

Harmonische Mannigfaltigkeiten und exponentielle Polynome

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von
Patrick Panck

Kiel, 2022

Erster Gutachter:	Prof. Dr. Jens Heber
Zweiter Gutachter:	Prof. Dr. Hartmut Weiß
Tag der mündlichen Prüfung:	30.09.2022

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung einer gewissen Funktion F in einer vollständigen, harmonischen Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte der Dimension $(n + 1)$. Unter der Annahme, dass das Integral $\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$ existiert, ist die Abbildung F gegeben durch

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \mapsto \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau,$$

wobei U den instabilen Jacobi-Tensor längs einer festen Geodätischen c bezeichne. Die Abbildung F besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $F(t)$ symmetrisch und positiv definit.
- (ii) Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert $F(t)$ monoton gegen 0.
- (iii) Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ für ein $h > 0$.
- (iv) Es gilt $f(u) = \frac{\det(F(s+u) - F(s))}{\det(F(s))}$ für eine \mathcal{C}^∞ -Funktion f und alle $s, u \in \mathbb{R}$.

Aus diesen Eigenschaften folgt, dass f ein exponentielles Polynom ist. Wir machen die natürlich erscheinende (und für $n = 2$ auch bewiesene) Annahme, dass auch F ein (Matrix-wertiges) exponentielles Polynom ist, was unter anderem in symmetrischen Räumen negativer Krümmung – einer wichtigen Beispielklasse harmonischer Räume – der Fall ist. Dort lässt sich F sogar stets in der speziellen Gestalt

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und alle $t \in \mathbb{R}$ schreiben. Ist andererseits eine Abbildung in dieser Form gegeben, so erfüllt diese Abbildung bei gewissen Einschränkungen an W und $F(0)$ die Bedingungen (i) – (iv).

Wir befassen uns mit der Fragestellung, ob sich die Abbildung F beziehungsweise Abbildungen, die die Eigenschaften (i) – (iv) tragen, stets in obiger Form schreiben lassen. Insbesondere wären dann die Eigenwerte des Jacobi-Operators konstant längs c .

Im Allgemeinen verneinen wir diese Frage mittels der von E. Damek und F. Ricci konstruierten nicht symmetrischen, harmonischen Mannigfaltigkeiten. Im Gegensatz dazu bejahen wir die Frage im Spezialfall $n = 2$. In höheren Dimensionen geben wir verschiedene Bedingungen an, unter denen sich Abbildungen, die die Eigenschaften (i) – (iv) mit F teilen, in obiger Form schreiben lassen – insbesondere für den Fall, dass die zugrundeliegende Geodätische geschlossen ist. Außerdem beschreiben wir vereinfachende Modifikationen von F , welche die Eigenschaften (i) – (iv) erhalten und damit als Ansatz für ein Klassifikationsprogramm dienen.

Abstract

The subject of this thesis is the study of a certain function F in a complete harmonic manifold without conjugate points of dimension $(n + 1)$. Assuming that the integral $\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$ exists, the mapping F is given by

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \mapsto \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau,$$

where U denotes the unstable Jacobi tensor along a fixed geodesic c . The function F has the following properties:

- (i) $F(t)$ is symmetric and positive definite for all $t \in \mathbb{R}$.
- (ii) $F(t)$ converges monotonically to 0 for $t \rightarrow \infty$.
- (iii) One has $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ for some $h > 0$ and all $t \in \mathbb{R}$.
- (iv) One has $f(u) = \frac{\det(F(s+u) - F(s))}{\det(F(s))}$ for some \mathcal{C}^∞ -function f and all $s, u \in \mathbb{R}$.

It follows from these properties that f is an exponential polynomial. We make the natural-seeming (and for $n = 2$ also proven) assumption that F is also a (matrix-valued) exponential polynomial, which is the case for instance in symmetric spaces of negative curvature – an important example class of harmonic spaces. There F can always be expressed in the special form

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

for some $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ and all $t \in \mathbb{R}$. On the other hand, if a mapping is given in this form, then, subject to certain restrictions on W and $F(0)$, this mapping satisfies conditions (i) – (iv).

We are concerned with the question of whether the mapping F or mappings which have the properties (i) – (iv) can always be written in the above form. In particular, the eigenvalues of the Jacobi operator would then be constant along c .

In general, we answer the question in the negative by means of the non-symmetric harmonic manifolds constructed by E. Damek and F. Ricci. In contrast, we answer the question in the affirmative in the special case $n = 2$. In higher dimensions, we give various conditions under which mappings sharing properties (i) – (iv) with F can be written in the above form – in particular for the case where the underlying geodesic is closed. Furthermore, we describe simplifying modifications of F which preserve properties (i) – (iv) and thus serve as a starting point for a classification program.

Danksagung

Zuallererst gilt mein Dank Prof. Dr. Jens Heber für die exzellente Betreuung dieser Arbeit. Mit hilfreichen Anregungen, lehrreichen Diskussionen und konstruktiver Kritik stand er mir stets unterstützend zur Seite.

Weiter möchte ich mich bei Prof. Dr. Hartmut Weiß und allen aktuellen und ehemaligen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Geometrie für die angenehme Arbeitsatmosphäre, die aufschlussreichen Gespräche und die interessanten Oberseminar-Vorträge bedanken.

Zuletzt danke ich Larissa, meinen Freunden und meiner Familie für die bedingungslose Unterstützung und die Geduld.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	xi
1 Grundlagen	1
1.1 Notationen und Konventionen	1
1.2 Jacobi-Vektorfelder, konjugierte Punkte und Fokalfpunkte	2
1.3 Jacobi-Tensoren	2
1.4 Harmonische Mannigfaltigkeiten	5
1.5 Exponentielle Polynome	8
1.6 Symmetrische Multilinearform Q_n	9
2 Grundlegendes Setting	13
2.1 Definition und Eigenschaften von F	13
2.2 Symmetrische Räume vom Rang 1	19
3 Folgerungen an den Krümmungstensor	23
4 Damek-Ricci-Räume	29
4.1 Definition und wichtige Eigenschaften	29
4.2 F ist nicht immer in Standardform	30
4.3 Allgemeine Jacobi-Vektorfelder	31
4.4 Instabile Jacobi-Vektorfelder	36
5 Klassifikation in Dimension 2	43
5.1 F ist ein exponentielles Polynom	44
5.2 Berechnung der wirkenden Matrizen	46
6 Klassifikationsprogramm	53
6.1 Lösungen unseres Problems als exponentielle Polynome	53
6.2 Vom allgemeinen zum diagonalisierbaren Fall	55
6.3 Vom komplexen zum reellen Fall	59
6.4 Exponentielle Polynome in Standardform	65
7 Geschlossene Geodätische	77
7.1 Koeffizientenmatrizen nach einer Periode	78
7.2 Vollständige multiplikative Jordan-Zerlegung und Matrix-Logarithmus	85

7.3	Kronecker-Produkt und Kronecker-Summe	88
7.4	Konstruktion von W	90
7.5	Klassifikationsprogramm längs geschlossener Geodätischer	97

Literaturverzeichnis	101
-----------------------------	------------

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist thematisch der Theorie der harmonischen Mannigfaltigkeiten zuzuordnen.

Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt harmonisch, wenn für alle $p \in M$ die Volumendichte, in Normalkoordinaten gegeben durch $\omega_p(q) := \sqrt{\det(g_{ij}(q))}$, eine radiale Funktion ist.

Harmonische Mannigfaltigkeiten sind Einsteinsch und besitzen daher in Dimension 2 und 3 konstante Schnittkrümmung.

Zudem ist bekannt, dass ein lokal symmetrischer Raum genau dann harmonisch ist, wenn er flach oder sein Rang gleich 1 ist [Esc80, Led57], da diese Räume lokal 2-Punkthomogen sind.

Dies führt zur Vermutung von A. Lichnerowicz aus dem Jahr 1944 [Lic44]; sie besagt, dass alle harmonischen Mannigfaltigkeiten entweder flach oder lokal symmetrische Räume vom Rang 1 sind. A. Lichnerowicz formulierte diese Vermutung zunächst für die Dimension 4 und bewies sie für diesen Fall auch. Für höhere Dimensionen blieb die Vermutung hingegen zunächst offen.

Im Laufe der Jahre wurden im Hinblick auf diese Fragestellung verschiedenste Ergebnisse erzielt, welche im Folgenden überblicksartig dargestellt werden.

Im Jahr 1990 bewies Z. I. Szabo die Vermutung für kompakte, harmonische Mannigfaltigkeiten mit endlicher Fundamentalgruppe [Sza90]. Zudem bestätigte G. Knieper in [Kni12] die Vermutung für kompakte, harmonische Mannigfaltigkeiten mit Gromov-hyperbolischer Fundamentalgruppe.

Im Gegensatz dazu wurde die Vermutung im nicht kompakten Fall im Jahr 1992 von E. Damek und F. Ricci widerlegt. Sie konstruierten, beginnend ab Dimension 7, eindimensionale Erweiterungen von verallgemeinerten Heisenberg-Gruppen, die nicht symmetrisch aber harmonisch sind [DR92]. Die so konstruierten Räume besitzen aber keinen kompakten Quotienten.

In Dimension 5 bestätigte Y. Nikolayevksy die Vermutung [Nik05b], wohingegen in Dimension 6 die Frage weiterhin offen ist.

