futures  $F_{\tau} \in \mathbb{F}$  im Portfolio  $P$  um  $\mathcal{D}_t$  ändert. Die Funktion  $\mathcal{T}$  stellt also den Handel von Kontrakten formal dar.

Der optimale Future für eine Handelsentscheidung  $\mathcal{D}_{t_0}$  zum Zeitpunkt  $t_0$  ergibt sich dann über die minimalen Handelskosten

$$\min_{i=[1, n]} \left( \underbrace{C(F_{\tau_i}, t_0, t_0)}_{\text{Aktuelle Kosten für } F_{\tau_i}} + \underbrace{\mathcal{M}(\mathcal{T}(P, F_{\tau_i}, \mathcal{D}_{t_0}), t_0)}_{\text{Mehrkosten für } F_{\tau_i}} \right) \quad (6.5.5)$$

Gesamtkosten für  $F_{\tau_i}$

Es muss nun natürlich analysiert werden, wie die Funktionen  $C$  und  $\mathcal{L}$  aufgebaut sind. Dafür sei  $C$  zunächst weiterhin gegeben. Es wird nun beschrieben, wie die Portfolioliquidationskosten  $\mathcal{L}$  mit Hilfe der Kostenprognosen  $C$  berechnet werden können.

Dafür wird zunächst der Eingabeparameter  $P$  vereinfacht. So sind die liquiden Mittel  $P^0$  für die Minimierung der zukünftigen Kosten natürlich nicht relevant. Außerdem werden die Liquidationskosten je nach Richtung

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

(Long oder Short) separat analysiert, die Liquidationskosten ergeben sich dann als Summe aus der Betrachtung für Long- und Short-Positionen.

Sei daher  $L = (L_{\tau_1}, L_{\tau_2}, \dots, L_{\tau_n}) \in \mathbb{N}_0^n$  entweder der Vektor aller zu liquidierender Long- oder Short-Positionen der  $n$  gegebenen Futures  $F_{\tau_1}, \dots, F_{\tau_n}$  mit Auslaufdaten  $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{T}$ . Es wird nun also nicht mehr zwischen Long- und Short-Positionen unterschieden, sondern nur noch eine Anzahl der zu liquidierenden Positionen aus  $\mathbb{N}_0$  untersucht. Zu jedem Zeitpunkt wird nun genau ein Kontrakt liquidiert.

Insgesamt ist  $L$  also eine vereinfachte Darstellung des Portfolios  $P$ , welches je nach Teiloptimierung nur Long- oder Short-Positionen enthält und über keine liquiden Mittel verfügt.

Im Folgenden sei  $\mathcal{L}$  daher nun stets die Abbildung einseitiger Liquidationskosten (Long oder Short). Sei  $\mathcal{L} : \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\mathcal{L}(L, t_0, t_i)$  also eine Funktion, die die zum Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  erwarteten minimalen kumulierten Liquidationskosten für die Veräußerung der in  $L \in \mathbb{N}_0^n$  genannten Positionen bis zum spätestmöglichen Zeitpunkt  $t_i \in \mathbb{T}$  berechnet. Der Einsatz eines fest definierten Endzeitpunkts  $t_i$  ist neu und für die Beschreibung des Optimierungsverfahrens hilfreich. Für erwartete zukünftige Handelszeitpunkte  $t_1, \dots, t_T \in \mathbb{T}$  ergeben sich dann die Liquidationskosten  $\mathcal{L}(L, t_0, t_T)$  bis zum spätesten Zeitpunkt  $t_T$ . Dies setzt voraus, dass genügend Zeitpunkte für eine vollständige Liquidation prognostiziert wurden. Dies sei im Folgenden stets der Fall. Die einseitigen Liquidationskosten  $\mathcal{L}$  mit geänderten Parametern führen zu einem geänderten Minimierungsproblem.

Die Mehrkosten des Portfolios ergeben sich dann analog zu Gleichung 6.5.4 als Summe der Mehrkosten der zu liquidierenden Short- und Long-Positionen. Der optimale Future kann dann durch die Minimierung 6.5.5 bestimmt werden.

### Beispiel einer Portfolioliquidation

Hierzu folgt ein Beispiel, bei dem das Handelssystem bereits statistisch ausgewertet ist. Seien zum Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  drei zu liquidierende Positionen für einen Kontrakt  $F_\tau \in \mathbb{F}$  gegeben. Für die nächsten sechs erwarteten Handelsentscheidungen zu den Zeiten  $t_1, \dots, t_6 \in \mathbb{T}$ , die zur Liquidie-

## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts

ung jeweils einer Position genutzt werden können, ergeben sich die in Tabelle 6.6 gezeigten prozentualen Kostenschätzungen.

**Tabelle 6.6.** Zum Zeitpunkt  $t_0$  erwartete prozentuale Kostenschätzungen für zukünftige Liquidationen einer Position des Kontrakts  $F_\tau$  zu den Zeitpunkten  $t_1, \dots, t_6$ .

Zeit $t_i$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$
$C(F_\tau, t_0, t_i)$	0,14%	0,13%	0,17%	0,13%	0,12%	0,18%

Der Vektor der nötigen Transaktionen  $L = (L_{\tau_1}, L_{\tau_2}, \dots, L_{\tau_n}) \in \mathbb{N}_0^n$  ist im Fall des Beispiels mit  $n = 1$  und drei zu liquidierenden Positionen im Future  $F_\tau$  (mit  $\tau = \tau_1$ ) einfach  $L = L_\tau = 3$ .

Für drei Positionen und sechs Liquidationszeitpunkte ergeben sich insgesamt  $\binom{6}{3} = 20$  verschiedene Transaktionsketten, die für die minimalen Kosten  $\mathcal{L}(3, t_0, t_6)$  in Frage kommen. Die ließen sich hier einfach berechnen, für reale Daten fällt die Anzahl der Kombinationen meist wesentlich größer aus. Die Berechnung wird jedoch deutlich durch den Umstand vereinfacht, dass sich die Auswertung in sukzessive Teiloptimierungen aufspalten lässt. So ergeben sich die optimalen Kosten für  $t_6$  nämlich direkt aus denen für  $t_5$ , es kommen hier nur zwei Szenarien in Frage:

Entweder entsprechen die erwarteten kumulierten Kosten  $\mathcal{L}(3, t_0, t_6)$  dem Wert  $\mathcal{L}(3, t_0, t_5)$ , in diesem Fall sind bereits alle nötigen Transaktionen erfolgt und es muss zum Zeitpunkt  $t_6$  keine weitere Position liquidiert werden. Im anderen Fall sind sie  $\mathcal{L}(2, t_0, t_5) + C(F_\tau, t_0, t_6)$ . Es wird also zum Zeitpunkt  $t_6$  eine Position liquidiert, wodurch zusätzlich zu den bisherigen Liquidationskosten  $\mathcal{L}(2, t_0, t_5)$  prognostizierte Handelskosten  $C(F_\tau, t_0, t_6)$  entstehen.

Diese Art der Verknüpfung von Teilauswertungen wird dynamische Programmierung genannt und ermöglicht es, jegliche redundante Berechnung zu vermeiden. Die komplette Auswertung passiert also rekursiv von Endzeitpunkt  $t_6$  bis zum Startzeitpunkt  $t_0$ , Teilergebnisse werden wiederverwendet. Vom Zeitpunkt  $t_6$  werden mit  $L = 3$  also rückwärts sukzessive Transaktionspfade bis zu  $L = 0$  oder  $t_0$  ausgewertet. Für  $L = 0$  sind die Kosten natürlich stets 0, da kein weiterer Handel erfolgen muss. Durch die rekursive Berechnung wird auch der irreguläre Fall überprüft, dass zum Zeitpunkt  $t_0$  bereits Liquidationen ausgeführt wurden. Damit dieser

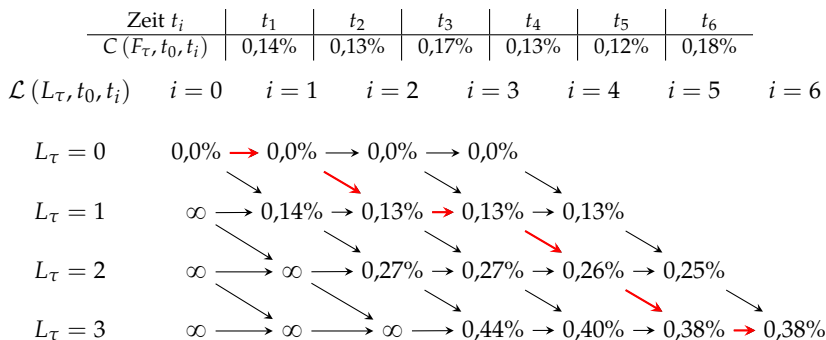
## 6. Kointegration in Finanzmärkten

nicht weiter berücksichtigt wird, werden unendliche Transaktionskosten angenommen.

Für  $n = 1$  und einen einzelnen Kontrakt  $F_\tau$  ergeben sich die minimalen Liquidationskosten dann über

$$\mathcal{L}(L_\tau, t_0, t_i) = \begin{cases} 0 & \text{falls } L_\tau = 0 \\ \infty & \text{falls } L_\tau > 0 \wedge i = 0 \\ \min(\mathcal{L}(L_\tau, t_0, t_{i-1}), \\ \quad \mathcal{L}(L_\tau - 1, t_0, t_{i-1}) \\ \quad + C(F_\tau, t_0, t_i)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für das Beispiel ergeben sich dann die in Abbildung 6.11 gezeigten Liquidationspfade:



**Abbildung 6.11.** Optimaler Liquidationspfad (rot) nach dynamischer Programmierung für  $\mathcal{L}(3, t_0, t_6)$

Die zum Zeitpunkt  $t_0$  erwarteten minimalen Liquidationskosten sind  $\mathcal{L}(3, t_0, t_6) = 0,38\%$ . Das optimale Verhalten zum Handelszeitpunkt  $t_1$  wäre, auf eine Liquidation zu verzichten, da sich noch genügend Möglichkeiten mit geringeren Kosten ergeben. Gehandelt würde stattdessen zu den Zeitpunkten  $t_2, t_4$  und  $t_5$ . Hier sind, wie in der Tabelle 6.6 dargestellt, die jeweiligen Transaktionen am günstigsten. Das Ergebnis der dynamischen Programmierung ist daher nicht überraschend. Das Problem wird



## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts

jedoch komplexer, wenn mehr als nur ein Kontrakt gleichzeitig betrachtet wird.

Während sich für einen Kontrakt ein zweidimensionales Diagramm ergibt, wäre die in Abbildung 6.11 gezeigte dynamische Programmierung für  $n$  Kontrakte  $n + 1$ -dimensional. Die bisherigen Definitionen müssen hierfür erweitert werden.

Sei  $L = (L_{\tau_1}, L_{\tau_2}, \dots, L_{\tau_n}) \in \mathbb{N}_0^n$  gegeben. Sei  $\mathcal{R} : \mathbb{N}_0^n \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{N}_0^n$  mit  $\mathcal{R}(L, F_\tau)$  eine Funktion, die die Anzahl der Positionen des Futures  $F_\tau \in \mathbb{F}$  in  $L$  um den Wert 1 reduziert. Da die Funktion nach  $\mathbb{N}_0^n$  abbildet, muss für den gewählten Kontrakt in  $L$  minimal eine Position vorhanden sein.

Die erwarteten kumulierten Liquidationskosten ergeben sich nun durch

$$\mathcal{L}(L, t_0, t_i) = \min_{j \in [1, n]} \begin{cases} 0 & \text{falls } |L| = 0 \\ \infty & \text{falls } (|L| > 0 \wedge i = 0) \\ & \vee (|L| > 0 \wedge L_{\tau_j} = 0) \\ \min(\mathcal{L}(L, t_0, t_{i-1}), & \\ \quad \mathcal{L}(\mathcal{R}(L, F_{\tau_j}), t_0, t_{i-1}) & \\ \quad + C(F_{\tau_j}, t_0, t_i)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zwar gibt es durch die verschachtelte Minimierung nun insgesamt  $2n$  zu vergleichende Elemente, in jeder der  $n$  Auswertungen des Minimums  $\min_{j \in [1, n]}$  wird jedoch der Fall "kein Handel" ( $\mathcal{L}(L, t_0, t_i) = \mathcal{L}(L, t_0, t_{i-1})$ ) ausgewertet. Diese sind in dieser vereinfachten Darstellung redundant. Fasst man diese zusammen, ergeben sich  $n + 1$  Kandidaten für die minimalen Handelskosten.

Es gibt nun drei unterschiedliche Fälle in den Abbruchbedingungen für die rekursive Berechnung:

- ▷  $|L| = 0$ : Es wurde noch keine Position liquidiert, die bisherigen Liquidationskosten sind folglich 0.
- ▷  $|L| > 0 \wedge i = 0$ : Die rückwärts laufende Rekursion hat bereits den Startzeitpunkt  $t_i = t_0$  erreicht, es wurden dennoch bereits Positionen liquidiert. Dieser Fall ist ungültig und wird durch unendliche Handelskosten nicht weiter berücksichtigt.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

▷  $|L| > 0 \wedge L_{\tau_j} = 0$ : Es wurden zwar schon Positionen liquidiert, jedoch nicht vom Future  $F_{\tau_j}$ . Ließe man den "sonst"-Fall zu, würde der ungültige Zustand  $L_{\tau_j} = -1$  überprüft. Durch unendliche Transaktionskosten wird dieser Pfad nicht weiter verfolgt. Zwar wird ebenso die Untersuchung der Handelskosten für den gültigen Fall keiner Transaktion ausgelassen, diese Kosten werden aber stets für einen anderen Kontrakt überprüft. Da das Ergebnis für den Fall "kein Handel" natürlich für alle Kontrakte gleich ist, reicht eine Überprüfung aus.