Für nicht kompakte, harmonische Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung, die einen kompakten Quotienten besitzen, verifizierten G. Besson, C. Courtois und S. Gallot [BCG95] unter Verwendung der Arbeiten von Y. Benoist, P. Foulon und F. Labourie [BFL92] sowie P. Foulon und F. Labourie [FL92] die Vermutung. Basierend auf diesen Arbeiten bewies G. Knieper die Lichnerowicz-Vermutung für einfach zusammenhängende, nicht flache, nicht kompakte, harmonische Mannigfaltigkeiten vom Rang 1 (s. Kapitel

2.1), die einen kompakten Quotienten besitzen. Darunter fallen Mannigfaltigkeiten ohne Fokalfunkte, Gromov-hyperbolische Mannigfaltigkeiten und solche mit beschränkter Asymptote und ungerader Dimension [Kni12].

Im Jahr 2006 bewies J. Heber, dass homogene, harmonische Mannigfaltigkeiten entweder flach oder lokal symmetrisch vom Rang 1 sind oder zu der von E. Damek und F. Ricci konstruierten Beispiellklasse von nicht symmetrischen, harmonischen Mannigfaltigkeiten gehören [Heb06].

Im Allgemeinen ist die Lichnerowicz-Vermutung für harmonische Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte weiterhin offen.

Eine detailliertere Zusammenfassung zum aktuellen Forschungsstand zur Lichnerowicz-Vermutung und zu harmonischen Mannigfaltigkeit lässt sich in den Übersichtsarbeiten von G. Knieper [Kni16] und G. Knieper und N. Peyerimhoff [KP13] sowie den darin enthaltenden Referenzen finden.

Einige der oben angegebenen Resultate wurden in ähnlicher Weise auch für asymptotisch harmonische Mannigfaltigkeiten bewiesen. Eine Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte heißt dabei asymptotisch harmonisch, wenn die mittlere Krümmung der Horosphären konstant ist. Harmonische Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte sind damit automatisch asymptotisch harmonisch. Für weitere Informationen verweisen wir dabei auf die Arbeiten von J. Heber [Heb06], A. M. Zimmer [Zim12], G. Knieper [Kni16] sowie G. Knieper und N. Peyerimhoff [KP15].

In dieser Arbeit befassen wir uns unter der Annahme, dass das folgende Integral $\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$ existiert, mit der Abbildung

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad t \mapsto F(t) = \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau,$$

wobei U den instabilen Jacobi-Tensor längs einer Geodätischen c in einer vollständigen, harmonischen Mannigfaltigkeit M ohne konjugierte Punkte der Dimension $(n + 1)$ bezeichne. Die Existenz des uneigentlichen Integrals ist äquivalent dazu, dass c eine Geodätische vom Rang 1 ist (s. Kapitel 2.1). Falls M zusätzlich einen kompakten Quotienten besitzt, so ist M Rang 1-symmetrisch ([Kni12], s.o.). Wir behandeln den nicht kompakten Fall beziehungsweise in Kapitel 7 einzelne geschlossene Geodätische in M .

Wir bemerken in Kapitel 2.1, dass F aufgrund der Harmonizität die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $F(t)$ symmetrisch und positiv definit.
- (ii) Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert $F(t)$ monoton gegen 0.
- (iii) Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ für ein $h > 0$.

(iv) Es existiert eine C^∞ -Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(u) = \frac{\det(F(s+u) - F(s))}{\det(F(s))}$$

für alle $s, u \in \mathbb{R}$.

Abbildungen, die diese Eigenschaften tragen, bezeichnen wir in dieser Arbeit auch als Lösungen unseres Problems. In Kapitel 2.2 beobachten wir, dass sich die Abbildung F im Fall symmetrischer Räume negativer Krümmung schreiben lässt als

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Die Abbildung F ist dann Bahn einer Ein-Parameter-Untergruppe von Isometrien im symmetrischen Raum $\mathcal{P}(n) = \text{GL}^+(n, \mathbb{R})/\text{SO}(n)$ symmetrischer, positiv definiten Matrizen. Wir sagen, dass Abbildungen, die sich auf diese Weise schreiben lassen, in Standardform sind.

Bei gewissen Einschränkungen an $F(0)$ und W beobachtet man leicht, dass Abbildungen, die sich in Standardform schreiben lassen, stets Lösungen unseres Problems sind. Die Leitfrage dieser Arbeit lautet, unter welchen Bedingungen sich die Abbildung F beziehungsweise Lösungen unseres Problems auch in Standardform schreiben lassen.

Zunächst zeigen wir in Kapitel 3, welche Folgerungen sich aus einer solchen Darstellung unserer Abbildung F für den Jacobi-Operator und den stabilen und instabilen Jacobi-Tensor längs der Geodätischen c ergeben. Insbesondere zeigt sich, dass die Eigenwerte des Jacobi-Operators konstant längs c wären.

Daraus folgend zeigen wir in Kapitel 4 nach einer kurzen Einführung in die Theorie, dass es in den von E. Damek und F. Ricci konstruierten nicht symmetrischen, harmonischen Mannigfaltigkeiten Geodätische c gibt, längs derer sich das zugehörige F nicht in Standardform schreiben lässt – und verneinen damit die Leitfrage im allgemeinen Fall. Zudem berechnen wir allgemeine Jacobi-Vektorfelder in einer Teilklasse dieser Räume und geben ein Kriterium für die Instabilität eines Jacobi-Vektorfeldes an.

Im Anschluss daran lösen wir uns vom geometrischen Hintergrund des Problems und betrachten allgemeine Abbildungen, die Lösungen unseres Problems gemäß der obigen Definition sind.

Inspiziert von Y. Nikolayevskys Beweis, dass die Volumendichte einer harmonischen Mannigfaltigkeit ein exponentielles Polynom ist [Nik05b, Beweis von Theorem 2], begründen wir in Kapitel 6.1 die Annahme, dass sich Lösungen unseres Problems als reelle Matrixwertige exponentielle Polynome schreiben lassen, und beweisen diese im Spezialfall $n = 2$ (s. Kapitel 5.1). In diesem Spezialfall führt diese Beobachtung dazu, dass sich Lösungen unseres Problems stets in Standardform schreiben lassen.

In höheren Dimensionen ist diese Beobachtung Ausgangspunkt für eine Art Klassifikationsprogramm. In den Kapiteln 6.2 und 6.3 zeigen wir, dass sich allgemeine reelle exponentielle Polynome, die Lösungen unseres Problems sind, zu exponentiellen Polyno-

men deutlich einfacherer Gestalt vereinfachen lassen – ohne dabei die Eigenschaft, eine Lösung zu sein, zu verlieren. Im Anschluss geben wir Bedingungen an, unter welchen sich diese einfacheren exponentiellen Polynome in Standardform schreiben lassen.

Abschließend untersuchen wir, wie sich unsere ursprüngliche Abbildung F längs einer geschlossenen Geodätischen der Periode $t_0 > 0$ verhält. Wir beobachten, dass ein $E \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ existiert mit

$$F(t + t_0) = E \cdot F(t) \cdot E^T$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Unter Zuhilfenahme des mittels der vollständigen multiplikativen Jordan-Zerlegung konstruierten Matrix-Logarithmus (s. Kapitel 7.2) und unter Verwendung des Kronecker-Produkts (s. Kapitel 7.3) zeigen wir, dass sich reelle exponentielle Polynome, die die obige Periodizitätseigenschaft erfüllen, bei gewissen Einschränkungen der Frequenzen des exponentiellen Polynoms beziehungsweise der Eigenwerte von E stets in Standardform schreiben lassen. Auch ohne solche Einschränkungen folgt, dass die in den Kapiteln 6.2 und 6.3 konstruierten, vereinfachten Lösungen längs geschlossener Geodätischer stets von Standardform sind (s. Kapitel 7.5).

Bevor wir mit der eigentlichen Bearbeitung der skizzierten Fragestellung beginnen, wird im folgenden Kapitel zunächst eine kurze Zusammenfassung der zum Verständnis der Arbeit benötigten mathematischen Grundlagen und Notationen gegeben. Insbesondere präzisieren wir in Kapitel 1.4 den Begriff der harmonischen Mannigfaltigkeit und erläutern in Kapitel 1.5, was wir unter einem reellen (Matrix-wertigen) exponentiellen Polynom verstehen.

1 Grundlagen

1.1 Notationen und Konventionen

Wir vereinbaren folgende Notationen und Konventionen:

Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $(n + 1) \in \mathbb{N}$ mit Riemannscher Metrik g , wobei wir für die Metrik oft $\langle \cdot, \cdot \rangle$ schreiben. Der Levi-Civita-Zusammenhang wird mit ∇ bezeichnet. Die kovariante Ableitung längs einer Kurve bezeichnen wir mit $\frac{D}{dt}$, wobei wir für ein glattes Vektorfeld Y längs einer Kurve oft $Y'(t)$ anstatt $\frac{D}{dt}Y(t)$ schreiben.

Weiter sei T_pM der Tangentialraum in $p \in M$ und TM das Tangentialbündel in M . Elemente aus TM werden mit (p, v) benannt, wobei $p \in M$ und $v \in T_pM$ ist. Weiter bezeichne SM das Einheitstangentialbündel von M mit Fasern S_pM , $p \in M$, und für alle $(p, v) \in TM$ sei c_v die eindeutige maximale Geodätische mit $c_v(0) = p$ und $c'_v(0) = v$. Ist $(p, v) \in TM$, so schreiben wir den Fußpunkt p oft nicht mit, sondern schreiben nur v anstatt (p, v) .

Für eine glatte Kurve $c: I \rightarrow M$ in M sei Nc das Normalenbündel von c , gegeben durch die disjunkte Vereinigung von

$$Nc(t) := \left\{ w \in T_{c(t)}M \mid \langle w, c'(t) \rangle = 0 \right\},$$

also

$$Nc := \bigcup_{t \in I} \{c(t)\} \times Nc(t).$$

Weiter sei durch $R_c := R(\cdot, c')c'$ der Schnitt R_c nach $\text{End}(Nc)$ definiert, wobei R den Riemannschen Krümmungstensor bezeichnet. Ist M vollständig, so bezeichnen wir mit $\phi: \mathbb{R} \times SM \rightarrow SM$, $(t, v) \mapsto \phi^t(v) = c'_v(t)$ den geodätischen Fluss von M .

1.2 Jacobi-Vektorfelder, konjugierte Punkte und Fokalfunkte

Es sei $c: I \rightarrow M$ eine Geodätische. Ein Vektorfeld Y längs c , welches die Jacobi-Differentialgleichung

$$Y''(t) + R(Y(t), c'(t))c'(t) = 0$$

löst, heißt Jacobi-Vektorfeld.

Die Lösungen der Jacobi-Differentialgleichung längs c bilden einen $(2n+2)$ -dimensionalen Vektorraum $\mathcal{J}(c)$ vermittels des Isomorphismus

$$\mathcal{J}(c) \rightarrow T_{c(t_0)}M \times T_{c(t_0)}M, Y \mapsto (Y(t_0), Y'(t_0))$$

für ein $t_0 \in I$. Andererseits entsprechen Jacobi-Vektorfelder längs c genau den Variationsvektorfeldern von Variationen von c durch Geodätische.

Mit Hilfe von Jacobi-Vektorfeldern lassen sich konjugierte Punkte definieren. Ist M eine vollständige Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $v \in T_pM \setminus \{0\}$, so heißt ein Punkt $q := c_v(t_0)$ konjugiert zu p längs c_v , falls ein orthogonales Jacobi-Vektorfeld $Y \in \mathcal{J}(c_v)$ mit $Y \neq 0$, $Y(0) = 0$ und $Y(t_0) = 0$ existiert. Dabei heißt Y orthogonales Vektorfeld, falls $\langle Y(t), c'_v(t) \rangle = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Eine vollständige Mannigfaltigkeit M besitzt also genau dann keine konjugierten Punkte, sofern jedes in $t = 0$ verschwindende, nicht triviale Jacobi-Vektorfeld Y die Bedingung $Y(t) \neq 0$ für alle $t \neq 0$ erfüllt. Insbesondere sind dann Jacobi-Vektorfelder eindeutig durch zwei Werte bestimmt.

Verwandt mit den konjugierten Punkten sind die Fokalfunkte. Eine vollständige Mannigfaltigkeit M besitzt genau dann keine Fokalfunkte, wenn längs jeder Geodätischen $\frac{d}{dt} \langle Y(t), Y(t) \rangle > 0$ für alle $t > 0$ und alle nicht trivialen Jacobi-Vektorfelder Y mit $Y(0) = 0$ gilt (vgl. [O'S74, Proposition 4]). Insbesondere besitzen Mannigfaltigkeiten ohne Fokalfunkte auch keine konjugierten Punkte. Eine Definition von Fokalfunkten findet man in [O'S74, Kapitel 1]. Diese wird hier jedoch nicht benötigt – wir wollen daher nicht näher darauf eingehen.

1.3 Jacobi-Tensoren

Es sei $c: I \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Ein $(1, 1)$ -Tensor längs c ist ein differenzierbarer Schnitt

$$Y: I \rightarrow \text{End}(Nc) = \bigcup_{t \in I} \text{End}(N_c(t)),$$

das heißt, dass für alle orthogonalen und parallelen Vektorfelder X entlang c (X heißt parallel, falls $\frac{DX}{dt} = 0$ für alle $t \in I$) die kovariante Ableitung von $t \mapsto Y(t)(X(t))$ existiert.

Die Ableitung $Y'(t) \in \text{End}(N_c(t))$ ist für alle orthogonalen und parallelen Vektorfelder X längs c definiert durch

$$Y'(t)(X(t)) := \frac{D}{dt}(Y(t)(X(t))).$$

Ein $(1, 1)$ -Tensor Y längs c heißt parallel oder konstant, falls $Y'(t) \equiv 0$ für alle $t \in I$ gilt.

Künftig werden wir Gleichungen, die $(1, 1)$ -Tensoren enthalten, meist als Matrix-wertige Gleichungen bezüglich einer parallelen Orthonormalbasis auffassen.

Definition 1.3.1. Ein $(1, 1)$ -Tensor J entlang c heißt Jacobi-Tensor zu c , falls er folgende Gleichung erfüllt

$$J'' + R_c \circ J = 0.$$

Sind Y und Z zwei Jacobi-Tensoren entlang c , so folgt aus den Symmetrien des Krümmungstensors, dass die Ableitung des sogenannten Wronski-Tensors

$$W(Y, Z)(t) := [Y'(t)]^T Z(t) - [Y(t)]^T Z'(t)$$

gleich 0 ist. Somit definiert $W(Y, Z)$ einen parallelen $(1, 1)$ -Tensor entlang c . Ein Jacobi-Tensor Y entlang c heißt Lagrange-Tensor, falls $W(Y, Y) = 0$ gilt. Man zeigt leicht, dass dies äquivalent dazu ist, dass $Y^T Y'$ symmetrisch ist. Falls Y nicht singulär ist, so ist dies äquivalent dazu, dass $Y' Y^{-1}$ symmetrisch ist. Die Bedeutung von Lagrange-Tensoren zeigt sich in folgendem Satz (vgl. [Kni12, Proposition 7.2]).

Satz 1.3.2. *Es sei $Y: I \rightarrow \text{End}(N_c)$ ein Lagrange-Tensor entlang c , welcher für alle $t \in I$ nicht singulär ist. Für jedes $t_0 \in I$ und jeden anderen Jacobi-Tensor Z entlang c existieren konstante Tensoren C_1 und C_2 , so dass*

$$Z(t) = Y(t) \left(\left(\int_{t_0}^t (Y^T Y)^{-1}(s) ds \right) C_1 + C_2 \right)$$

für alle $t \in I$ gilt.

Von großer Bedeutung sind die stabilen und instabilen Jacobi-Tensoren, welche wie folgt definiert sind.

Definition 1.3.3. Es sei M eine vollständige Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte und es sei $(p, v) \in SM$. Für $r > 0$ bezeichnen wir mit $S_{v,r}$ und $U_{v,r}$ die Jacobi-Tensoren entlang c_v mit

$$S_{v,r}(0) = \text{id} = U_{v,r}(0) \text{ und } S_{v,r}(r) = 0, U_{v,r}(-r) = 0.$$

Dann heißen

$$S_v := \lim_{r \rightarrow \infty} S_{v,r} \text{ und } U_v := \lim_{r \rightarrow \infty} U_{v,r}$$

die stabilen und instabilen Jacobi-Tensoren.

Mittels dieser Tensoren lassen sich die Weingartenabbildungen geodätischer Sphären und Horosphären definieren. Für mehr Details verweisen wir auf Kapitel 1.4.

Ein Beweis, dass die obigen Grenzwerte existieren, findet sich etwa in [Got78, Kapitel 1] oder [Gre58, Kapitel 1]. Wir fassen einige wichtige Eigenschaften der stabilen und instabilen Jacobi-Tensoren zusammen (vgl. [Kni12]), welche wir im Verlauf der Arbeit verwenden werden.

Lemma 1.3.4. *Es sei M eine vollständige Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte und es sei $(p, v) \in SM$.*

- (i) *Die Tensoren $S_{v,r}$, $U_{v,r}$, S_v und U_v sind Lagrange-Tensoren.*
- (ii) *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $U_{v,r}(t) = S_{-v,r}(-t)$ und $U_v(t) = S_{-v}(-t)$ und insbesondere $U'_{v,r}(0) = -S'_{-v,r}(0)$ und $U'_v(0) = -S'_{-v}(0)$.*
- (iii) *Für alle $t, u \in \mathbb{R}$ gilt $S_{\phi^u(v)}(t) = S_v(t+u)S_v^{-1}(u)$ und $U_{\phi^u(v)}(t) = U_v(t+u)U_v^{-1}(u)$ und insbesondere $S'_{\phi^u(v)}(0) = S'_v(u)S_v^{-1}(u)$ und $U'_{\phi^u(v)}(0) = U'_v(u)U_v^{-1}(u)$.*
- (iv) *Für $t \in \mathbb{R}$ definiere $\tilde{U}_v(t) := U'_v(t)U_v^{-1}(t)$ und $\tilde{S}_v(t) := S'_v(t)S_v^{-1}(t)$. Dann sind \tilde{U}_v und \tilde{S}_v symmetrisch und lösen die sogenannten Riccati-Differentialgleichungen*

$$\tilde{U}'_v(t) + \tilde{U}_v^2(t) + R_{c_v}(t) = 0$$

beziehungsweise

$$\tilde{S}'_v(t) + \tilde{S}_v^2(t) + R_{c_v}(t) = 0.$$

Beweis. (i) Da M eine Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte ist, sind $S_{v,r}(t)$ und $U_{v,r}(t)$ für alle $t \neq r$ beziehungsweise $t \neq -r$ nicht singulär. Weiter gilt

$$W(U_{v,r}, U_{v,r})(-r) = 0 = W(S_{v,r}, S_{v,r})(r).$$

Da der Wronski-Tensor konstant ist, folgt

$$W(U_{v,r}, U_{v,r}) = 0 = W(S_{v,r}, S_{v,r}).$$

Somit sind $S_{v,r}$ und $U_{v,r}$ Lagrange-Tensoren. Bei Grenzwertbildung erhält man, dass auch S_v und U_v Lagrange-Tensoren sind (vgl. [EO76, S. 228]).