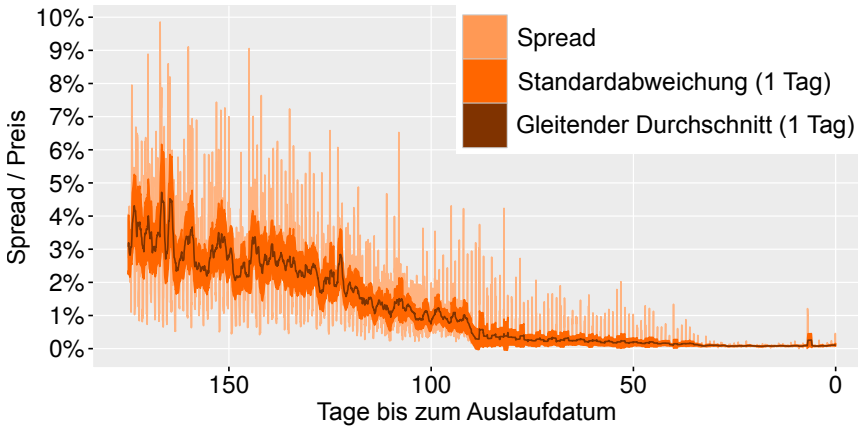
Ist keine dieser Abbruchbedingungen erfüllt, werden für den jeweiligen Future die Transaktionskosten rekursiv ausgewertet. Insgesamt ergeben sich die minimalen Kosten dann über das Minimum aller Futures  $F_{\tau_j}$  mit  $j \in [1, n]$ , wie mit dem Optimierungsproblem 6.5.5 beschrieben wurde.

### 6.5.3 Zusammensetzung der Handelskosten

Es wurde gezeigt, wie die Liquidationskosten eines Portfolios aus gegebenen Kostenprognosen einzelner Transaktionen minimiert werden können. Es bleibt nun also die Aufgabe, eine Funktion  $C: \mathbb{F} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  zu definieren, die für  $C(F_{\tau}, t_0, t_i)$  mit den Informationen zum Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{T}$  eine Handelskostenprognose für den Zeitpunkt  $t_i$  ermittelt.

Handelskosten setzen sich in der Regel aus zwei Bestandteilen zusammen. Neben einer deterministischen Komponente, die sich aus exakt vorhersehbaren Gebühren der gewählten Handelsplattform ergibt, ist der Ask-Bid-Spread entscheidend. Dieser hängt von der Markt-Liquidität ab, kann mitunter stark schwanken und große Werte annehmen – mehrere Prozent des Preises sind in Märkten mit geringen Handelsvolumina nicht unüblich. Abbildung 6.12 zeigt die Spreads von verschiedenen WTI-Futures innerhalb der letzten sechs Monate vor ihrem Auslaufdatum. Offensichtlich sinken der Spread und dessen Volatilität, je näher der Future seinem Auslaufdatum kommt. Die periodische Oszillation ergibt sich durch Liquiditätsschwankungen zwischen regulären und irregulären Handelszeiten nach Börsenschluss. Das geringste Spread-Niveau von etwa einem Promill erreicht die gezeigte Future-Klasse etwa 90 Tage vor ihrem Auslaufdatum, zunächst noch mit hoher Schwankungsbreite. Daher können die Kostenstrukturen der am frühesten ablaufenden drei Kontrakte bei

## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts



**Abbildung 6.12.** Durchschnittliches Verhältnis zwischen Spread und Kurs in Abhängigkeit zur verbleibenden Lebensdauer des Future-Kontrakts für WTI

monatlichem Future-Wechsel zumindest temporär als ähnlich betrachtet werden.

Abbildung 6.12 kann als klare Empfehlung für den Handel von Kontrakten mit nahem Auslaufdatum verstanden werden, da für diese der Spread in der Regel am geringsten ist. Durch die beschriebene Problematik der Future Rollings gibt es jedoch Ausnahmen von dieser Regel. Der erwartete Spread wie auch das Risiko von Future Rollings müssen also unbedingt in die Kostenprognose  $C$  einfließen.

### 6.5.4 Spread-Analyse

Obwohl hohe Spreads ein Symptom illiquider Märkte sind, bedeuten sie nicht zwangsläufig, dass Angebots- und Nachfrageseite gleichermaßen betroffen sind. So entsteht ein hoher Spread natürlich auch dann, wenn ein vergleichsweise attraktiver Angebotspreis eines Kontrakts auf eine kurzfristig eingebrochene Nachfrage trifft und umgekehrt.

In Kapitel 4.2.1 wurde bereits ein Spread-bereinigter Kurs eingeführt, der Bewegungen nur übernimmt, wenn sie gleichermaßen im Ask- und Bid-Kurs stattfinden. Hierdurch konnte die Spread-bedingte Volatilität,

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

die zu übersteigerten Schätzungen der Mean Reversion-Rate geführt hätte, entfernt werden. Die dort vorgestellte Berechnung macht im Kontext von Futures allerdings wenig Sinn. Sie lässt nämlich völlig außer Acht, dass Kontraktpreise einer Futureklasse stark korreliert sind und so untereinander genutzt werden können, um einen präziseren Spread-bereinigten Kurs zu ermitteln. Gerade für die Analyse des Preises kaum gehandelter Kontrakte mit hohen Spreads ist die Einbeziehung von stark gehandelten Kontrakten mit geringen Spreads sehr hilfreich.

Es wird daher ein Verfahren für die Berechnung des Spread-bereinigten Kurses vorgestellt, das die gesamte Termstruktur einbezieht – durch diesen Schritt können nicht nur Spreads genauer analysiert werden, durch Abweichungen einer gemeinsamen Preisentwicklung lassen sich zudem mögliche Über- und Unterbewertungen identifizieren.

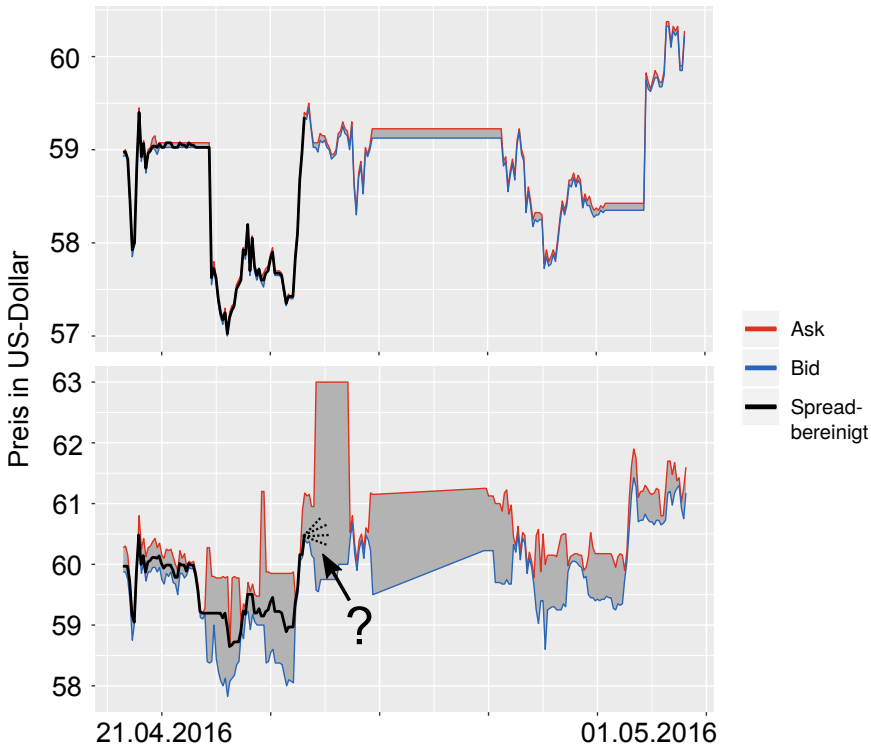
Als Beispiel für das Problem werden in Abbildung 6.13 Preisstrukturen zweier unterschiedlicher WTI-Mini-Futures gezeigt. Offensichtlich ist der Spread im dargestellten Bereich im April 2016 für den unten gezeigten Dezember-Kontrakt durchschnittlich höher als für den September-Kontrakt. Für beide Futures ist schon teilweise ein gemeinsamer Spread-bereinigter Kurs ermittelt. Es stellt sich nun also die Frage, wie dieser Kurs weitergeführt werden kann. Der dargestellte Pfeil verweist dabei auf einen besonders kritischen Zeitpunkt für den Dezember-Kontrakt. Ask- und Bid-Kurse spannen zeitweilig einen Bereich von etwa 60 bis 63 US-Dollar auf und erschweren die präzise Bestimmung des Spread-bereinigten Preises. Insbesondere stellt sich daher die Frage, ob die Informationen des September-Kontrakts genutzt werden können, um den Preis trotz des sehr großen Ask-Bid-Spreads im Dezember-Kontrakt genau zu beschreiben.

Die Idee ist nun, die minimale gemeinsame Kursänderung zu finden, die für beide (bzw. alle) Kontrakte wieder im jeweiligen vom Ask- und Bid-Kurs aufgespannten Bereich liegt. Es folgt eine formale Beschreibung.

Seien  $n$  Kontrakte  $F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \dots, F_{\tau_n} \in \mathbb{F}$  mit Auslaufdaten  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in \mathbb{T}$  einer Future-Klasse  $\mathbb{F}$  gegeben. Seien  $A_t^{F_{\tau_j}} \in \mathbb{R}$  und  $B_t^{F_{\tau_j}} \in \mathbb{R}$  logarithmierte Ask- und Bidpreise des jeweiligen Kontrakts  $F_{\tau_j}$  mit  $j \in [1, n]$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$ .

Sei  $X_t^{F_{\tau_j}} \in \mathbb{R}$  der logarithmierte Spread-bereinigte Kurs des Kontrakts  $F_{\tau_j}$  zum Zeitpunkt  $t$ . Es wird nun nach einer gemeinsamen Bewegung

## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts



**Abbildung 6.13.** Ask- und Bid-Kurse für WTI Mini-Futures im April 2016 mit unterschiedlichen Auslaufdaten (oben: September 2016, unten: Dezember 2016). Die Weiterführung eines gemeinsamen Spread-bereinigten Kurses ist gesucht.

$dX_{t+1} \in \mathbb{R}$  aller Future-Kontrakte  $F_{\tau_1}, F_{\tau_2}, \dots, F_{\tau_n}$  gesucht, so dass die Folgekurse  $X_t^{F_{\tau_j}} + dX_{t+1}$  für alle  $j \in [1, n]$  im von  $A_{t+1}^{F_{\tau_j}}$  und  $B_{t+1}^{F_{\tau_j}}$  aufgespannten Bereich liegen.

Natürlich kann es dazu kommen, dass keine gemeinsame Kursänderung aller Kontrakte existiert, die innerhalb der jeweiligen Ask-Bid-Grenzen liegt. Es wird daher nach einer Bewegung gesucht, bei der die Summe der Abweichungen minimal ist.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  ein möglicher Kandidat für die gemeinsame Kursänderung, mit dem Ziel, dass die Werte  $X_t^{F_{\tau_j}} + \varepsilon$  für alle Futures  $F_{\tau_j}$  mit  $j \in [1, n]$  im vom  $A_{t+1}^{F_{\tau_j}}$  und  $B_{t+1}^{F_{\tau_j}}$  aufgespannten Bereich liegen. Die Summe aller Abweichungen einer gemeinsamen Kursänderung  $\varepsilon$  zum Zeitpunkt  $t$  sei das Residuum  $R$  mit

$$R(\varepsilon, t) = \sum_{j \in [1, n]} \max \left( X_t^{F_{\tau_j}} - A_{t+1}^{F_{\tau_j}} + \varepsilon, 0 \right) + \max \left( B_{t+1}^{F_{\tau_j}} - X_t^{F_{\tau_j}} + \varepsilon, 0 \right).$$

Sei  $\mathcal{E}^t$  die Menge aller Kursänderungen, die zum Zeitpunkt  $t$  das geringste Residuum hervorrufen, also

$$\mathcal{E}^t := \{ \varepsilon \mid R(\varepsilon, t) = \min_{r \in \mathbb{R}} R(r, t) \}.$$