- (ii) Mit der Kettenregel lässt sich leicht zeigen, dass auch $t \mapsto S_{-v,r}(-t)$ ein Jacobi-Tensor entlang c_v ist. Es ist

$$S_{-v,r}(0) = \text{id}_{(-v)^\perp} = \text{id}_{v^\perp} = U_{v,r}(0).$$

Weiter ist

$$S_{-v,r}(-(-r)) = S_{-v,r}(r) = 0_{N_{c_{-v}}(r)} = 0_{N_{c_v}(-r)} = U_{v,r}(-r).$$

Somit folgt $U_{v,r}(t) = S_{-v,r}(-t)$ und damit auch $U_v(t) = S_{-v}(-t)$. Also gilt insbesondere $U'_{v,r}(0) = -S'_{-v,r}(0)$ und $U'_v(0) = -S'_{-v}(0)$.

- (iii) Für festes u und festes r definiert $t \mapsto S_{v,r+u}(t+u)S_{v,r+u}^{-1}(u)$ für $r+u > 0$ als Produkt eines Jacobi-Tensors mit einem konstanten Tensor wieder einen Jacobi-Tensor. In $t = 0$ gilt $S_{v,r+u}(u)S_{v,r+u}^{-1}(u) = \text{id}$ und in $t = r$ gilt $S_{v,r+u}(r+u)S_{v,r+u}^{-1}(u) = 0$. Da auch $S_{\phi^u(v),r}$ ein Jacobi-Tensor mit $S_{\phi^u(v),r}(0) = \text{id}$ und $S_{\phi^u(v),r}(r) = 0$ ist, folgt

$$S_{\phi^u(v),r}(t) = S_{v,r+u}(t+u)S_{v,r+u}^{-1}(u).$$

Bildet man auf beiden Seiten den Grenzwert $r \rightarrow \infty$, so erhält man die erste Gleichung in (iii). Die zweite Gleichung in (iii) folgt mit dem gleichen Argument. Leitet man beide Gleichungen in $t = 0$ ab, so erhält man $S'_{\phi^u(v)}(0) = S'_v(u)S_v^{-1}(u)$ und $U'_{\phi^u(v)}(0) = U'_v(u)U_v^{-1}(u)$.

- (iv) Da U_v beziehungsweise S_v invertierbar sind, sind \tilde{U}_v beziehungsweise \tilde{S}_v nach der Bemerkung zu Wronski-Tensoren symmetrisch. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt weiter

$$\begin{aligned} & \tilde{U}'_v(t) + \tilde{U}_v^2(t) + R_{c_v}(t) \\ &= U''_v(t)U_v^{-1}(t) - U'_v(t)U_v^{-1}(t)U'_v(t)U_v^{-1}(t) + \left(U'_v(t)U_v^{-1}(t)\right)^2 + R_{c_v}(t) \\ &= -R_{c_v}(t)U_v(t)U_v^{-1}(t) + R_{c_v}(t) = 0. \end{aligned}$$

Auf analoge Weise erfüllt \tilde{S}_v die Riccati-Gleichung.

□

1.4 Harmonische Mannigfaltigkeiten

Eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt harmonisch, falls für alle Punkte $p \in M$ die Volumendichte ω_p eine radiale Funktion ist.

In diesem Kapitel präzisieren wir diese Definition und betrachten äquivalente Definitionen und Eigenschaften. Hilfreiche Quellen sind [Bes78, Kapitel 6] und [Kre10, Kapitel 2 und 3].

Von nun an sei (M, g) stets eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $(n + 1)$.

Definition 1.4.1. Für alle $v \in TM$ mit $v \neq 0$ setze $\tilde{v} := \frac{v}{\|v\|}$. Die Volumendichte ω ist definiert durch

$$\omega: TM \rightarrow \mathbb{R}, (p, v) \mapsto \|v\|^{-n} \det(A_{\tilde{v}}(\|v\|))$$

und $\omega(p, 0_p) := 1$. Dabei bezeichne $A_{\tilde{v}}$ den Jacobi-Tensor längs $c_{\tilde{v}}$ mit $A_{\tilde{v}}(0) = 0$ und $A'_{\tilde{v}}(0) = \text{id}$.

Bemerkung. Wenn wir einen Punkt $p \in M$ fixieren und eine Normalkoordinaten-Umgebung U um p wählen, so schreiben wir $\omega_p(q) := \omega(p, \exp_p^{-1}(q))$ für $q \in U$.

Das folgende Lemma verdeutlicht, warum wir ω die Volumendichte nennen (vgl. [Wil96, Kapitel 6.6]).

Lemma 1.4.2. *Es sei U eine Normalkoordinaten-Umgebung um $p \in M$. Es sei $q \in U$ und $(g_{ij}(q))_{i,j=1,\dots,(n+1)}$ die Matrix der ersten Fundamentalform in T_qM bezüglich der Normalkoordinaten von U . Dann gilt*

$$\omega_p(q) = \sqrt{\det(g_{ij}(q))_{i,j=1,\dots,(n+1)}} \cdot$$

Definition 1.4.3. Eine vollständige Mannigfaltigkeit M heißt (global) harmonisch, falls für alle $p \in M$ eine Funktion $\Omega_p: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$\omega(p, v) = \Omega_p(\|v\|)$$

für alle $v \in T_pM$ gilt.

Bemerkung. Im Fall einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit existiert nach [Bes78, Proposition 6.16] eine Funktion $\Omega: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Omega(r) = \Omega_p(r)$ für alle $r \in [0, \infty)$ und alle $p \in M$. Wir werden stets diesen Fall annehmen.

Betrachtet man $\det(A_v(r))$ für ein $v \in SM$, so ist M genau dann harmonisch, wenn $\det(A_v(r))$ unabhängig von $v \in SM$ ist. Ist M eine harmonische Mannigfaltigkeit, so definieren wir für den Rest dieser Arbeit

$$\theta(r) := \det(A_v(r))$$

für $r \geq 0$ und ein beliebiges $v \in SM$, dabei hängt θ nach der vorangegangenen Bemerkung nicht vom Fußpunkt von v ab. Da $A_v(r)$ und $-A_{-v}(-r)$ zwei Jacobi-Tensoren längs c_v mit den gleichen Anfangsbedingungen sind, stimmen sie überein. Insbesondere

ist damit $\det(A_v(r)) = (-1)^n \cdot \det(A_{-v}(-r))$ auch für $r < 0$ unabhängig von v und wir können θ als Funktion auf ganz \mathbb{R} auffassen.

Wir zeigen, dass für eine einfach zusammenhängende, harmonische Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte die mittlere Krümmung der geodätischen Sphären eine radiale Funktion ist. Dafür definieren wir zunächst die mittlere Krümmung einer geodätischen Sphäre.

Definition 1.4.4. Es sei M eine vollständige Mannigfaltigkeit. Es sei $q \in \hat{B}_R(p)$ ein Punkt in dem punktierten Ball vom Radius $0 < R \leq \text{injr}(p)$ um $p \in M$. Setze $v := \exp_p^{-1}(q)$ und $\tilde{v} := \frac{v}{\|v\|}$. Die mittlere Krümmung $\eta_p(q)$ der geodätischen Sphäre $S_{\|v\|}(p)$ im Punkt q ist definiert als

$$\eta_p(q) := \text{tr} \left(A'_{\tilde{v}} \circ A_{\tilde{v}}^{-1} \right) (\|v\|).$$

Ist M eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte, so ist nach dem Satz von Hadamard-Cartan $\exp_p: T_p M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus. Somit sind kürzeste verbindende Geodätische eindeutig bestimmt und damit ist der Injektivitätsradius unendlich.

Satz 1.4.5. *Es sei M eine einfach zusammenhängende, harmonische Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte. Dann existiert für alle $p \in M$ eine Funktion $\Lambda_p: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass*

$$\eta_p(\exp_p(v)) = \Lambda_p(\|v\|)$$

für alle $v \in TM$ mit $v \neq 0$ gilt.

Beweis. Es sei $(p, v) \in SM$. Dann gilt für alle $r > 0$

$$\frac{d}{dr} (\det(A_v(r))) = \text{tr} \left(A'_v \circ A_v^{-1} \right) (r) \cdot \det(A_v(r)).$$

Somit erhalten wir für alle $r > 0$

$$\frac{\theta'(r)}{\theta(r)} = \eta_p(\exp_p(rv))$$

und damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung. Ist andererseits die mittlere Krümmung der geodätischen Sphären eine radiale Funktion, so folgt mittels direkter Rechnung, dass dies auch für die Volumendichte gilt (vgl. [Kre10, Proposition 3.1.2]).

Es sei M eine vollständige, harmonische Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte. Für festes $r > 0$ sind $U_{v,r}$ und $t \mapsto A_{\phi^{-r}(v)}(t+r)A_{\phi^{-r}(v)}^{-1}(r)$ zwei Jacobi-Tensoren längs

c_v , die in $t = 0$ und $t = -r$ übereinstimmen und somit gleich sind. Insbesondere gilt damit

$$U'_{v,r}(0) = A'_{\phi^{-r}(v)}(r)A_{\phi^{-r}(v)}^{-1}(r)$$

und $\text{tr}(U'_{v,r}(0)) = \text{tr}(A'_{\phi^{-r}(v)}(r)A_{\phi^{-r}(v)}^{-1}(r))$. Wie oben folgt somit $\text{tr}(U'_{v,r}(0)) = \frac{\theta'(r)}{\theta(r)}$. Nach [RS03, Korollar 2.2] existiert der Grenzwert $\text{tr}(U_v(r)) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\theta'(r)}{\theta(r)}$ und ist nicht negativ. Nachfolgend bezeichnen wir diesen Grenzwert stets mit $h \geq 0$ und interpretieren ihn als mittlere Krümmung der Horosphären.