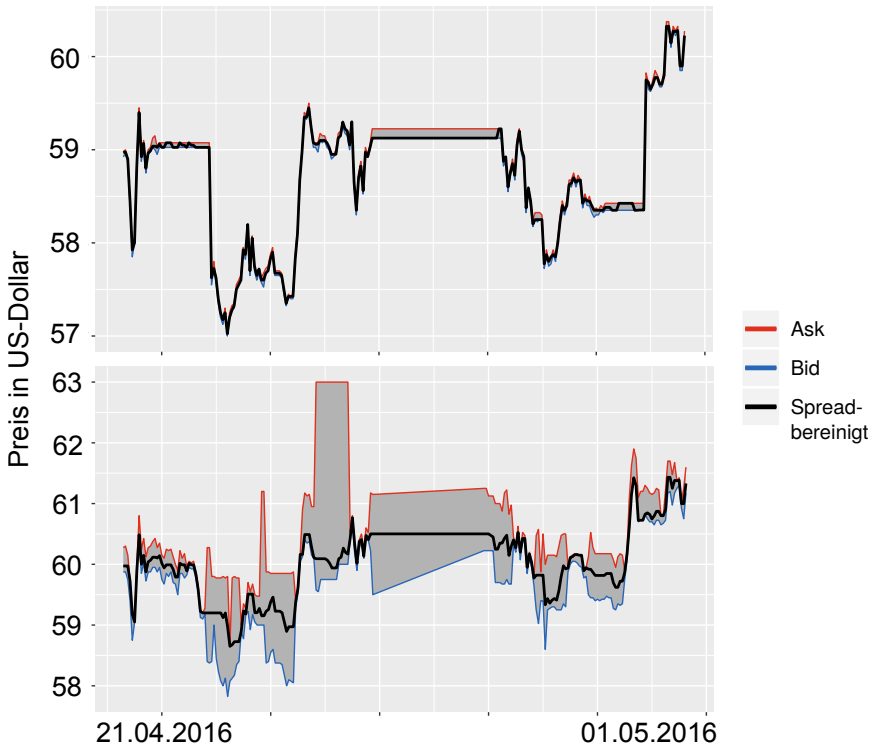
Zwar erklären alle Kursänderungen in  $\mathcal{E}^t$  die gemeinsame Kursbewegung mit minimalem Fehler, für den Spread-bereinigten Kurs wird allerdings wieder die geringste Bewegung bevorzugt. Diese wurde schon beim Spread-bereinigten Kurs für ein einzelnes Asset gewählt, da jede unnötige Volatilität zu nicht ausnutzbarer Mean Reversion führt. Die gemeinsame Kursänderung  $dX_{t+1}$  ist also definiert als betragsmäßig kleinste Bewegung, die zur minimalen Gesamtabweichung führt:

$$dX_{t+1} := \{ \varepsilon \mid |\varepsilon| \leq |r| \forall \varepsilon, r \in \mathcal{E}^t \}$$

Für alle Kontrakte  $F_{\tau_j} \in \mathbb{F}$  mit  $j \in [1, n]$  ergibt der neue Kurs  $X_{t+1}^{F_{\tau_j}}$  dann über diese Kursänderung, allerdings nach oben und unten durch Ask- bzw. Bid-Preis begrenzt:

$$X_{t+1}^{F_{\tau_j}} = \max \left( B_{t+1}^{F_{\tau_j}}, \min \left( A_{t+1}^{F_{\tau_j}}, X_t^{F_{\tau_j}} + dX_{t+1} \right) \right) \quad (6.5.6)$$

## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts



**Abbildung 6.14.** Spread-bereinigter Kurs für WTI Mini-Futures im April 2016 mit unterschiedlichen Auslaufdaten (oben: September 2016, unten: Dezember 2016)

**6.5.7 Beispiel.** Abbildung 6.14 zeigt die Fortsetzung des Beispiels aus Abbildung 6.13. Gezeigt ist die exponentielle Entwicklung der Log-Kurse  $A_t^{F_{tj}}$ ,  $B_t^{F_{tj}}$  und  $X_t^{F_{tj}}$ . Gerade beim unten gezeigten Dezember-Kontrakt hilft die gemeinsame Kursentwicklung bei der Einordnung des Spreads. So stellt sich zum Beispiel die kurzfristige Steigung des Ask-Preises auf 63 US-Dollar vor allem als Angebotseinbruch heraus, die Differenz zum Bid-Preis ist wesentlich geringer. Das Verfahren ist robust gegenüber solch einseitigen Entwicklungen und nimmt Kursänderungen nur an, wenn sie in der Mehrheit der Kontrakte in Ask- und Bid-Kursen anzutreffen sind.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

Die Handelskosten für einen Kauf (bzw. Verkauf) ergeben sich dann über die jeweilige Differenz von Ask-Kurs (bzw. Bid-Kurs) und Spread-bereinigtem Kurs. Hieraus lassen sich unmittelbare Transaktionskosten genau berechnen.

### 6.5.5 Prognose zukünftiger Handelskosten

Sei  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Z}$  eine geordnete Indexmenge, die die Zeitspanne bis zum Auslaufdatum eines Futures darstellt. So ist  $\tau - t \in \mathbb{D}$  die zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  verbleibende Zeitspanne bis zum Auslaufdatum eines Kontrakts  $F_\tau \in \mathbb{F}$ .

Sei  $d\tau \in \mathbb{D}$  die als konstant angenommene Zeitspanne zwischen den Auslaufdaten zweier aufeinanderfolgender Kontrakte. Für die vorgestellten WTI-Futures beträgt dieser Wert einen Monat.

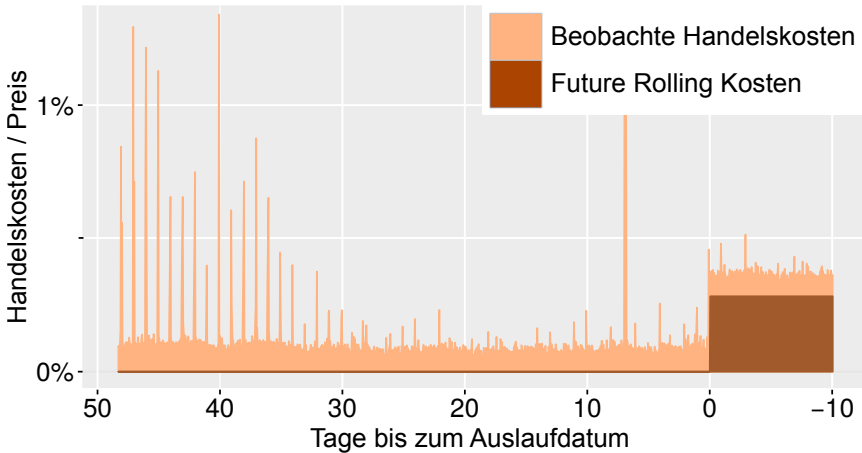
Sei  $c: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  die in Abbildung 6.12 dargestellte Funktion, so dass  $c(d)$  mit  $d \in \mathbb{D}$  dem Wert der durchschnittlich beobachteten Handelskosten entspricht, die sich für einen Kontrakt  $d$  Zeiteinheiten vor seinem Auslaufdatum ergeben. Zwar lassen sich diese Werte für Kontrakte vor dem Auslaufdatum aus historischen Daten ermitteln, für eine genaue Bewertung müssen allerdings ebenso die potentiell durch Future Rolling anfallenden Kosten einbezogen werden. Hierfür werden die beobachtbaren Handelskosten mit positiver Differenz zum Auslaufdatum  $d \geq 0$  um negative Zeitspannen erweitert:

$$c(d) = \underbrace{c(0) + c(d\tau)}_{\text{Kosten für Future Rolling}} + \underbrace{c(d + d\tau)}_{\text{Liquidationskosten}} \quad \forall d < 0.$$

Die Handelskosten für einen Future-Kontrakt nach seinem Auslaufdatum ergeben sich also als Summe der Kosten dreier Transaktionen. Für die Aufrechterhaltung der Position durch Future Rolling wird der gehaltene Kontrakt zum letztmöglichen Zeitpunkt liquidiert ( $c(0)$ ) und neu eröffnet ( $c(d\tau)$ ). Darüber hinaus ergeben sich Kosten für den tatsächlich geplanten Handel ( $c(t + d\tau)$ ). Diese Kosten resultieren in einem Anstieg der erwarteten Handelskosten nach dem Auslaufdatum (siehe Abbildung 6.15).



## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts



**Abbildung 6.15.** Durchschnittliche Handelskosten  $c(d)$  für die letzten 50 Tage mehrerer WTI-Kontrakte. Für den Handel nach Erreichen des Auslaufdatums sind zusätzliche Wechselkosten durch Future Rolling eingerechnet.

### 6.5.6 Informationen über das Handelssystem

Während in Kürze auslaufende Kontrakte in der Regel die geringsten Spreads aufweisen, ist bei ihnen abhängig von der Handelsstrategie die Gefahr nötiger Future Rollings am höchsten. Als Faustregel sollten Liquidationszeitpunkte für gehandelte Kontrakte also so nah wie möglich, aber so fern wie für eine rechtzeitige Veräußerung nötig von ihrem Auslaufdatum entfernt, gewählt werden. Insgesamt ergeben sich also zwei entgegengesetzte Risiken, die für minimale Handelskosten in Balance gebracht werden müssen.

Ohne Informationen über das Handelsverhalten ist ein optimaler Ausstiegszeitpunkt aus einem Kontrakt also nicht prognostizierbar. So kann ohne ungefähre Kenntnis der Handelsfrequenz nicht abgeschätzt werden, mit welchen Wahrscheinlichkeiten Future Rollings eintreten können. Idealerweise wäre daher die Dichtefunktion  $f_s : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  der Verteilung bekannt, so dass  $f_s(t)$  die Wahrscheinlichkeit anzeigt, dass ein zum Zeitpunkt  $s \in \mathbb{T}$  erwarteter Handel zum zukünftigen Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  stattfindet. Kombiniert mit statistischen Informationen über Spreads wären Kostenstrukturen

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

für einzelne Kontrakte messbar – eine fundamentale Eigenschaft für die Beschreibung der gesuchten Funktion  $C$  für die Prognose der Handelskosten.

Für die im Fokus stehende Swing-Strategie sind Prognosen über zukünftige Handelsentscheidungen durchaus möglich. Die Handelsfrequenz lässt sich direkt aus dem Parameter  $\Delta$  und der aktuellen Volatilität schätzen. Vereinfachend wird daher davon ausgegangen, dass sich das Intervall zwischen zwei Transaktionen als normalverteilte Zufallsvariable darstellen lässt. Folgende Daten lassen sich direkt ermitteln:

- ▷ **Handelsintervall  $\mu$ :** Es sei bekannt, wie häufig im Schnitt gehandelt wird (z.B. durchschnittlich einmal pro Tag). Da sich die Anzahl der Transaktionen über die Anzahl der  $\Delta$ -Überschreitungen errechnet, ist dieser Wert direkt aus der Volatilität der Zeitreihe schätzbar.
- ▷ **Standardabweichung  $\sigma$ :** Das Handelsintervall sei normalverteilt mit Standardabweichung  $\sigma$ . Bei einem erwarteten Handelsintervall  $\mu$  von einem Tag und einer Standardabweichung  $\sigma$  von 12 Stunden kann also mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 65 Prozent davon ausgegangen werden, dass in 12 bis 36 Stunden gehandelt wird.
- ▷ **Gehandelte Anzahl an Kontrakten:** Es wird hier vereinfachend davon ausgegangen, dass die Anzahl gehandelter Kontrakte immer konstant ist, da es zumindest für die Swing-Strategie stets der Fall ist.

### 6.5.7 Minimierung der Liquidationskosten

Es seien nun folgende Informationen gegeben:

- ▷ Schätzungen für unmittelbare Handelskosten (Abschnitt 6.5.4)
- ▷ Prognose zukünftiger Liquidierungskosten (Abschnitt 6.5.5)
- ▷ Prognose zukünftiger Handelszeitpunkte (Abschnitt 6.5.6)
- ▷ Aktuelles Portfolio

## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts

Hiermit ist es nun möglich, die Funktion  $C : \mathbb{F} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  zu beschreiben, so dass  $C(F_\tau, s, t)$  die zum Zeitpunkt  $s \in \mathbb{T}$  erwarteten Handelskosten eines Kontrakts  $F_\tau \in \mathbb{F}$  zum Zeitpunkt  $t \in \mathbb{T}$  mit  $s \leq t$  prognostiziert.

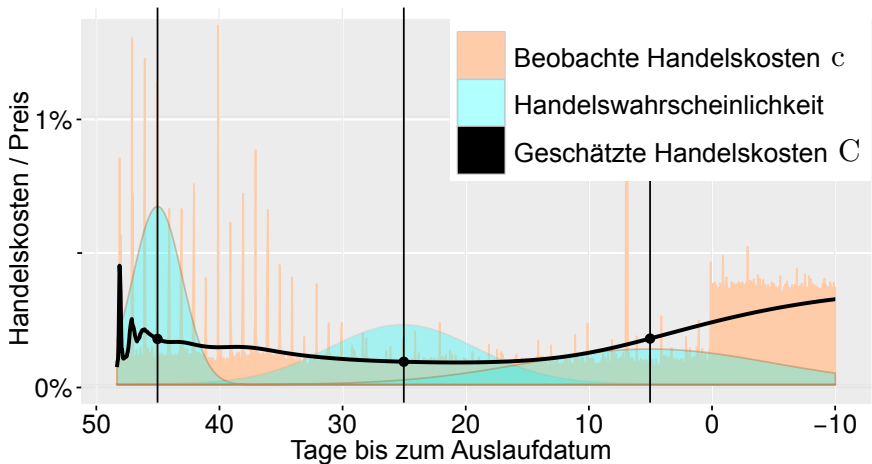
Um statistische Informationen des Handelsverhaltens mit den beobachteten Handelskosten  $c$  zu einer Prognose zu verbinden, werden die erwarteten Transaktionskosten  $v : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Seien  $v(\tau, s, t) = v_{\tau,s}(t)$  die Kosten für den Kontrakt  $F_\tau$  für einen zukünftigen Zeitpunkt  $t$ , geschätzt zum aktuellen Zeitpunkt  $s$  mit  $s \leq t$ . Für einen spezifischen Zeitpunkt  $t$  sind diese zunächst unabhängig von  $s$  und ergeben sich direkt aus den beobachteten Handelskosten:

$$v_{\tau,s}(t) = c(\tau - t). \quad (6.5.8)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion über zukünftige Handelszeitpunkte  $f_s$  wird mit den geschätzten Kosten dieser Zeitpunkte  $v_s$  so verbunden, dass die temporäre Unsicherheit in die Kostenschätzung eingebunden wird. Hierfür werden die Funktionen  $f_s$  und  $v_{\tau,s}$  über den Faltungsoperator "\*" kombiniert. Er addiert die Produkte jeder Kostenprognose mit der jeweiligen Auftretenswahrscheinlichkeit (mit stetigem Definitionsbereich allgemein als Integral dargestellt) zu einem Erwartungswert, so dass die Unsicherheit der Schätzung des Transaktionszeitpunkts präzise einfließt. Es ergeben sich also die erwarteten Kosten und damit die gesuchte Funktion  $C : \mathbb{F} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ . Sie ermöglicht es, Handelskosten zum zukünftigen Zeitpunkt  $t$  individuell für eine gegebene Handelsstrategie zum Zeitpunkt  $s$  zu ermitteln mit

$$\begin{aligned} C(F_\tau, t, s) &= (f_s * v_{\tau,s})(t) & (6.5.9) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \left(\frac{t-s}{\mu} \cdot \sigma\right)^2}} \\ &\cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2 \left(\frac{t-s}{\mu} \cdot \sigma\right)^2}\right) \cdot v_{\tau,s}(t+x) \, dx. \end{aligned}$$

## 6. Kointegration in Finanzmärkten



**Abbildung 6.16.** Geschätzte Handelskosten  $C(F_\tau, s, t)$  für einen Kontrakt  $F_\tau$ . Der aktuelle Zeitpunkt  $s$  befindet sich 48 Tage vor dem Auslaufdatum. Normalverteilungen für drei beispielhafte Handelszeitpunkte (45, 25 und 5 Tage vor seinem Auslaufdatum) wurden ermittelt mit  $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{5}$ . Diese sind schematisch skizziert, um das Maß der Unsicherheit des prognostizierten Handelszeitpunkts darzustellen.

**6.5.10 Beispiel.** Abbildung 6.16 zeigt beispielhaft unterschiedliche Handelskostenschätzungen für einen Kontrakt der Future-Klasse WTI Mini.

Gezeigt werden die beobachteten Handelskosten  $c$  und drei beispielhafte Normalverteilungen für die Berechnung dreier Punkte der Handelskostenprognose  $C$  (jeweils durch eine vertikale schwarze Linie angezeigt).

Es wird alle  $\mu = 20$  Tage ein Handel mit einer Standardabweichung von jeweils  $\sigma = 4$  Tagen erwartet. Es ergeben sich so drei vermutete Handelszeitpunkte mit steigender Unsicherheit, da die Varianz linear mit der Entfernung vom aktuellen Zeitpunkt steigt. Für diese prognostizierten Zeitpunkte ergeben sich also individuelle Standardabweichungen, die die jeweiligen türkis dargestellten schematischen Wahrscheinlichkeitsverteilungen andeuten.

Aus den jeweiligen Normalverteilungen und den beobachteten Handelskosten wird nun jeweils ein Punkt der geschätzten Handelskosten  $C$  ermittelt. Während kurzfristige Schätzungen so genau sind, dass selbst Tagesschwankungen sichtbar in die Handelskosten  $C$  einfließen, ergibt sich

## 6.5. Optimale Auswahl eines Future-Kontrakts

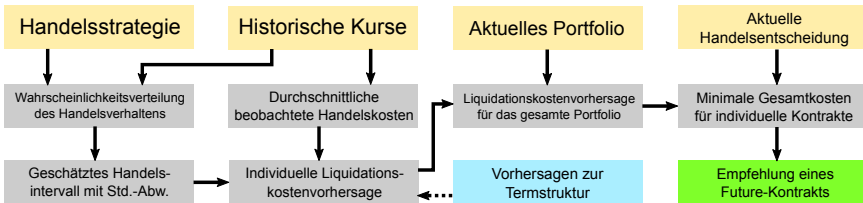
für weiter entfernte Schätzungen durch die steigende Standardabweichung eine Glättung der erwarteten Handelskosten  $C$ .

Bei dem angenommenen Verhältnis  $\frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{5}$  ergibt sich etwa 20 Tage vor dem Auslaufdatum der minimale Wert für die erwarteten Handelskosten  $C$ , da bei geringen beobachteten Handelskosten  $c$  auch Future Rollings noch so gut wie ausgeschlossen erscheinen. Dieses Risiko steigt, je näher man an das Auslaufdatum rückt. So zeigt der rechte türkise Bereich eine deutliche Überlappung mit dem Intervall hinter dem Auslaufdatum. Dadurch steigen die erwarteten Handelskosten  $C$  spürbar.

Ist in dem aktuellen Portfolio noch eine Position zu liquidieren, so wäre eine Liquidation 25 Tage vor dem Auslaufdatum die vermutlich beste Entscheidung.

### 6.5.8 Zwischenbilanz

Bevor in einem nächsten Schritt Vorhersagen zur Termstruktur einfließen, folgt eine kurze Rekapitulation der bisherigen Struktur. Die Entwicklung einer Auswahlstrategie hat bisher zu folgendem Aufbau geführt:



**Abbildung 6.17.** Überblick über verschiedenen Analysestationen (grau), mit der die untersuchten Daten (gelb) in eine Kontraktempfehlung (grün) überführt werden. Vorhersagen zur Termstruktur (blau) fließen bisher nicht ein.

Diese sei in folgenden Punkten zusammengefasst:

- ▷ Die Auswahlstrategie benötigt folgende Eingabedaten: eine Handelsstrategie, historische Kursdaten, ein aktuelles Portfolio und eine aktuelle Handelsentscheidung.
- ▷ Aus der Handelsstrategie und historischen Kursen lässt sich zu jedem Zeitpunkt  $s$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Handelsverhal-

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

ten  $f_s$  ermitteln, aus denen mit einem geschätzten Handelsintervall  $\mu$  und einer Standardabweichung  $\sigma$  zukünftige Handelszeitpunkte prognostiziert werden.

- ▷ Eine Funktion  $c$  prognostiziert zukünftige Handelskosten einzelner Transaktionen direkt über die durchschnittlichen beobachteten Handelskosten aus historischen Kursdaten.
- ▷ Die Funktion  $C$  kombiniert die Prognosen von  $c$  mit zukünftigen erwarteten Handelszeitpunkten der Handelsstrategie mit jeweiliger Standardabweichung. Die Ergebnisse werden genutzt, um für jeden Kontrakt im Portfolio eine Liste möglicher Liquidationszeitpunkte mit individuellen Kostenschätzungen zu berechnen.
- ▷ Für eine aktuelle Handelsentscheidung werden für jedes möglicherweise entstehende Portfolio über das Prinzip der dynamischen Programmierung kumulierte minimale Liquidationskosten prognostiziert.
- ▷ Über die minimale Summe der aktuellen Handelskosten und der zukünftigen Mehrkosten durch nötige Liquidationen ergibt sich der Kontrakt mit den minimalen Handelskosten, der von der Auswahlstrategie empfohlen wird.

Bisher wurde davon ausgegangen, dass Future-Märkte effizient sind und keine Fehlbewertungen existieren. Im folgenden Abschnitt wird diese Annahme hinterfragt. Individuelle Kursausschläge einzelner Futures werden als Unter- oder Überreaktion verstanden, es wird ein Mean Reversion-Effekt unterstellt.

### 6.6 Mean Reversion in der Termstruktur

In Abschnitt 6.5.4 wurde die gemeinsame Kursänderung  $dX_{t+1}$  formal als diejenige Änderung mit minimaler Abweichung aus den jeweiligen Ask-Bid-Bereichen einzelner Kontrakte definiert. In Gleichung 6.5.6 wurde hieraus der Spread-bereinigte Kurs errechnet und sichergestellt, dass dieser zwischen Ask- und Bid-Wert liegt. Individuell abweichende Kursbewegungen einzelner Futures wurden also in den Spread-bereinigten Kurs aufgenommen. Die Berechnungsvorschrift sei nochmals erwähnt:

## 6.6. Mean Reversion in der Termstruktur

$$X_{t+1}^{F_\tau} = \max \left( B_{t+1}^{F_\tau}, \min \left( A_{t+1}^{F_\tau}, X_t^{F_\tau} + dX_{t+1} \right) \right)$$

Ebenso wäre es aber möglich, keine individuellen Kursänderungen zuzulassen. Es ergäben sich dann Preis-Prozesse  $Y_{t+1}^{F_\tau}$  mit

$$Y_{t+1}^{F_\tau} = Y_t^{F_\tau} + dX_{t+1}.$$

und  $Y_0^{F_\tau} = X_0^{F_\tau}$ . Ginge man nun davon aus, dass individuelle Kursbewegungen einzelner Futures auf mögliche Fehlbewertungen hinweisen, so wäre die Differenz  $r_t^{F_\tau} = Y_t^{F_\tau} - X_t^{F_\tau}$  ein Mean Reversion-Prozess. Ein Ornstein-Uhlenbeck-Fitting für den Kontrakt  $F_\tau \in \mathbb{F}$  und den Prozess

$$dr_t^{F_\tau} = \theta^{F_\tau} \left( \mu^{F_\tau} - r_{t-1}^{F_\tau} \right) dt + \sigma^{F_\tau} dW_t^{F_\tau}$$

sollte daher eine positive Mean Reversion-Rate  $\theta^{F_\tau}$  ergeben. Zwischen dem aktuellen Zeitpunkt  $s$  und dem zukünftigen Zeitpunkt  $t$  wird dann eine Einpreisung erwartet, so dass sich der Wert  $r_t^{F_\tau}$  in jedem Zeitschritt  $\mu^{F_\tau}$  annähert. Für die zum Zeitpunkt  $s$  bekannten Informationen (gegeben durch  $\mathcal{F}_s$ ) ergibt sich für  $s + 1$  der Erwartungswert

$$\mathbb{E} \left( r_{s+1}^{F_\tau} \mid \mathcal{F}_s \right) = (1 - \theta^{F_\tau}) r_s^{F_\tau} + \theta^{F_\tau} \mu^{F_\tau}.$$

Für den Erwartungswert zum in der Zukunft liegenden Zeitpunkt  $t$  ergibt sich

$$\mathbb{E} \left( r_t^{F_\tau} \mid \mathcal{F}_s \right) = (1 - \theta^{F_\tau})^{t-s} r_s^{F_\tau} + (1 - (1 - \theta^{F_\tau})^{t-s}) \mu^{F_\tau}.$$

Nutzt man diese Einschätzung für die Prognose, lassen sich die Handelskosten um die erwartete Einpreisung, die sich aus der Differenz von erwartetem und aktuellem Preis ergibt, ändern:

$$v(\tau, s, t) = \begin{cases} c(\tau - t) - \mathbb{E} \left( r_t^{F_\tau} \mid \mathcal{F}_s \right) + r_s^{F_\tau} & \text{bei einem Kauf} \\ c(\tau - t) - r_s^{F_\tau} + \mathbb{E} \left( r_t^{F_\tau} \mid \mathcal{F}_s \right) & \text{bei einem Verkauf} \end{cases}$$

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

Greift man diese geänderte Formel für die Berechnung der Liquidationskosten in Abschnitt 6.5.7 auf und ändert Gleichung 6.5.8 entsprechend, so ergibt sich eine alternative Auswahlstrategie. Beide Varianten werden in der folgenden Evaluation untersucht.

### 6.7 Evaluation

Eine etablierte Auswahlstrategie ist das sogenannte *Front Month Rolling*, bei dem nur die zwei Futures mit den jeweils frühesten Auslaufdaten gehandelt werden. Dabei werden immer Positionen in dem Future mit dem frühesten, aber mindestens noch ein Monat entfernten Auslaufdatum eröffnet. Müssen Positionen liquidiert werden, so geschieht dies stets im nächsten auslaufenden Kontrakt. Diese Strategie hat gleich mehrere offensichtliche Vorteile. Zum einen haben bald auslaufende Kontrakte meist eine hohe Liquidität mit geringen Spreads. Zum anderen ist keine vorige Analyse notwendig, Backtests erfordern nicht die Kenntnis der kompletten Termstruktur.