Dabei sind Horosphären geodätische Sphären mit unendlichem Radius. Sie werden als Nullstellenmengen von sogenannten Busemann-Funktionen eingeführt. Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte, deren mittlere Krümmung der Horosphären konstant ist, nennt man asymptotisch harmonisch. Insbesondere sind harmonische Mannigfaltigkeiten ohne konjugierte Punkte automatisch asymptotisch harmonisch (vgl. [Heb06, Definition 2.1, Bemerkung 2.2]).

Aus den Arbeiten von Y. Nikolayevsky [Nik05b, Theorem 2] sowie von A. Ranjan und H. Shah [RS02, Theorem 4.2] folgt, dass eine nicht kompakte, einfach zusammenhängende, harmonische Mannigfaltigkeit mit $h = 0$ bereits flach ist (vgl. auch [KP13, Kapitel 2 und 6]).

1.5 Exponentielle Polynome

In dieser Arbeit werden exponentielle Polynome eine zentrale Rolle spielen. Wir fassen im Folgenden die für uns relevanten Sprech- und Schreibweisen zusammen.

Ein exponentielles Polynom φ ist eine Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} c_{jk} \cdot t^k \cdot e^{\lambda_j t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei $m \in \mathbb{N}$, $d_j \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und $c_{j0}, \dots, c_{jd_j} \in \mathbb{C}$ für alle $j = 1, \dots, m$ sei. Wir sagen, dass φ ein reelles exponentielles Polynom ist, wenn $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ invariant unter Konjugation ist und für $j, j' \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_j = \overline{\lambda_{j'}}$ auch $d_j = d_{j'}$ und $c_{jk} = \overline{c_{j'k}}$ für alle $k = 0, \dots, d_j = d_{j'}$ gilt. In diesem Fall ist φ eine reellwertige Funktion.

Mittels der Euler-Formel lassen sich reelle exponentielle Polynome auch schreiben als

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^N (p_j(t) \sin(\beta_j t) + q_j(t) \cos(\beta_j t)) e^{\alpha_j t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, wobei $N \in \mathbb{N}$, p_j, q_j Polynome und $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ sind.

Exponentielle Polynome stehen in engem Zusammenhang zu Lösungen von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Eine solche ist gegeben durch

$$a_0 y + a_1 y' + a_2 y'' + \dots + a_n y^{(n)} = 0$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten a_0, \dots, a_n . Betrachtet man das zugehörige charakteristische Polynom

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

und bezeichnet mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ dessen paarweise verschiedenen Nullstellen mit Multiplizitäten l_1, \dots, l_m , dann wird der Lösungsraum der Differentialgleichung aufgespannt durch

$$e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{l_1-1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{l_2-1} e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_m t}, \dots, t^{l_m-1} e^{\lambda_m t}.$$

Die Lösungen von linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind also gerade exponentielle Polynome. Andererseits lösen natürlich exponentielle Polynome solche Differentialgleichungen.

Ist φ ein exponentielles Polynom, so nennen wir das normierte charakteristische Polynom, dessen zugehörige Differentialgleichung von φ gelöst wird und unter allen diesen minimalen Grad hat, das Minimalpolynom von φ .

Weiter nennen wir φ diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom von φ nur einfache Nullstellen hat. In diesem Fall lässt sich φ schreiben als

$$\sum_{j=1}^m c_j \cdot e^{\lambda_j t},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die Nullstellen des Minimalpolynoms von φ sind und $c_j \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ für alle $j = 1, \dots, m$ gilt.

Bei uns spielen zumeist reelle exponentielle Polynome mit Werten in den symmetrischen $(n \times n)$ -Matrizen eine Rolle. Wir schreiben diese als

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} t^k \cdot e^{\lambda_j t} \cdot G_{jk}$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $d_j \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und $G_{j0}, \dots, G_{jd_j} \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}$ für alle $j = 1, \dots, m$. Zudem sei $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ invariant unter Konjugation und für $j, j' \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_j = \overline{\lambda_{j'}}$ gelte $d_j = d_{j'}$ und $G_{jk} = \overline{G_{j'k}}$ für alle $k = 0, \dots, d_j = d_{j'}$.

1.6 Symmetrische Multilinearform Q_n

Bei unseren Überlegungen berechnen wir oft die Determinante von Summen von Matrizen. Ein Hilfsmittel dafür ist die von der Determinanten-Funktion induzierte symmetri-

sche Multilinearform, die wir im Folgenden mit Q_n bezeichnen. Für weitere Informationen siehe beispielsweise [Pro06, Kapitel 3.2].

Definition 1.6.1. Mit $Q_n: \mathbb{R}^{n \times n} \times \dots \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir die von der Determinanten-Abbildung $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ induzierte symmetrische Multilinearform, die gegeben ist durch

$$Q_n(A_1, \dots, A_n) := \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt_1 \dots dt_n} \Big|_{t_1=0, \dots, t_n=0} \det(t_1 \cdot A_1 + \dots + t_n \cdot A_n)$$

für alle $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Bemerkungen.

(i) Für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det(A) = Q_n(A, \dots, A).$$

(ii) In Dimension 2 gilt beispielsweise

$$Q_2(A, B) = \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(AB))$$

für alle $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und in Dimension 3 gilt

$$\begin{aligned} Q_3(A, B, C) = \frac{1}{6} & \left(\operatorname{tr}(ABC + CBA) \right. \\ & - (\operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(BC) + \operatorname{tr}(B) \operatorname{tr}(AC) + \operatorname{tr}(C) \operatorname{tr}(AB)) \\ & \left. + \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B) \operatorname{tr}(C) \right) \end{aligned}$$

für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

(iii) Die Multilinearform Q_n können wir analog auch für komplexe $(n \times n)$ -Matrizen definieren.

Wir untersuchen, wie sich Q_n bei Multiplikation der Argumente mit den gleichen Matrizen verhält.

Lemma 1.6.2. *Es seien $A_1, \dots, A_n, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt*

$$Q_n(BA_1C, \dots, BA_nC) = \det(B) \cdot \det(C) \cdot Q_n(A_1, \dots, A_n).$$

Insbesondere ist Q_n invariant unter Konjugation.

Beweis. Es gilt

$$Q_n(BA_1C, \dots, BA_nC) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt_1 \dots dt_n} \Big|_{t_1=0, \dots, t_n=0} \det(t_1 \cdot BA_1C + \dots + t_n \cdot BA_nC)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt_1 \dots dt_n} \Big|_{t_1=0, \dots, t_n=0} \det(B(t_1 \cdot A_1 + \dots + t_n \cdot A_n)C) \\
&= \det(B) \cdot \det(C) \cdot Q_n(A_1, \dots, A_n).
\end{aligned}$$

□

Weiter zeigen wir, dass Q_n eingeschränkt auf einen Untervektorraum des $\mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$, der eine positiv definite Matrix enthält, nicht entartet ist.

Lemma 1.6.3. *Es sei $V \subseteq \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ ein Untervektorraum und V enthalte eine symmetrische, positiv definite Matrix $A \in V$. Dann ist*

$$Q_n|_{V^n} : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

nicht entartet.

Beweis. Angenommen $Q_n|_{V^n}$ ist entartet. Dann existiert ein $W \in V \setminus \{0\}$ im Kern von $Q_n|_{V^n}$. Da A symmetrisch und positiv definit ist, existiert ein $P \in O(n)$ mit

$$A = P \cdot \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot P^T \text{ für } 0 < \mu_1 \leq \dots \leq \mu_n.$$

Setze

$$B := P \cdot \text{diag}(\sqrt{\mu_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\mu_n}^{-1}) \cdot P^T.$$

Dann ist B symmetrisch und positiv definit und es gilt

$$B \cdot A \cdot B = P \cdot \text{diag}(\sqrt{\mu_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\mu_n}^{-1}) \cdot \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot \text{diag}(\sqrt{\mu_1}^{-1}, \dots, \sqrt{\mu_n}^{-1}) \cdot P^T = I.$$

Es sei $p(s) = \det(B \cdot W \cdot B - sI)$ das charakteristische Polynom von $B \cdot W \cdot B$. Da $A \in V$ und W im Kern von $Q_n|_{V^n}$ ist, ist

$$\begin{aligned}
Q_n(A, \dots, A) &= Q_n(A - sW, \dots, A - sW) = \det(A - sW) \\
&= \det(B)^{-1} \cdot \det(B \cdot A \cdot B - s \cdot B \cdot W \cdot B) \cdot \det(B)^{-1} \\
&= \det(A) \cdot \det(I - s \cdot B \cdot W \cdot B) \\
&= (-1)^n \cdot \det(A) \cdot s^n \cdot \det(B \cdot W \cdot B - 1/s \cdot I) \\
&= (-1)^n \cdot \det(A) \cdot s^n \cdot p(1/s)
\end{aligned}$$

unabhängig von s . Folglich gilt $p(s) = c \cdot s^n$ für ein $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton folgt $(B \cdot W \cdot B)^n = 0$ und damit ist $B \cdot W \cdot B$ nilpotent. Andererseits ist $B \cdot W \cdot B$ auch symmetrisch und diagonalisierbar über \mathbb{R} und damit gleich 0. Folglich ist auch $W = 0$, was ein Widerspruch ist. Somit ist $Q_n|_{V^n}$ nicht entartet. □

Bemerkung. Zu einer symmetrischen und positiv definiten Matrix A haben wir im vorangegangenen Beweis eine symmetrische und positiv definite Matrix B konstruiert mit

$$B \cdot A \cdot B = I.$$

Matrizen, die auf diese Weise konstruiert wurden, bezeichnen wir künftig meist als $\sqrt{A^{-1}}$. Es gilt offensichtlich

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{A^{-1}} = I = \sqrt{A^{-1}} \cdot \sqrt{A}.$$

2 Grundlegendes Setting

Wir führen die zu untersuchenden Objekte dieser Arbeit ein und beweisen einige Eigenschaften.