Dieses einfache System wird als Benchmark dienen. In diesem Abschnitt werden drei unterschiedliche Auswahlstrategien auf Realmarktdaten verglichen:

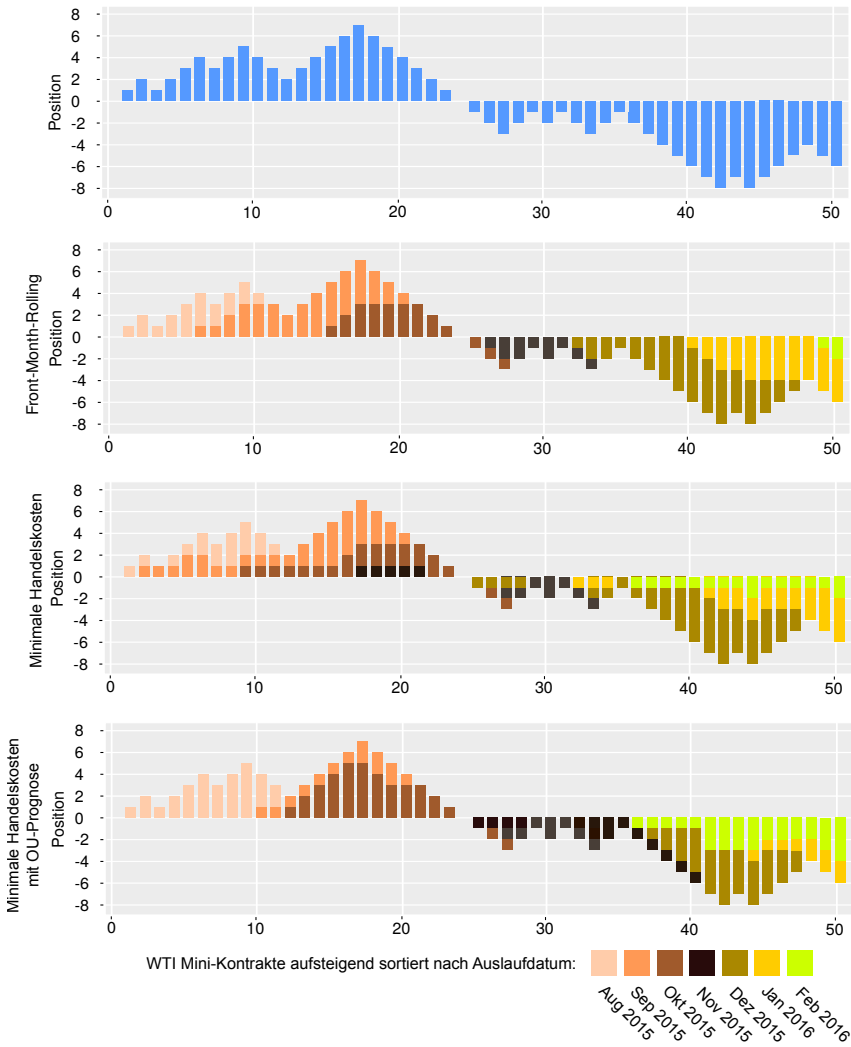
1. Front-Month Rolling, Kürzel: **FMR**
2. Minimale Handelskosten nach dynamischer Programmierung (Abschnitt 6.5.7), Kürzel: **Min. HK**
3. Minimale Handelskosten nach dynamischer Programmierung mit eingerechneten Vorhersagen zur Termstruktur über ein Ornstein-Uhlenbeck-Modell (Abschnitt 6.6), Kürzel: **OU**

Abbildung 6.18 zeigt beispielhaft, wie verschiedene Auswahlstrategien 50 Handelsentscheidungen für die Future-Klasse WTI im Zeitbereich von Juli 2015 bis Januar 2016 umsetzen – die Portfoliozusammensetzung ist nach jedem Handel dargestellt.

Bei der Darstellung der FMR-Strategie fällt auf, dass maximal zwei unterschiedliche Futuretypen im Portfolio koexistieren. Während die Position stets im nächsten, mindestens noch einen Monat laufenden Kontrakt



## 6.7. Evaluation



**Abbildung 6.18.** Beispiel einer simulierten Portfolioentwicklung für 50 Handelsentscheidungen, bei denen jeweils ein WTI-Kontrakt gehandelt wird. Die Positionen werden oben ohne konkrete Zuweisung gezeigt. Die drei folgenden Darstellungen zeigen Selektionen der unterschiedlichen Auswahlstrategien.

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

gesteigert wird, wird sie im früher auslaufenden Kontrakt gesenkt. Jeder Farbwechsel repräsentiert so einen Übergang.

Das Verfahren für minimale Handelskosten hat kein so klares Muster, das Portfolio enthält in diesem Beispiel mehrfach drei unterschiedliche Kontrakte. Da sich hierdurch eine höhere Anzahl verschiedener Liquidationsmöglichkeiten ergibt, ist es durchaus nachvollziehbar, dass die dynamische Programmierung hier insgesamt bessere Chancen auf niedrige Handelskosten ermittelt.

Im unteren Beispiel wird nun zusätzlich der Ausgleich möglicher Ineffizienzen in der Termstruktur ausgenutzt. Es wird deutlich, dass hier stärker einzelne Kontrakte bevorzugt werden. So erscheinen Short-Positionen im November-Kontrakt wesentlich attraktiver, gleichzeitig werden Januar-Kontrakte erst später gehandelt. Dies ist Ausdruck von Prognosen möglicher Einpreisungen von Fehlbewertungen, die sich durch die geschätzten OU-Prozesse einzelner Kontrakte ergeben.

Um diese Auswahlstrategien nun möglichst allgemein vergleichen zu können, werden sie über 50.000 Simulationen mit jeweils 100 zufälligen Handelsentscheidungen auf Realmarktdaten getestet. Es wird dann untersucht, wie die Wahl der jeweiligen Kontrakte Ergebnisse und Handelskosten durchschnittlich beeinflusst. Hierfür werden Futures auf Aktienindizes und Rohstoffen während des Zeitintervalls vom Juli 2015 bis zum Juli 2017 verwendet. Wegen der geringeren Spreads bei höheren Handelsvolumina werden keine Mini-Futures, sondern große Futures untersucht. Für die erwarteten Handelskosten  $C$  wird zusätzlich analysiert, ob sich eine separate Auswertung von Ask- und Bid-Anteil des Spreads nach Abschnitt 6.5.4 (im Folgenden kurz *SAB* für die separate Betrachtung von Ask und Bid) auszahlt oder ob eine identische Bewertung des Spreads für Käufe und Verkäufe ausreicht. Im ersteren Fall werden also separate Auswertungen der Funktion  $c$  und folglich  $C$  erzeugt, die für die jeweilige Berechnung der Liquidationskosten für Long- und Short-Positionen genutzt werden.

Tabelle 6.7 zeigt Resultate der Simulationen für die verschiedenen Auswahlstrategien. Es werden zwei Werte untersucht:

- ▷ **Relative Kosten** Durch den Ask-Bid-Spread ergibt sich bei einem Kauf mit direkt anschließendem Verkauf ein Wertverlust. Die Handelskosten pro Transaktionspaar werden zur Hälfte dem Kauf, zur anderen Hälfte

**Tabelle 6.7.** Monte-Carlo-Simulation: Durchschnittliche Kosten und Ergebnisse im Verhältnis zum jeweiligen Transaktionswert für fünf Auswahlstrategien nach 100 zufälligen Handelsentscheidungen

∅ Rel. Kosten	FMR	Min. HK	Min. HK (SAB)	OU	OU (SAB)
WTI	0,1866‰	0,1584‰	0,1501‰	0,3352‰	0,282‰
Erdgas	0,4122‰	0,3981‰	0,3520‰	0,6185‰	0,720‰
Silber	0,2043‰	0,1726‰	0,1618‰	0,5497‰	0,571‰
S&P 500	0,0643‰	0,0492‰	0,0472‰	0,0822‰	0,089‰
Nikkei 225	0,2251‰	0,1995‰	0,2218‰	0,3483‰	0,314‰
DAX 30	0,0611‰	0,0556‰	0,0499‰	0,0914‰	0,093‰
∅ Rel. Ergebnis	FMR	Min. HK	Min. HK (SAB)	OU	OU (SAB)
WTI	-0,2422‰	-0,2255‰	-0,2071‰	0,2106‰	0,3322‰
Erdgas	-0,5123‰	-0,4281‰	-0,4122‰	-0,2388‰	-0,2772‰
Silber	-0,1647‰	-0,1373‰	-0,1456‰	-0,3259‰	-0,2868‰
S&P 500	-0,1282‰	-0,0890‰	-0,0419‰	0,1818‰	0,3623‰
Nikkei 225	-0,3982‰	-0,3501‰	-0,2922‰	-0,5199‰	-0,5675‰
DAX 30	-0,0927‰	-0,0615‰	-0,0375‰	0,2832‰	0,3251‰

dem Verkauf angerechnet. Dieser als Handelskosten verstandene Verlust entspricht hier also dem halben Spread zum Transaktionszeitpunkt. Die relativen Handelskosten sind der Anteil dieses halben Spreads am jeweiligen Kurswert – in der Tabelle wird der Durchschnitt für alle Transaktionen gezeigt. Weitere Gebühren werden nicht beachtet, da sie nicht Teil des Optimierungsverfahrens sind.

- ▷ **Relatives Ergebnis** Das relative Ergebnis ist der Gewinn- oder Verlustanteil, der sich im Mittel pro Transaktion ergibt. Dieser wird ebenso relativ zu den jeweiligen Kurswerten der Transaktionen betrachtet. Da zufällige Transaktionen weder überwiegend richtig noch überwiegend falsch liegen, sollte sich das relative Ergebnis langfristig etwa den negativen relativen Kosten annähern.

Für die Transaktionskosten zeigt sich, dass diese bei der FMR-Strategie für alle Future-Klassen im Bereich von 0,0611‰ bis 0,4122‰ liegen. Durch das Verfahren der dynamischen Programmierung zur Minimierung der Handelskosten (Min. HK) gelingt es, die Transaktionskosten im Schnitt um etwa 30% zu reduzieren – die separate Betrachtung von

## 6. Kointegration in Finanzmärkten

Ask- und Bid-Spreads (SAB) bringt weitere, wenn auch sehr geringfügige Verbesserungen.

Die Einbeziehung möglicher Ineffizienzen (OU) führt zu einer deutlichen Steigerung der durchschnittlichen Kosten. Dies ist durchaus zu erwarten, da höhere Transaktionskosten in Kauf genommen werden, wenn ein vermuteter, zukünftiger Ausgleich gemessener Ineffizienzen diese Kosten übersteigt. Die separate Betrachtung von Ask- und Bid-Spreads führt hier zu keiner generellen Verbesserung oder Verschlechterung. Die beschriebenen Erkenntnisse ergeben sich sowohl für Future-Klassen auf Rohstoffen als auch auf Aktienindizes.

Die durchschnittlichen Ergebnisse im Bezug zum Transaktionswert liegen für die FMR-Strategie zwischen  $-0,0927\%$  und  $-0,5123\%$ . Die generell negative Tendenz ergibt sich durch die Handelskosten, das Ergebnis für die zweite Auswahlstrategie (Min. HK) steigt daher etwa um die jeweilige Kostensenkung und liefert durchschnittliche Ergebnisse von  $-0,0615\%$  bis  $-0,4281\%$  des Transaktionsvolumens.

Trotz der deutlich gesteigerten Transaktionskosten schafft es die OU-Auswahlstrategie durch Ausnutzung gemessener Fehlbewertungen, in drei von sechs Fällen durchschnittlich ein positives Ergebnis zu erzielen. Zwar zeigen sich für die Future-Klassen Silber und Nikkei 225 sogar schlechtere Ergebnisse als für die anderen Auswahlstrategien, im Mittel zahlt sich die Berücksichtigung möglicher Fehlbewertungen aber aus. Für Silber ist das durchschnittliche Ergebnis der OU-Strategie von  $-0,3259\%$  zwar um  $0,1611\%$  schlechter als das der FMR-Strategie – da die durchschnittlichen Kosten aber von  $0,2043\%$  auf  $0,5497\%$  gestiegen sind, wäre ein um  $0,3454\%$  schlechteres Ergebnis zu erwarten. Auch hier werden Fehlbewertungen also tendentiell richtig prognostiziert, durch die steigenden Kosten können diese Prognosen allerdings nicht in Gewinne überführt werden. Lediglich für den Nikkei-Future ergibt sich keine solche Tendenz, zumindest in dem untersuchten Zeitraum liegen Prognosen im Mittel falsch.

## 6.8 Fazit

In diesem Kapitel wurde nach Hinweisen für Kointegration, also zeitverzögerten und messbaren Wechselwirkungen, gesucht. In den Abschnitten 6.1 bis 6.3 wurden hierfür Aktien und Aktienindizes genauer analysiert. Es wurde ein Verfahren vorgestellt, um kointegrierte Assets zu finden, die sich für die Verwendung der Swing-Strategie eignen. Erfolgreiche Backtest-Ergebnisse lassen darauf schließen, dass Fehlbewertungen an Aktienmärkten existieren und diese über Kointegrationsanalysen messbar sind.

In den Abschnitten 6.4 bis 6.7 wurde Verfahren mit dem Ziel definiert, Fehlbewertungen in Future-Märkten auszunutzen, um eine optimale Auswahlstrategie zu beschreiben. Hierfür wurde zunächst ein Verfahren beschrieben, welches Handelskosten durch die erschöpfende Auswertung aller sukzessiven Liquidationspfade für ein gegebenes Portfolio mittels dynamischer Programmierung minimiert. Durch zusätzliche Einbeziehung von geschätzten OU-Prognosen für Ineffizienzen einzelner Kontrakte wurde eine Erweiterung des Verfahrens definiert. Tatsächlich zeigt sich, dass die Marktineffizienzen zumindest ausreichen, um für völlig zufällige Handelsentscheidungen die Handelskosten durchschnittlich aufzuwiegen. Die separate Analyse von Ask- und Bid-Spread konnte diesen Effekt sogar noch verstärken.



## **Teil III**

# **Evaluation und Fazit**





# Evaluation

In den letzten Kapiteln wurden verschiedene Segmente des Finanzmarkts auf Effizienz untersucht. Die Analyseergebnisse lassen langfristige Mean Reversion-Effekte vermuten, die sich sowohl über Ornstein-Uhlenbeck-Fittings als auch über erfolgreiche Backtests der Swing-Strategie zeigen. Letztere wurden bisher in den Bereichen Devisen, Rohstoffe und Aktienindizes jeweils separat ausgeführt. In einer abschließenden Evaluation soll untersucht werden, ob die Ergebnisse mit einer parallelen Ausführung mehrerer Swing-Strategien im Sinne der Portfoliotheorie verbessert werden können. Wie bisher erfolgt dafür eine Auswertung über 10 Jahre im Zeitraum von 2008 bis 2018, wobei für möglichst präzise Aussagen Backtests mit einer Monte-Carlo-Simulation kombiniert werden.

## 7.1 Auswahl des Portfolios

Die Portfoliotheorie lehrt, dass sich das Verhältnis von Rendite zu Varianz durch Diversifikation in verschiedene Finanzprodukte manipulieren lässt. Während sich die erwartete Portfoliorendite direkt als gewichtete Linearkombination der erwarteten Einzelrenditen ergibt, hängt die Portfoliovarianz im hohen Maß von der Kovarianz der Investments ab. Die Varianz der Vermögensentwicklung muss also nicht im gleichen Maß wachsen und kann bei entsprechender Gewichtung sogar kleiner werden als die Varianz bei den Einzelinvestitionen.

Formal wurde dies bereits in Abschnitt 6.2 genauer beschrieben. Im dort vorgestellten Optimierungsverfahren wurde dieser Umstand genutzt, um Gewichtungen mit minimaler Gesamtvarianz zu erzeugen. Der Wert des Portfolios sollte hierdurch möglichst konstant bleiben. Dieses spezielle

## 7. Evaluation

Ziel wurde mit der Suche nach einer stabilen Balance zwischen Investments motiviert, bei denen Abweichungen als Fehlbewertungen gedeutet werden können.

Ein wesentlich üblicheres Ziel der Portfoliooptimierung wird durch die sogenannte *Erwartungswert-Varianz-Analyse* erreicht. Sie berechnet Portfoliogewichtungen, die das maximale Verhältnis der Rendite zu Varianz erzeugen und somit zu einem maximalen Sharpe-Ratio führen.

Natürlich wirkt die Erwartungswert-Varianz-Analyse auch für eine parallele Ausführung mehrerer Swing-Strategien auf den ersten Blick attraktiv. Das durch die Swing-Strategie gebundene Kapital kann stark schwanken. Eine geringe Varianz lässt auf einen gleichmäßigeren Kapitalbedarf für ein Portfolio mehrerer Swing-Strategien schließen.

Tatsächlich ist es jedoch nur begrenzt sinnvoll, mehrere Swing-Strategien über die Erwartungswert-Varianz-Analyse zu gewichten. Da die Swing-Strategie selbst stetig Einsätze anpasst, ergäben sich bei zusätzlicher Optimierung ungewollte Rückkopplungen. Eine klassische Portfoliooptimierung mit kontinuierlicher Anpassung der Gewichtungen würde somit direkt dem variablen Investitionsgrad der Swing-Strategie entgegenarbeiten.

Schwankende Einsätze bewirken zudem, dass sich die Kovarianz der Vermögensentwicklung zwischen einzelnen Swing-Strategien stetig ändert. Ein möglichst konstante Kovarianz der Investments ist aber notwendig. Betrachtet man wiederum zwei Swing-Strategien auf stark korrelierten Werten (zum Beispiel die Wechselkursverhältnisse Euro / US-Dollar und Euro / Japanischer Yen), so können sich je nach aktuellem Wert des fairen Preises sehr unterschiedliche Szenarien ergeben. Liegt der faire Preis in einem Fall unter und im anderem Fall über dem aktuellem Marktwert, so würden sich Long- und Short-Positionen wie beim Pairs Trading gegenseitig ausgleichen. Die hohe negative Kovarianz beider Swing-Strategien würde zu einer geringen kombinierten Varianz der Vermögensentwicklung führen. Ändert sich nun jedoch die Differenz zum fairen Preis im unterschiedlichen Maß, ändern sich jeweilige Investitionsgrade – sogar das Vorzeichen der Kovarianz kann sich ändern, wenn der faire Preis eines Assets seinen aktuellen Preis kreuzt und beispielsweise von einer Über- in eine Unterbewertung wechselt.

## 7.1. Auswahl des Portfolios

Eine klassische Portfoliooptimierung mit der Erwartungswert-Varianz-Analyse liefert somit keine sinnvollen Daten. Investitionsgrade und somit Portfoliogewichtungen werden durch die Swing-Strategie vorgegeben. Einfluss auf die Portfoliozusammenstellung kann somit nur einmalig durch die Beschreibung der Parameter  $\Delta\%$  und  $N$  genommen werden. Zur Erinnerung: Pro Entfernung um je ein prozentuales Kursintervall  $\Delta\%$  vom fairen Preis werden  $N$  Positionen erworben, je nach Unter- oder Überbewertung handelt es sich um Long- oder Short-Positionen.

Die üblicherweise mit der Diversifikation einhergehenden Vorteile sind dennoch auch für die Swing-Strategie zu erwarten. Die Tatsache, dass starke Ausschläge in einem Investment durch andere Investments abgefedert werden können, ist so natürlich auch hier gegeben. Um diesen Effekt zu nutzen, ergeben sich zumindest zwei informelle Richtlinien:

- ▷ Die Parameter  $\Delta\%$  und  $N$  müssen so abgestimmt werden, dass eine gleichmäßige Verteilung über alle Swing-Strategien möglichst wahrscheinlich ist. Hierfür sind sie so zu wählen, dass der Wert der erworbenen Positionen pro prozentualer Abweichung vom fairen Preis identisch ist. Es wird somit immer am stärksten in das Asset mit der prozentual höchsten Fehlbewertung investiert. Die folgende Auswertung orientiert sich an diesem Ziel.
- ▷ Für das Portfolio sollte eine Auswahl vielversprechender Assets (mit hoher Mean Reversion-Rate) gefunden werden, deren Kurse möglichst nicht korreliert sind. Eine positive wie auch negative Korrelation bewirkt im schlechtesten Fall, dass die gebundenen Kapitaleinsätze einzelner Swing-Strategien positiv korreliert sind. Das soll aber genau verhindert werden, da ein gleichmäßiger Kapitalbedarf über alle Swing-Strategien wünschenswert ist, der sich im zeitlichen Verlauf möglichst kaum ändert. Damit würde voraussichtlich auch ein möglichst geringes MEK erzielt.

In den vorigen Kapiteln wurden Devisen, Rohstoffe und Aktienindizes separat untersucht. Die folgende Auswertung kombiniert diese Swing-Strategien zu einem Portfolio, zudem wird in vier statt eine Fremdwährung investiert. Es werden also insgesamt folgende neun Swing-Strategien parallel evaluiert:

## 7. Evaluation

- ▷ Vier Wechselkursverhältnisse:
  - ▷ Euro / US-Dollar
  - ▷ Euro / Japanischer Yen
  - ▷ Euro / Australischer Dollar
  - ▷ Euro / Norwegische Krone
- ▷ Vier Aktienindizes:
  - ▷ CAC 40 (Französischer Aktienindex)
  - ▷ DAX 30 (Deutscher Aktienindex)
  - ▷ S&P 500 (US-Amerikanischer Aktienindex)
  - ▷ Nikkei 225 (Japanischer Aktienindex)
- ▷ Ein Rohstoff: Silber

Während die fairen Preise der vier Wechselkurse und des Rohstoffs Silber separat für jedes Asset nach in der Kapitel 5 vorgestellten Methode analysiert werden, wird für die Aktienindizes das kointegrationsbasierte Verfahren aus Kapitel 6 verwendet. Insgesamt werden also neun Assets zu einem Portfolio kombiniert.

Tabelle 7.1 zeigt die Parameter der Swing-Strategien für die Erzeugung des Portfolios. Die Anzahl an Long- und Short-Positionen wird nicht nach oben begrenzt, so dass nur noch die Werte  $N$  und  $\Delta\%$  gewählt werden müssen. Lediglich für Silber werden wieder nur Long-Positionen gehandelt.

Diese beiden Parameter werden für die vier Aktienindizes direkt aus der Evaluation in Kapitel 6 übernommen. Für das Wechselkursverhältnis Euro / US-Dollar wird  $N$  auf 5.000 gesetzt und somit gegenüber der Analyse in Kapitel 5 verfünffacht. Für jede Abweichung um  $\Delta\% = 0,1152\%$  wird nun also eine Position im Gegenwert von  $N = 5.000$  Euro gehandelt. Die drei weiteren Fremdwährungen werden mit gleichen Parametern versehen, so dass der höchste Kapitaleinsatz immer bei der Fremdwährung mit der größten Abweichung vom fairen Preis entsteht.

Zuletzt wird bei einem geringfügig höherem Wert  $\Delta\% = 1\%$  der Parameter  $N$  um den Faktor 20 gegenüber Kapitel 5 gesteigert. Insgesamt

## 7.2. Auswertung des Portfolios

sind diese Werte so abgestimmt, dass die Portfolioanteile in Aktienindizes, Devisen und Rohstoffen eine etwa gleiche Größenordnung haben.

**Tabelle 7.1.** Parameter für die Swing-Strategie, die für eine ausgewogene Portfolio-Zusammenstellung verwendet werden

Asset	N	$\Delta\%$
Euro / US-Dollar	5.000	0,1152%
Euro / Japanischer Yen	5.000	0,1152%
Euro / Australischer Dollar	5.000	0,1152%
Euro / Norwegische Krone	5.000	0,1152%
CAC 40	2	0,428%
DAX 30	1	0,372%
S&P 500	10	0,6%
Nikkei 225	142	0,6%
Silber	2.000	1,0%

## 7.2 Auswertung des Portfolios

Für dieses Portfolio werden im Folgenden Ergebnisse von Backtests und einer Monte-Carlo-Simulation analysiert.

### 7.2.1 Backtests

Tabelle 7.2 zeigt die Backtest-Ergebnisse für das Portfolio. Wie bei den bisherigen Backtests steigt das durchschnittliche Ergebnis etwa linear an. Im Mittel ergibt sich nach einem Jahr ein Gewinn von 198.252,60 Euro, nach fünf Jahren sind es 967.402,00 Euro.

Das MEK und das durchschnittliche EK haben bei 100%-iger Margin die jeweils höchsten gemessenen Werte. Das ist auf Grund der Portfoliogröße natürlich zu erwarten. Interessant ist jedoch, dass sich beide Werte relativ in vorigen Backtests nie so nah waren – bisher lag zwischen ihnen im ersten Jahr mindestens der Faktor 2. Dass sich das Mittel dem Maximum annähert, spiegelt den gewünschten Effekt der Diversifikation wider. Insgesamt ist der Kapitaleinsatz damit schwankungsärmer, auch

## 7. Evaluation

**Tabelle 7.2.** Backtestergebnisse: Performance und Risiko der Swing-Strategie für ein Portfolio aus neun Assets

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre
∅ Ergebnis	198.252,60	324.588,50	543.709,30	757.133,20	967.402,00
Min. Ergebnis	-243.599,20	-112.210,50	97.262,30	217.944,70	404.243,00
Max. Ergebnis	543.789,00	702.026,00	958.669,00	1.162.345,04	1.342.255,00
∅ Max. Verlust	84.490,10	98.212,60	101.166,80	110.758,70	116.902,20
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	3.580.208,40	3.581.306,92	3.367.514,85	3.342.118,46	3.327.502,00
∅ Rendite	5,54%	9,06%	16,15%	22,65%	29,07%
∅ Rendite (annualisiert)	5,54%	4,43%	6,67%	5,24%	5,24%
<b>∅ EK (100% Margin)</b>	2.689.279,17	2.602.500,19	2.571.615,13	2.543.897,69	2.478.126,98
∅ Rendite	7,37%	12,47%	21,14%	29,76%	39,04%
∅ Rendite (annualisiert)	7,37%	6,05%	6,60%	6,73%	6,81%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	505.256,17	534.373,97	553.992,28	569.165,08	581.290,52
∅ Rendite	39,24%	64,24%	98,14%	133,03%	166,42%
∅ Rendite (annualisiert)	39,24%	28,16%	25,60%	23,55%	21,65%
<b>∅ EK (0% Margin)</b>	15.364,24	9.089,43	8.934,62	5.232,91	4.408,52
∅ Rendite	1.290,35%	3.571,05%	6.085,42%	14.468,68%	21.943,92%
∅ Rendite (annualisiert)	1.290,35%	505,89%	295,48%	247,42%	194,21%
∅ Volatilität	45.227,76	75.256,39	108.574,28	122.364,73	149.527,72
Sharpe-Ratio	4,3834	4,3131	5,0077	6,1875	6,4697

die jeweiligen Renditen liegen näher zusammen. Annualisiert liegt ihr Wert für das MEK bei etwa 5%, für das durchschnittliche EK sind es etwa 7%.

Ebenso zeigt sich, dass der durchschnittliche maximale Verlust im Verhältnis zum Ergebnis geringer ausfällt als in vorigen Backtests. So gibt es in einem Jahr im Schnitt einen Zeitpunkt mit einem Verlust von 84.490,10 Euro, bevor der Gewinn von 198.252,60 Euro erreicht wird.

Bei 0%-iger Margin liegt die Rendite bzgl. des MEKS im ersten Jahr bei 39,24%. Lediglich Silber wies mit 36,18% einen ähnlichen hohen Wert im ersten Jahr auf, erreichte für das durchschnittlich eingesetzte Kapital (∅ EK) allerdings nur 583,44% statt 1.290,35%. Zur Erinnerung: Das durchschnittlich eingesetzte Kapital spiegelt die temporären Verluste wider. Beginnt ein Backtest direkt in der Gewinnzone, ist der Wert daher nahe 0. Eine höhere Rendite zeigt also, dass temporäre Verluste seltener auftreten und ist somit ebenso ein Indiz für eine gleichmäßige Vermögensentwicklung.