In diesem Kapitel sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine vollständige, harmonische Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte der Dimension $(n + 1)$. Weiter sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische und setze $p := c(0)$ und $v := c'(0)$. Weiter bezeichnen wir mit U_v und S_v den instabilen und den stabilen Jacobi-Tensor längs c und schreiben für eine bessere Lesbarkeit meist U beziehungsweise S .

2.1 Definition und Eigenschaften von F

Wir nehmen stets an, dass das folgende Integral $\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$ existiert und betrachten die Abbildung

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(n) := \{A \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n} \mid A \text{ positiv definit}\}, \quad t \mapsto F(t) = \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau.$$

Dann fällt die Abbildung für $t \rightarrow \infty$ offensichtlich monoton gegen 0. Das heißt, dass $F(t) - F(s)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $t < s$ positiv definit ist und $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen die Nullmatrix konvergiert.

Der Ausdruck $\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$ spielt bei der Untersuchung des Rangs einer Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte eine wichtige Rolle.

Ist N eine solche, so ist der Rang von $v \in SN$ definiert als

$$\text{Rang}(v) = \dim(\ker(U'_v(0) - S'_v(0))) + 1$$

und der Rang von N als

$$\text{Rang}(N) = \min\{\text{Rang}(v) \mid v \in SN\}$$

(vgl. [Kni12, Definition 3.1]). Nach [Kni12, Lemma 2.3] gilt

$$(U'_v(0) - S'_{v,r}(0))^{-1} = \int_0^r (U'_v(\tau)U_v(\tau))^{-1}d\tau$$

für alle $r > 0$. Die Bedingung, dass das Integral $\int_0^\infty (U_v^T(\tau)U_v(\tau))^{-1}d\tau$ existiert, ist folglich gleichbedeutend damit, dass der Rang des Vektors v gleich 1 ist.

G. Knieper vermutet, dass der Rang einer nicht flachen, harmonischen Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte stets gleich 1 ist (vgl. [Kni16]), und zeigt dies in [Kni12, Theorem 6.5] im Fall einer einfach zusammenhängenden, nicht flachen, harmonischen Mannigfaltigkeit ohne Fokalfunkte. Zudem zeigt er, dass in diesem Fall die Funktion $v \mapsto \text{Rang}(v)$ konstant ist (vgl. [Kni12, Korollar 5.4]). Insbesondere existiert das Integral $\int_0^\infty (U_v^T(\tau)U_v(\tau))^{-1}d\tau$ für alle $v \in SM$ für einfach zusammenhängende, nicht flache, harmonische Mannigfaltigkeiten ohne Fokalfunkte und damit insbesondere für einfach zusammenhängende, nicht flache, harmonische Mannigfaltigkeiten mit nicht positiver Krümmung.

Wir untersuchen die Abbildung F , um durch ihre Gestalt Rückschlüsse auf die geometrischen Größen der Mannigfaltigkeit zu ziehen (s. Kapitel 3).

Zunächst beweisen wir allerdings wichtige Eigenschaften von F und beginnen mit der Berechnung der Determinanten des stabilen und instabilen Jacobi-Tensors sowie von F .

Lemma 2.1.1. *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\det(S(t)) = e^{-ht} \quad \text{und} \quad \det(U(t)) = e^{ht}$$

und

$$\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht},$$

wobei mit h die konstante mittlere Krümmung der Horosphären gemäß Kapitel 1.4 gemeint ist. Insbesondere folgt $h > 0$.

Beweis. Mit der Definition von h und Lemma 1.3.4(iii) gilt

$$\frac{d}{dt}(\log(\det(U(t)))) = \frac{\frac{d}{dt} \det(U(t))}{\det(U(t))} = \text{tr}(U'(t)U^{-1}(t)) = \text{tr}(U'_{\phi^t(v)}(0)) \equiv h.$$

Folglich gilt $\log(\det(U(t))) = h \cdot t$ und damit $\det(U(t)) = e^{ht}$. Nach Lemma 1.3.4(ii) gilt $S_v(t) = U_{-v}(-t)$ und somit gilt $\det(S_v(t)) = \det(U_{-v}(-t)) = e^{-ht}$.

Sei $r > 0$ und bezeichne mit S_r den Jacobi-Tensor längs c mit $S_r(0) = \text{id}$ und $S_r(r) = 0$. Dann ist $S := \lim_{r \rightarrow \infty} S_r$ der stabile Jacobi-Tensor längs c . Da U nach Lemma 1.3.4 (i) ein auf ganz \mathbb{R} invertierbarer Lagrange-Tensor ist, existieren konstante Tensoren C_r und \tilde{C}_r mit

$$S_r(t) = U(t) \left(\left(\int_t^r (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau \right) \cdot C_r + \tilde{C}_r \right).$$

Da $S_r(r) = 0$ und $U(r) \neq 0$ ist, folgt $\tilde{C}_r = 0$. Für $t = 0$ gilt weiter

$$\text{id} = S_r(0) = \left(\int_0^r (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau \right) \cdot C_r.$$

Daher folgt

$$S_r(t) = U(t) \cdot \left(\int_t^r (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau \right) \cdot \left(\int_0^r (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau \right)^{-1}.$$

Da wir angenommen haben, dass $\left(\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau \right)$ existiert, folgt mittels Grenzübergang

$$\begin{aligned} S(t) &= U(t) \cdot \left(\int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau \right) \cdot \left(\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau \right)^{-1} \\ &= U(t) \cdot F(t) \cdot F(0)^{-1}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$e^{-ht} = \det(S(t)) = e^{ht} \cdot \det(F(t)) \cdot \frac{1}{\det(F(0))}$$

und damit $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$. Da $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, folgt insbesondere $h > 0$. \square

Wir stellen einen Zusammenhang zwischen der Volumendichte θ aus Kapitel 1.4 und der Abbildung F her. Dieser Zusammenhang ist vergleichbar mit der Relation zwischen der Volumendichte und dem von Y. Nikolayevsky in [Nik05b, Kapitel 3] betrachteten Tensor Q . Wie F ist auch Q das Produkt eines inversen Jacobi-Tensors mit einem Jacobi-Tensor.

Lemma 2.1.2. *Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\theta(t - s) = (-1)^n \cdot e^{ht} \cdot e^{hs} \cdot \det(F(t) - F(s)).$$

Beweis. Für $s, t \in \mathbb{R}$ setze

$$\begin{aligned} A_s(t) &:= -U(t) \cdot \left(\int_t^s (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau \right) \cdot U^T(s) \\ &= -U(t) \cdot \left(\int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau - \int_s^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau \right) \cdot U^T(s) \\ &= -U(t) \cdot (F(t) - F(s)) \cdot U^T(s). \end{aligned}$$

Dann ist A_s ein Jacobi-Tensor (vgl. Satz 1.3.2) mit $A_s(s) = 0$ und

$$A'_s(s) = -U'(s) \cdot 0 \cdot U^T(s) + U(s)(U^T(s)U(s))^{-1}U^T(s) = \text{id}.$$

Da M eine harmonische Mannigfaltigkeit ist, folgt nach Definition von θ und mit Lemma 2.1.1

$$\begin{aligned}\theta(t-s) &= \det(A_s(t)) = (-1)^n \cdot \det(U(t)) \cdot \det(U(s)) \cdot \det(F(t) - F(s)) \\ &= (-1)^n \cdot e^{ht} \cdot e^{hs} \cdot \det(F(t) - F(s)).\end{aligned}$$

□

Zusammen mit der Formel für die Determinante von F ergibt sich das folgende Korollar.

Korollar 2.1.3. *Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$f(t-s) = \frac{\det(F(t) - F(s))}{\det(F(s))}$$

für eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Es seien $s, t \in \mathbb{R}$. Nach Lemma 2.1.1 gilt $\det(F(s)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2hs}$. Mit Lemma 2.1.2 folgt dann

$$\frac{\det(F(t) - F(s))}{\det(F(s))} = \frac{(-1)^n \cdot \theta(t-s) \cdot e^{-ht} \cdot e^{-hs}}{\det(F(0)) \cdot e^{-2hs}} = \frac{(-1)^n \cdot \theta(t-s) \cdot e^{-h(t-s)}}{\det(F(0))} =: f(t-s).$$

□

Bemerkung. Für die Herleitung der obigen Aussage benötigt man nicht die Bedingung, dass $\det(A_w(t))$ unabhängig von $w \in SM$ ist, sondern es genügt, dass $\det(A_{c'(s)}(t))$ unabhängig von s ist. Gilt dies längs jeder Geodätischen c , so ist die Mannigfaltigkeit ein sogenannter D'Atri-Raum (vgl. [Heb95, Lemma 4.6]).

D'Atri-Räume wurden zunächst von J.E. D'Atri und H.K. Nickerson untersucht und als die Mannigfaltigkeiten beschrieben, in denen die (lokalen) geodätischen Spiegelungen das Volumenelement (bis aufs Vorzeichen) erhalten.

Offensichtlich ist jede harmonische Mannigfaltigkeit auch ein D'Atri-Raum. Die Umkehrung gilt allerdings nicht.

Für weitere Informationen zu D'Atri-Räumen verweisen wir auf [KPV96] und die darin enthaltenen Referenzen.

Wir schreiben die Eigenschaften von F aus dem vorangegangenen Korollar 2.1.3 mit Hilfe der von der Determinanten-Funktion induzierten Multilinearform Q_n (vgl. Definition 1.6.1).