Diese zeigt sich zuletzt auch durch die geringe Volatilität und das hohe Sharpe-Ratio, welches von 4,3834 bis 6,4697 höhere Werte als bei jeder untersuchten Einzelinvestition erzielt.

## 7.2.2 Monte-Carlo-Simulation

Tabelle 7.3 zeigt abschließend die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation für das Portfolio aus den neun in Kapitel 7.2 vorgestellten Assets für Zeiträume bis zu 20 Jahren. Insgesamt decken sich die Erkenntnisse mit den Beobachtungen der Backtests, wenn auch mit Ausnahmen.

So fügen sich durchschnittliche Ergebnisse schlüssig in das von den Backtests gezeigte Bild ein. Minimale Ergebnisse mit einem Verlust bis zu 1.189.737,29 Euro mahnen jedoch an, dass Gewinne selbst bei bestehendem Mean Reversion-Effekt Jahre auf sich warten lassen können. Erst im Fall von 20 Jahren ergibt sich auch im schlechtesten Fall ein Gewinn von 542.466,40 Euro.

Wie schon bei vorigen Monte-Carlo-Simulationen zeigt sich, dass die annualisierte Rendite bzgl. des MEKs stetig sinkt, da das nötige Kapital mit jedem weiteren Jahr steigt. Dennoch unterschreitet die jährliche Rendite selbst bei 100%-iger Margin nach 20 Jahren nicht 3,34%. Im Falle einer 0%-igen Margin ergeben sich hier sogar 11,85%.

Die Rendite bzgl. des durchschnittlich eingesetzten Kapitals pendelt sich bei 100%-iger Margin annualisiert bei etwa 7% ein. Die im Vergleich zu den Backtests merklich schlechteren Werte im Fall der 0%-igen Margin zeigen, dass temporäre Verluste in Simulationen durchschnittlich höher ausfallen als mit den Realdaten von 2008 bis 2018.

Die Monte-Carlo-Simulation bestätigt die hohen, in den Backtests gemessenen Sharpe-Ratios. Auch hier ergibt sich bereits nach einem Jahr ein durchschnittlicher Wert von 4,1921, der für längere Zeiträume stetig steigt. So ergibt sich nach 20 Jahren ein durchschnittlicher Gewinn von 3.700.325,64 Euro. Da die Volatilität der Vermögensentwicklung in diesem Zeitrahmen bei 405.737,46 Euro liegt, zeigen sich im Schnitt bemerkenswert kontinuierliche und schwankungsarme Gewinne, die sich in einem Sharpe-Ratio von 9,1200 ausdrücken.

**Tabelle 7.3.** Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation für ein Portfolio aus neun Assets

Intervall	1 Jahr	2 Jahre	3 Jahre	4 Jahre	5 Jahre	10 Jahre	20 Jahre
Ø Ergebnis	160.622,30	314.498,77	491.126,54	644.104,25	828.833,04	1.810.255,45	3.700.325,64
Min. Ergebnis	-556.745,14	-853.213,98	-1.189.737,29	-1.069.435,94	-1.004.993,37	-218.093,33	542.466,40
Max. Ergebnis	380.041,95	642.976,19	912.535,23	1.220.786,30	1.521.774,98	2.827.543,30	5.493.514,00
Ø Max. Verlust	112.415,76	128.911,26	135.242,29	138.894,45	144.543,70	150.001,42	170.022,18
<b>MEK 95% (100% Margin)</b>	<b>3.401.233,00</b>	<b>3.565.775,10</b>	<b>3.608.100,22</b>	<b>3.712.101,23</b>	<b>3.822.120,66</b>	<b>3.904.411,10</b>	<b>4.138.549,20</b>
Ø Rendite	4,72%	8,85%	13,61%	17,35%	21,69%	46,36%	94,77%
Ø Rendite (annualisiert)	4,72%	4,33%	4,35%	4,08%	4,00%	3,88%	3,34%
Ø EK (100% Margin)	2.590.148,50	2.464.423,44	2.300.015,20	2.186.120,95	1.843.422,81	1.616.105,64	1.142.532,53
Ø Rendite	6,20%	12,80%	21,35%	29,46%	44,96%	112,01%	323,87%
Ø Rendite (annualisiert)	6,20%	6,21%	6,66%	6,67%	7,71%	7,80%	7,49%
<b>MEK 95% (0% Margin)</b>	<b>291.512,29</b>	<b>325.230,03</b>	<b>353.004,12</b>	<b>389.965,10</b>	<b>401.292,86</b>	<b>425.911,85</b>	<b>441.124,85</b>
Ø Rendite	55,10%	97,01%	139,13%	165,17%	206,54%	425,03%	838,84%
Ø Rendite (annualisiert)	55,10%	40,36%	33,72%	27,61%	25,11%	18,04%	11,85%
Ø EK (0% Margin)	36.416,78	32.108,96	29.124,22	24.789,55	18.000,24	10.146,51	6.655,27
Ø Rendite	441,07%	982,58%	1.787,32%	2.598,29%	4.604,57%	17.841,16%	55.599,93%
Ø Rendite (annualisiert)	441,07%	229,03%	161,41%	127,91%	116,02%	68,03%	37,18%
Ø Volatilität	38,315,47	69,341,91	102,309,50	127,452,02	148,477,84	233,141,15	405,737,46
Sharpe-Ratio	4,1921	4,5499	4,8004	5,0537	5,5822	7,7643	9,1200

7. Evaluation



# Fazit und Ausblick

Vor dem Hintergrund der gestiegenen Finanzmarktvolatilität wurde einleitend die Frage gestellt, ob wachsende Schwankungen vollständig auf gestiegene Marktrisiken oder auch auf Fehlbewertungen zurückzuführen sind.

Für die Beantwortung dieser Frage wurde die Swing-Strategie als marktneutrales Martingalsystem eingeführt, welches allein durch die Ausnutzung von Über- und Unterbepreisungen erfolgreich ist. Um Fehlbewertungen quantifizieren zu können, wurde das als Mean Reversion-Effekt bekannte Phänomen so formalisiert, dass für jedes untersuchte Asset ein variabler fairer Preis errechnet werden konnte. Wie Monte-Carlo-Simulationen in Kapitel 3 zeigen, ist der Einsatz der Swing-Strategie ohne zugrundeliegenden Mean Reversion-Effekt nicht nachhaltig erfolgreich. Trotz dieser Einschränkung zeigen Backtests auf Realmarktdaten, dass sich in der vergangenen Dekade in verschiedenen Bereichen des Finanzmarkts stetige Gewinne ergeben, obwohl das Handelssystem eben nicht von allgemein steigenden Kursen profitiert.

Dieser Umstand kann als empirischer Beweis für den Mean Reversion-Effekt und somit als Antwort gedeutet werden, dass die gestiegene Volatilität auch auf Fehlbewertungen zurückzuführen ist.

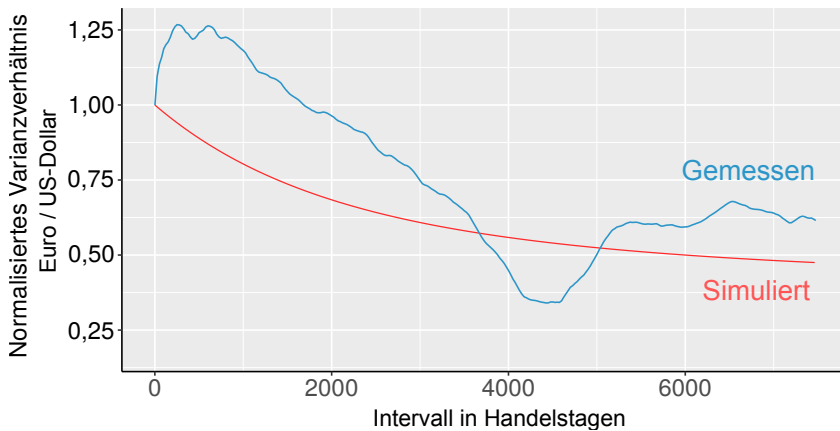
Natürlich können die Ergebnisse der Analyse aus mehreren Gründen nicht als abschließender Beweis für Marktineffizienz verstanden werden. Zum einen zeigte die theoretische Auswertung in Kapitel 3, dass ein erfolgreicher Ausgang selbst für Zufallsprozesse das wahrscheinlichste Ereignis sind. Verluste sind wesentlich seltener, fallen aber umso höher aus. Zwar wurde diesem Problem mit einem sehr langen Evaluationszeitraum von einer Dekade entgegnet. Dennoch kann nicht ausgeschlossen werden, dass sich stetige Gewinne über die ausgewerteten 10 Jahre rein zufällig

## 8. Fazit und Ausblick

ergeben. Zum anderen wird sich der Mean Reversion-Effekt, selbst wenn er im vergangenen Jahrzehnt messbar ist, mit steigender wissenschaftlicher Auseinandersetzung und finanzwirtschaftlicher Ausnutzung reduzieren. Diese Probleme sind allerdings nicht individuell, sondern ergeben sich generell bei einer erfolgreichen Anlagestrategie.

Unter der in diesem Forschungsfeld allgemein getroffenen Annahme, dass sich vergangene Muster auf zukünftige Ereignisse übertragen lassen, stellt sich die Swing-Strategie als vielversprechendes Handelssystem dar. Dies zeigt sich nicht nur für einzelne Finanzprodukte, in dieser Arbeit wurden hierfür Devisen und Rohstoffe untersucht. Auch wurden in einem multivariaten Ansatz faire Preise für kointegrierte Assets berechnet, die den gewünschten Mean Reversion-Effekt beobachten ließen. Individuelle Ausschläge in Future-Märkten konnten in diesem Zusammenhang zudem genutzt werden, um Handelskosten deutlich zu reduzieren. Das zuletzt untersuchte Portfolio erzielte selbst bei 100%-iger Margin in Backtests und Simulationen annualisierte Renditen von vier bis fünf Prozent des MEK, die sich bei 0%-iger Margin vervielfachten – im ersten Jahr ergaben sich Renditen von über 30%. Gerade für hebelbare Finanzprodukte zeichnet sich daher ein attraktives Bild.

Es lassen sich ausblickend noch einige vielversprechende Forschungsfelder nennen, deren Untersuchung voraussichtlich zu einer weiteren Verbesserung der Performance des Handelssystems beitragen. So haben Finanzmarktzeitreihen komplexe Eigenschaften, die sich natürlich nicht in ihrer Gänze in einem stochastischen Prozess darstellen lassen. Ein datengenerierender Prozess kann Realmarktdaten also nie perfekt imitieren. Zwar haben sich geometrische Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse zweifelsohne als brauchbares Modell für Monte-Carlo-Simulationen erwiesen, aber selbst die hier vorgestellte erweiterte Darstellung bringt noch Ungenauigkeiten mit sich. Betrachtet man die in Kapitel 4.4 vorgestellten Varianzverhältnisse in Abhängigkeit von der Schrittbreite, so ergibt sich für einen konstanten fairen Preis ein streng monoton fallender Zusammenhang. Je mehr Datenpunkte die untersuchte Zeitreihe umfasst, desto deutlicher ist der Mean Reversion-Effekt also erkennbar. Die in Kapitel 5.2.1 aus Realmarktdaten berechneten Varianzverhältnisse für Euro / US-Dollar zeigen jedoch ein deutlich diffuseres Bild. Diese Diskrepanz ist in Abbildung 8.1 noch einmal genau dargestellt.



**Abbildung 8.1.** Euro / US-Dollar: Varianzverhältnisse von 1980 bis 2018 (real und simuliert)

Während Trends sich in Realmarktdaten in den ersten Jahren sogar tendentiell verstärken (das normalisierte Varianzverhältnis steigt auf etwa 1,25 an), fallen die Varianzverhältnisse erst nach etwa drei Jahren langfristig. Das erweiterte Ornstein-Uhlenbeck-Modell ist nicht in der Lage, diese Strukturen in simulierten Kursdaten detailliert abzubilden. Zwar führen trotz dieser Unterschiede Backtests und Monte-Carlo-Simulationen zu vergleichbaren Ergebnissen, da die Performance aber in hohem Maße von dieser Eigenschaft abhängt, würde die Aussagekraft der Monte-Carlo-Simulationen zweifelsohne noch weiter wachsen, wenn die dargestellte Differenz über die Wahl eines komplexeren Modells reduziert wird. Genauere Abschätzungen von Performance- und Risikoparametern führten wiederum zu vorhersehbarerem Verhalten in der zukünftigen Anwendung des Systems.

Die gesteigerte Rendite des im Kapitel 7.2 untersuchten Portfolios lässt sich auf eine Annäherung von durchschnittlichem und maximal eingesetzten Kapital zurückführen. Für einen möglichst gleichmäßigen Investitionsgrad müssen Kapitaleinsätze einzelner Swing-Strategien im besten Fall negativ korreliert sein, damit sich Schwankungen gegenseitig ausgleichen. Eine besondere Schwierigkeit liegt allerdings darin, dass sich diese

## 8. Fazit und Ausblick

Einsätze nicht in linearer, sondern quadratischer Abhängigkeit von der Differenz zwischen aktuellem und fairem Preis ändern. Vermögensschwankungen einzelner Swing-Strategien sind damit sehr heteroskedastisch, was einem gegenseitigen Ausgleich entgegenwirkt. Da diese Differenz zusätzlich auch Einfluss auf die Korrelation einzelner Gewinne hat, ist eine langfristige Balance zwischen verschiedenen Swing-Strategien nur eingeschränkt über klassische Portfoliostrategien zu erreichen. Diese erwarten nämlich eine zeitlich unabhängige Korrelation verschiedener Investments. Ein vielversprechender nächster Forschungsschritt liegt daher in der Beschreibung einer Portfoliobildung, die dieser speziellen Problematik trotz und zumindest temporär auftretende Antikorrelationen in der Vermögensentwicklung verschiedener Swing-Strategien für einen gleichmäßigen Aufbau des Gesamtvermögens kombiniert. Die Wahl eines hierfür geeigneten Optimierungsverfahrens und systematische Untersuchungen weiterer Investmentklassen könnten zu noch ausbalancierteren Zusammenstellungen führen, für die sich das durchschnittlich und maximal eingesetzte Kapital noch weiter annähern. Wie schon für das hier ausgewertete Portfolio würde die einhergehende Reduzierung der nötigen Kapitalreserve weitere Renditesteigerungen nach sich ziehen.