Korollar 2.1.4. Für $t \in \mathbb{R}$ definiere $H(t) = \frac{2h}{n} \cdot F(t) + F'(t)$. Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$Q_n(H(t) - H(s), F(t) - F(s), \dots, F(t) - F(s)) = 0$$

und

$$Q_n(H(t), F(t), \dots, F(t)) = 0.$$

Beweis. Es seien $s, t \in \mathbb{R}$. Mit Lemma 2.1.1 und der von der Determinanten-Funktion induzierten Multilinearform Q_n (vgl. Definition 1.6.1) gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \det(F(0)) \cdot e^{-2ht} \cdot \frac{d}{dt}(1) \\ &= \det(F(0)) \cdot e^{-2ht} \cdot \frac{d}{dt} \left(\det(F(0))^{-1} \cdot e^{2ht} \cdot \det(F(t)) \right) \\ &= 2h \cdot \det(F(t)) + \frac{d}{dt} \det(F(t)) \\ &= 2h \cdot Q_n(F(t), \dots, F(t)) + n \cdot Q_n(F'(t), F(t), \dots, F(t)) \\ &= n \cdot Q_n(H(t), F(t), \dots, F(t)). \end{aligned}$$

Nach Korollar 2.1.3 und Lemma 2.1.1 gilt

$$f(t - s) = \det(F(0))^{-1} \cdot e^{2hs} \cdot \det(F(t) - F(s))$$

für eine C^∞ -Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \det(F(0)) \cdot e^{-2hs} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) f(t - s) \\ &= 2h \cdot Q_n(F(t) - F(s), \dots, F(t) - F(s)) \\ &\quad + n \cdot Q_n(F'(t) - F'(s), F(t) - F(s), \dots, F(t) - F(s)) \\ &= n \cdot Q_n(H(t) - H(s), F(t) - F(s), \dots, F(t) - F(s)). \end{aligned}$$

□

Zur Abkürzung führen wir abschließend noch die folgenden Sprechweisen ein.

Definition 2.1.5. Es sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige C^∞ -Funktion.

(a) Wir sagen, dass F eine Lösung unseres Problems ist, wenn F die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- (i) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $F(t)$ symmetrisch und positiv definit.
- (ii) Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert $F(t)$ monoton gegen 0.
- (iii) Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ für ein $h > 0$.

(iv) Es existiert eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(u) = \frac{\det(F(s+u) - F(s))}{\det(F(s))}$$

für alle $s, u \in \mathbb{R}$.

(b) Wir sagen, dass F in Standardform ist, wenn ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen.

- (i) Der Beweis von Korollar 2.1.4 verwendet nur die Eigenschaften (a)(iii) und (a)(iv) und behält damit auch für Lösungen unseres Problems unabhängig vom geometrischen Hintergrund seine Gültigkeit.
- (ii) Ist F in Standardform gemäß (b), dann ist F nach den Rechenregeln für das Matrix-Exponential ein exponentielles Polynom. In diesem Fall ist F Bahn einer Ein-Parameter-Untergruppe von Isometrien im symmetrischen Raum $\mathcal{P}(n) = \text{GL}^+(n, \mathbb{R}) / \text{SO}(n)$ symmetrischer, positiv definiter Matrizen.
- (iii) Ist F in Standardform für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\text{tr}(W) = -h < 0$ und einem positiv definiten $F(0)$, so ist

$$\det(F(t)) = \det(e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \frac{\det(F(s+u) - F(s))}{\det(F(s))} &= \frac{\det(e^{sW}) \cdot \det(e^{uW} \cdot F(0) \cdot e^{uW^T} - I_n) \cdot \det(e^{sW^T})}{\det(F(0)) \cdot e^{-2hs}} \\ &= \frac{\det(e^{uW} \cdot F(0) \cdot e^{uW^T} - I_n)}{\det(F(0))} \end{aligned}$$

nur von u abhängig. Da $F(0)$ positiv definit ist, folgt aus der Formel für die Determinante, dass $F(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv definit ist.

Die Eigenschaften (i), (iii) und (iv) aus (a) in der obigen Definition sind damit für Funktionen F , die in Standardform sind, erfüllt.

Fordert man zudem, dass $W \cdot F(0) + F(0) \cdot W^T$ negativ definit ist, so erhält man zunächst, dass $F'(t) = e^{tW} \cdot (W \cdot F(0) + F(0) \cdot W^T) \cdot e^{tW^T}$ in $t = 0$ negativ definit ist. Wegen $\det(F'(t)) = \det(W \cdot F(0) + F(0) \cdot W^T) \cdot e^{-2ht}$ ist damit $F'(t)$ für alle

$t \in \mathbb{R}$ negativ definit. Somit ist F streng monoton fallend. Da die Einträge von F exponentielle Polynome sind und

$$\frac{d}{dt} \|F(t)\| = \frac{d}{dt} \sqrt{\operatorname{tr}(F(t)^2)} = \frac{\operatorname{tr}(F'(t)F(t))}{\operatorname{tr}(F(t)^2)} < 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, konvergiert $F(t)$ damit auch streng monoton gegen 0 für $t \rightarrow \infty$. Abbildungen F , die sich in Standardform schreiben lassen und für die $W \cdot F(0) + F(0) \cdot W^T$ negativ definit ist, besitzen damit auch Eigenschaft (ii) aus (a) in der obigen Definition.

Betrachtet man

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(n), t \mapsto \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau$$

wie zu Beginn des Kapitels, so ist F eine Lösung unseres Problems gemäß der vorherigen Definition (vgl. Lemma 2.1.1 und Korollar 2.1.3 und die anschließende Bemerkung).

Wir untersuchen im Folgenden, unter welchen Bedingungen F auch von Standardform ist. Dafür berechnen wir F zunächst im Fall von symmetrischen Räumen negativer Krümmung.

Im Anschluss zeigen wir, welche Folgen diese Darstellung für den instabilen und stabilen Tensor sowie den Krümmungstensor hat.

2.2 Symmetrische Räume vom Rang 1

Symmetrische Räume sind eine wichtige Beispielklasse Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Dabei ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M ein symmetrischer Raum, wenn für alle $p \in M$ eine Isometrie $s_p: M \rightarrow M$ existiert mit $s_p(p) = p$ und $(ds_p)_p = -\operatorname{id}_{T_p M}$. Symmetrische Räume wurden vollständig von É. Cartan klassifiziert [Car26, Car27].

Dementsprechend ist ein lokal symmetrischer Raum eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, die lokal isometrisch zu einem symmetrischen Raum ist. Dies ist wiederum gleichbedeutend dazu, dass der Riemannsche Krümmungstensor parallel ist.

Der Rang eines lokal symmetrischen Raums ist definiert als die maximale Dimension einer flachen, totalgeodätischen Untermannigfaltigkeit der universellen Überlagerung des Raums.

Eine zusammenhängende Untermannigfaltigkeit N von M heißt dabei geodätisch in $p \in N$, falls jede M -Geodätische, welche tangential an N in p ist, eine Kurve in N ist. Die Untermannigfaltigkeit N heißt totalgeodätisch, wenn N in allen Punkten geodätisch ist (vgl. [Hel01, Kapitel 1.14]).

Für Details zu (lokal) symmetrischen Räumen verweisen wir auf [Hel01, Kapitel 4 und 5] und [Esc97].

Es ist bekannt, dass ein lokal symmetrischer Raum genau dann harmonisch ist, wenn er flach oder sein Rang gleich 1 ist, da diese Räume lokal 2-Punkt-homogen sind (vgl.

[Esc80] und [Kre10, Kapitel 3.3] für eine konkrete Berechnung der Dichte-Funktionen symmetrischer Räume vom Rang 1).

Symmetrische Räume vom Rang 1 sind damit klassische Beispiele harmonischer Mannigfaltigkeiten. Unter ihnen haben die Räume mit negativer Krümmung – die reell-, komplex-, quaternionisch-hyperbolischen Räume und die Cayley-hyperbolische Ebene – keine konjugierten Punkte und sind vollständig. Wir berechnen F in diesen Fällen.

Es sei M ein $(n + 1)$ -dimensionaler symmetrischer Raum mit negativer Krümmung, $(p, v) \in SM$ und c die Geodätische mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Weiter sei (e_1, \dots, e_n) eine Basis von v^\perp bezüglich der $R(0)$ diagonal ist, wobei $R(t) := R(\cdot, c'(t))c'(t)$ den Jacobi-Operator längs c eingeschränkt auf $N_c(t)$ bezeichne. Weiter bezeichne mit (E_1, \dots, E_n) den Paralleltransport von (e_1, \dots, e_n) längs c . Wir berechnen alle Tensoren bezüglich dieser Basis.

Da M ein symmetrischer Raum ist, ist der Krümmungstensor parallel und damit ist $R(t)$ für $t \in \mathbb{R}$ konstant. Da die Krümmung von M negativ ist, gilt $R(t) = \text{diag}(-\kappa_1, \dots, -\kappa_n) =: K$ für $\kappa_1, \dots, \kappa_n > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Genauer gilt bis auf Skalierung $R(t) = \text{diag}(-2, \dots, -2, -1, \dots, -1)$, wobei die Häufigkeit der -2 von dem entsprechenden symmetrischen Raum abhängt. Im Fall des reell-hyperbolischen Raums tritt sie 0-mal, des komplex-hyperbolischen Raums 1-mal, des quaternionisch-hyperbolischen Raums 3-mal und im Fall der Cayley-hyperbolischen Ebene 7-mal auf.