# Literatur

- [AAS+16] Ferhat Akbas, Will J Armstrong, Sorin Sorescu und Avanihar Subrahmanyam. „Capital market efficiency and arbitrage efficacy“. In: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 51.02 (2016), S. 387–413.
- [AG11] Emmanuel Anoruo und Luis A Gil-Alana. „Mean reversion and long memory in African stock market prices“. In: *Journal of Economics and Finance* 35.3 (2011), S. 296–308.
- [Ald+97] John Aldrich u. a. „R.A. Fisher and the making of maximum likelihood 1912-1922“. In: *Statistical science* 12.3 (1997), S. 162–176.
- [Bal92] Nauzer J Balsara. *Money management strategies for futures traders*. Bd. 4. John Wiley & Sons, 1992.
- [Bec08] M. Becker. *Simulation von Schluss-, Minimal- und Maximalwerten spezieller Preisprozesse mit Anwendungen in der Optionsbewertung*. Books on Demand, 2008. ISBN: 9783837057737. URL: <https://books.google.pt/books?id=mcqcjq9xZm8C>.
- [BP18] Fred Espen Benth und Anca Pircalabu. „A non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck model for pricing wind power futures“. In: *Applied Mathematical Finance* (2018), S. 1–30.
- [Bro] Deutsche FX Broker. *Deutsche FX Broker Webseite, Zugriff 3. September 2018*. <https://www.deutschefxbroker.de/martingale-trading-system/>.
- [Bro10] Jonathan A. Brogaard. *High Frequency Trading and Volatility*. Northwestern University School of Law. 2010.
- [BS01] Ole E Barndorff-Nielsen und Neil Shephard. „Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics“. In: *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)* 63.2 (2001), S. 167–241.

## Literatur

- [BT77] George EP Box und George C Tiao. „A canonical analysis of multiple time series“. In: *Biometrika* 64.2 (1977), S. 355–365.
- [BV12] John Paul Broussard und Mika Vaihekoski. „Profitability of pairs trading strategy in an illiquid market with multiple share classes“. In: *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money* 22.5 (2012), S. 1188–1201.
- [CD93] K Victor Chow und Karen C Denning. „A simple multiple variance ratio test“. In: *Journal of Econometrics* 58.3 (1993), S. 385–401.
- [CF83] Bradford Cornell und Kenneth R. French. „The pricing of stock index futures“. In: *Journal of Futures Markets* 3.1 (1983), S. 1–14. URL: <http://EconPapers.repec.org/RePEc:wly:jfutmk:v:3:y:1983:i:1:p:1-14>.
- [CK11] Shu-Ling Chen und Hyeongwoo Kim. „Nonlinear mean reversion across national stock markets: evidence from emerging Asian markets“. In: *International Economic Journal* 25.2 (2011), S. 239–250.
- [CL95] Yin-Wong Cheung und Kon S Lai. „PRACTITIONERS CORNER: Lag Order and Critical Values of a Modified Dickey-Fuller Test“. In: *Oxford Bulletin of Economics and Statistics* 57.3 (1995), S. 411–419.
- [CLO95] Raymond Chiang, Peter Liu und John Okunev. „Modelling mean reversion of asset prices towards their fundamental value“. In: *Journal of Banking & Finance* 19.8 (1995), S. 1327–1340.
- [CM13] João Caldeira und Guilherme V Moura. „Selection of a portfolio of pairs based on cointegration: A statistical arbitrage strategy“. In: (2013).
- [CRU93] Albert Corhay, A Tourani Rad und J-P Urbain. „Common stochastic trends in European stock markets“. In: *Economics Letters* 42.4 (1993), S. 385–390.
- [CW11] Mei Choi Chiu und Hoi Ying Wong. „Mean–variance portfolio selection of cointegrated assets“. In: *Journal of Economic Dynamics and Control* 35.8 (2011), S. 1369–1385.

- [dAs11] Alexandre d'Aspremont. „Identifying small mean-reverting portfolios“. In: *Quantitative Finance* 11.3 (2011), S. 351–364.
- [DF10] Binh Do und Robert Faff. „Does simple pairs trading still work?“ In: *Financial Analysts Journal* 66.4 (2010), S. 83–95.
- [DF79] David A Dickey und Wayne A Fuller. „Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root“. In: *Journal of the American statistical association* 74.366a (1979), S. 427–431.
- [DM15] Birk Diedenhofen und Jochen Musch. „cocor: A comprehensive solution for the statistical comparison of correlations“. In: *PloS one* 10.4 (2015), e0121945.
- [Dua94] Jin-Chuan Duan. „Maximum likelihood estimation using price data of the derivative contract“. In: *Mathematical Finance* 4.2 (1994), S. 155–167.
- [Dym13] Gary A Dymski. „The Eurozone Crisis as a Trilemma Forcefield: Fleming, Mundell, and Power in Finance“. In: (2013).
- [EG87] Robert F Engle und Clive WJ Granger. „Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing“. In: *Econometrica: journal of the Econometric Society* (1987), S. 251–276.
- [ERS92] Graham Elliott, Thomas J Rothenberg und James H Stock. *Efficient tests for an autoregressive unit root*. 1992.
- [Fam70] Eugene F Fama. „Efficient capital markets: A review of theory and empirical work“. In: *The journal of Finance* 25.2 (1970), S. 383–417.
- [FF88] Eugene F Fama und Kenneth R French. „Permanent and temporary components of stock prices“. In: *Journal of political Economy* 96.2 (1988), S. 246–273.
- [FHC02] Tien Foo Sing, Kim Hiang Liow und Wei-Jin Chan. „Mean reversion of Singapore property stock prices towards their fundamental values“. In: *Journal of property investment & finance* 20.4 (2002), S. 374–387.

## Literatur

- [Geo15] Hans-Otto Georgii. *Stochastik: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2015.
- [GGR06] Evan Gatev, William N Goetzmann und K Geert Rouwenhorst. „Pairs trading: Performance of a relative-value arbitrage rule“. In: *The Review of Financial Studies* 19.3 (2006), S. 797–827.
- [Gri84] Peter A Griffin. „Different measures of win rate for optimal proportional betting“. In: *Management Science* 30.12 (1984), S. 1540–1547.
- [GS16] Vasco Grossmann und Manfred Schimmler. „Portfolio-based contract selection in commodity futures markets“. In: *Computational Intelligence (SSCI), 2016 IEEE Symposium Series on*. IEEE. 2016.
- [GS17] Vasco Grossmann und Manfred Schimmler. „GPGPU-based Identification of Cointegrated Portfolios“. In: *Computational Intelligence (SSCI), 2017 IEEE Symposium Series on*. IEEE. 2017.
- [Has07] Uwe Hassler. *Stochastische Integration und Zeitreihenmodellierung*. Frankfurt, Deutschland: Springer, 2007.
- [Heu07] Michael Heun. *Finanzmarktsimulation mit Multiagentensystemen*. Deutscher Universitäts-Verlag, 2007. ISBN: 978-3-8350-0937-0.
- [Int16] Bank for International Settlements. „Forex turnover in April 2016“. In: (2016).
- [Jeg91] Narasimhan Jegadeesh. „Seasonality in stock price mean reversion: Evidence from the US and the UK“. In: *The Journal of Finance* 46.4 (1991), S. 1427–1444.
- [JYC09] Monique Jeanblanc, Marc Yor und Marc Chesney. *Mathematical methods for financial markets*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [KM15] N.B. Kumar und S. Mohapatra. *The Use of Technical and Fundamental Analysis in the Stock Market in Emerging and Developed Economies*. Emerald Group Publishing Limited, 2015. ISBN: 9781785604041. URL: <https://books.google.de/books?id=4WSFCgAAQBAJ>.



- [Kra17] Christopher Krauss. „Statistical arbitrage pairs trading strategies: Review and outlook“. In: *Journal of Economic Surveys* 31.2 (2017), S. 513–545.
- [KS12] Ioannis Karatzas und Steven Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*. Bd. 113. Springer Science & Business Media, 2012.
- [KV13] Ladislav Kristoufek und Miloslav Vosvrda. „Measuring capital market efficiency: Global and local correlations structure“. In: *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 392.1 (2013), S. 184–193.
- [Lew09] Alan L Lewis. *Option Valuation Under Stochastic Volatility II*. Finance Press, Newport Beach, CA, 2009.
- [LL15] Tim Leung und Xin Li. „Optimal mean reversion trading with transaction costs and stop-loss exit“. In: *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 18.03 (2015), S. 1550020.
- [LL16] Tim Leung und Xin Li. *Optimal mean reversion trading: Mathematical analysis and practical applications*. World Scientific, 2016.
- [LM88] Andrew W Lo und A Craig MacKinlay. „Stock market prices do not follow random walks: Evidence from a simple specification test“. In: *Review of financial studies* 1.1 (1988), S. 41–66.
- [Lus12] Harald Luschgy. *Martingale in diskreter Zeit: Theorie und Anwendungen*. Springer-Verlag, 2012.
- [Mac] Macrotrends. *Macrotrends Webseite*, Zugriff 27. August 2018. <https://www.macrotrends.net/1470/historical-silver-prices-100-year-chart>.
- [Mag06] Aktham Maghyereh. „Oil price shocks and emerging stock markets: A generalized VAR approach“. In: *Global stock markets and portfolio management*. Springer, 2006, S. 55–68.
- [McQ92] Grant McQueen. „Long-horizon mean-reverting stock prices revisited“. In: *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 27.1 (1992), S. 1–18.

## Literatur

- [Mof16] Steven D Moffitt. „Gambling for Traders, Part IV The Fundamental Theorems of Active Management“. In: (2016).
- [MS96] Hans-Peter Martin und Harald Schumann. *Die Globalisierungsfalle: Der Angriff auf Demokratie und Wohlstand*. 1996.
- [Muk11] Sandip Mukherji. „Are stock returns still mean-reverting?“ In: *Review of Financial Economics* 20.1 (2011), S. 22–27.
- [Mur99] J.J. Murphy. *Technical Analysis of the Financial Markets: A Comprehensive Guide to Trading Methods and Applications*. Penguin Publishing Group, 1999. ISBN: 9781101659199. URL: <https://books.google.de/books?id=teitAAAAQBAJ>.
- [Ork91] Mike Orkin. *Can you win?: The real odds for casino gambling, sports betting, and lotteries*. WH Freeman, 1991.
- [PP88] Peter CB Phillips und Pierre Perron. „Testing for a unit root in time series regression“. In: *Biometrika* 75.2 (1988), S. 335–346.
- [PS88] James Poterba und Lawrence H Summers. „Mean Reversion in Stock Returns: Evidence and Implications“. In: *Journal of Financial Economics* 22 (1988), S. 27060.
- [PT92] Ser-Huang Poon und Stephen J Taylor. „Stock returns and volatility: an empirical study of the UK stock market“. In: *Journal of banking & finance* 16.1 (1992), S. 37–59.
- [Ree10] David Reed. „Roulette simulations and Martingale betting: nifty assignment“. In: *Journal of Computing Sciences in Colleges* 25.5 (2010), S. 335–336.
- [Rup06] David Rupert. *Statistics and Finance: An Introduction*. 2006.
- [Sam+65] Paul A Samuelson u. a. *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*. 1965.
- [Sch90] G. William Schwert. „Stock Market Volatility“. In: *Financial Analysts Journal* (1990).
- [SW12] Henner Schierenbeck und Claudia B Wöhle. *Grundzüge der Betriebswirtschaftslehre*. Walter de Gruyter Verlag, 2012. ISBN: 3486276034.

- [SZ99] Rainer Schöbel und Jianwei Zhu. „Stochastic volatility with an Ornstein–Uhlenbeck process: an extension“. In: *Review of Finance* 3.1 (1999), S. 23–46.
- [Tru70] Alan J Truelove. „Betting systems in favorable games“. In: *The Annals of Mathematical Statistics* (1970), S. 551–566.
- [UO30] G. E. Uhlenbeck und L. S. Ornstein. „On the Theory of the Brownian Motion“. In: *Phys. Rev.* 36 (5 Sep. 1930), S. 823–841. DOI: 10.1103/PhysRev.36.823. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.36.823>.
- [Vas77] Oldrich Vasicek. „An equilibrium characterization of the term structure“. In: *Journal of Financial Economics* 5.2 (Nov. 1977), S. 177–188. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6VBX-45KNKK3-D/1/4fc8942564fb9b6b03ef7d636350dafc>.
- [Vid04] Ganapathy Vidyamurthy. *Pairs Trading: quantitative methods and analysis*. Bd. 217. John Wiley & Sons, 2004.
- [ZZ08] Hanqin Zhang und Qing Zhang. „Trading a mean-reverting asset: Buy low and sell high“. In: *Automatica* 44.6 (2008), S. 1511–1518.