Wir berechnen zunächst den instabilen Jacobi-Tensor U längs c . Dafür betrachte zunächst den Jacobi-Tensor U_r , $r > 0$, mit $U_r(0) = \text{id}$ und $U_r(-r) = 0$. Die Jacobi-Differentialgleichung vereinfacht sich zu

$$U_r''(t) + K \cdot U_r(t) = 0$$

Gesucht sind folglich Funktionen $\phi_{i,r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi_{i,r}(0) = 1$ und $\phi_{i,r}(-r) = 0$ und

$$\phi_{i,r}''(t) - \kappa_i \cdot \phi_{i,r}(t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $i = 1, \dots, n$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\phi_{i,r}(t) = -\frac{e^{2r\sqrt{\kappa_i}}}{1 - e^{2r\sqrt{\kappa_i}}} \cdot e^{t\sqrt{\kappa_i}} + \frac{1}{1 - e^{2r\sqrt{\kappa_i}}} \cdot e^{-t\sqrt{\kappa_i}}$$

und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi_{i,r}(t) = e^{t\sqrt{\kappa_i}}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Folglich ist

$$U_r(t) = \text{diag}(\phi_{1,r}(t), \dots, \phi_{n,r}(t))$$

und

$$U(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} U_r(t) = \text{diag}(e^{t\sqrt{\kappa_1}}, \dots, e^{t\sqrt{\kappa_n}})$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit gilt

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau = \int_t^\infty \text{diag} \left(e^{-2\tau\sqrt{\kappa_1}}, \dots, e^{-2\tau\sqrt{\kappa_n}} \right) d\tau \\ &= \text{diag} \left(\frac{1}{2\sqrt{\kappa_1}} \cdot e^{-2t\sqrt{\kappa_1}}, \dots, \frac{1}{2\sqrt{\kappa_n}} \cdot e^{-2t\sqrt{\kappa_n}} \right). \end{aligned}$$

Wir bemerken zum einen, dass F ein exponentielles Polynom ist, und zum anderen, dass sich F schreiben lässt als

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

mit $W = \text{diag} \left(-\sqrt{\kappa_1}, \dots, -\sqrt{\kappa_n} \right)$ und damit in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) ist.

Die sich aufdrängende Frage ist, ob dies bei harmonischen Mannigfaltigkeiten stets der Fall ist. Wir werden dieser Frage in den folgenden Kapiteln weiter nachgehen. Zunächst untersuchen wir allerdings, welche Auswirkungen eine solche Darstellung unserer Abbildung F auf die Gestalt des stabilen und instabilen Tensors sowie des Krümmungstensors hat.

3 Folgerungen an den Krümmungstensor

Wir verwenden die Notationen aus Kapitel 2. Es sei M eine $(n + 1)$ -dimensionale vollständige Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte und c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Wir nehmen wieder an, dass das folgende Integral $\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$ existiert, wobei U den instabilen Jacobi-Tensor längs c bezeichnet, und betrachten die Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(n) := \{A \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n} \mid A \text{ ist positiv definit}\}$ mit

$$F(t) = \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau.$$

Im Fall von symmetrischen Räumen negativer Krümmung haben wir im vorangegangenen Kapitel gezeigt, dass sich F schreiben lässt als

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Nimmt man andererseits an, dass F die obige Gestalt hat, so lassen sich konkrete Ausdrücke für den stabilen und instabilen Jacobi-Tensor sowie den Krümmungstensor längs c in Abhängigkeit von W herleiten.

Satz 3.0.1. *Es gelte $F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$ für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter bezeichne mit Y den symmetrischen Anteil $\frac{W+W^T}{2}$ von W und mit X den schiefsymmetrischen Anteil $\frac{W-W^T}{2}$. Dann gilt*

(i) für den Riemannschen Krümmungstensor längs c

$$R(t) = e^{tX} \cdot ([X, Y] - Y^2) \cdot e^{-tX},$$

$$\text{wobei } [X, Y] - Y^2 = -\left(\frac{W - W^T}{2}\right)^2 - W^T \cdot W \text{ gilt,}$$

(ii) für den instabilen Jacobi-Tensor längs c

$$U(t) = e^{tX} \cdot e^{-tW} = e^{tX} \cdot e^{-t(X+Y)},$$

(iii) für den stabilen Jacobi-Tensor längs c

$$S(t) = e^{tX} \cdot F(0) \cdot e^{t(Y-X)} \cdot F(0)^{-1},$$

(iv) für die Weingarten-Abbildung der Horosphären

$$L(t) := U'(t) \cdot U(t)^{-1} = -e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX},$$

(v) für den Jacobi-Tensor A_0 längs c mit $A_0(0) = 0$ und $A_0'(0) = \text{id}$

$$A_0(t) = -e^{tX} \left(F(0) \cdot e^{t(Y-X)} - e^{-t(X+Y)} \cdot F(0) \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Leitet man die Gleichung

$$\int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau = F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

ab, so erhält man

$$-(U^T(t)U(t))^{-1} = e^{tW} \cdot (W \cdot F(0) + F(0) \cdot W^T) \cdot e^{tW^T}.$$

Damit ist

$$\left[e^{-tW} \cdot U(t)^{-1} \right] \cdot \left[e^{-tW} \cdot U(t)^{-1} \right]^T = -(W \cdot F(0) + F(0) \cdot W^T)$$

unabhängig von t und es gilt

$$\left[e^{-tW} \cdot U(t)^{-1} \right] \cdot \left[e^{-tW} \cdot U(t)^{-1} \right]^T \stackrel{t=0}{=} \text{I}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit ist $\psi(t)^T := e^{-tW} \cdot U(t)^{-1} \in \text{O}(n)$ und es gilt

$$U(t) = \psi(t) \cdot e^{-tW} \quad \text{mit} \quad \psi(0) = \text{I}.$$

Die Weingarten-Abbildung der Horosphären

$$L(t) := U'(t) \cdot U(t)^{-1} = \psi'(t) \cdot \psi(t)^{-1} - \psi(t) \cdot W \cdot \psi(t)^{-1}$$

ist symmetrisch (vgl. Lemma 1.3.4(iv)) und damit auch

$$\psi(t)^T \cdot L(t) \cdot \psi(t) = \psi(t)^{-1} \cdot \psi'(t) - W.$$

Da $\psi(t) \in O(n)$ ist, ist $\psi(t)^{-1} \cdot \psi'(t)$ schiefssymmetrisch. Aus der Symmetrie von $\psi(t)^{-1} \cdot \psi'(t) - W$ folgt damit

$$\begin{aligned}\psi(t)^{-1} \cdot \psi'(t) &= \frac{1}{2} \left(\psi(t)^{-1} \cdot \psi'(t) - (\psi(t)^{-1} \cdot \psi'(t))^T - W + W^T + W - W^T \right) \\ &= \frac{W - W^T}{2} = X.\end{aligned}$$

Aus $\psi'(t) = \psi(t) \cdot X$ und $\psi(0) = I$ folgt $\psi(t) = e^{tX}$ und damit folgt für die Weingarten-Abbildung der Horosphären

$$L(t) = X - e^{tX} \cdot W \cdot e^{-tX} = e^{tX} \cdot (X - W) \cdot e^{-tX} = -e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX}$$

und somit (iv).

Die Weingarten-Abbildung erfüllt die Riccati-Gleichung (vgl. Lemma 1.3.4(iv)). Das heißt, es gilt

$$\begin{aligned}R(t) &= -L'(t) - L(t)^2 = e^{tX} \cdot (X \cdot Y - Y \cdot X) \cdot e^{-tX} - e^{tX} \cdot Y^2 \cdot e^{-tX} \\ &= e^{tX} \cdot ([X, Y] - Y^2) \cdot e^{-tX}.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von X und Y und Ausmultiplizieren erhalten wir

$$[X, Y] - Y^2 = - \left(\frac{W - W^T}{2} \right)^2 - W^T \cdot W$$

und damit (i).

Weiter gilt

$$U(t) = \psi(t) \cdot e^{-tW} = e^{tX} \cdot e^{-tW} = e^{tX} \cdot e^{-t(X+Y)}$$

und damit (ii). Für den stabilen Jacobi-Tensor S längs c haben wir im Beweis von Lemma 2.1.1 die Formel

$$S(t) = U(t) \cdot F(t) \cdot F(0)^{-1}$$

hergeleitet. Durch Einsetzen von U und F erhalten wir

$$S(t) = e^{tX} \cdot e^{-t(X+Y)} \cdot e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T} \cdot F(0)^{-1} = e^{tX} \cdot F(0) \cdot e^{t(Y-X)} \cdot F(0)^{-1}$$

und damit (iii). Für den Jacobi-Tensor A_0 mit $A_0(0) = 0$ und $A'(0) = I$ haben wir im Beweis von Lemma 2.1.2 die Formel

$$A_0(t) = -U(t) \cdot (F(t) - F(0)) \cdot U(0)^T$$

hergeleitet. Durch Einsetzen erhalten wir wieder

$$\begin{aligned} A_0(t) &= -e^{tX} \cdot e^{-tW} \cdot \left(e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T} - F(0) \right) \\ &= -e^{tX} \left(F(0) \cdot e^{t(Y-X)} - e^{-t(X+Y)} \cdot F(0) \right) \end{aligned}$$

und damit (v). □

Bemerkungen.

- (i) Auch wenn die Abbildung F nicht in Standardform ist, lässt sich mit ihrer Kenntnis der Jacobi-Operator rekonstruieren.

Ist $F(t) = \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau$ bekannt, so ist auch $U(t)^T U(t)$ bekannt und damit auch die positiv definite Wurzel $H(t) = \sqrt{U(t)^T U(t)}$. Dann lässt sich $U(t)$ schreiben als $U(t) = \psi(t) \cdot H(t)$ für ein $\psi(t) \in O(n)$. Folgt man dem Vorgehen in dem obigen Beweis, so lässt sich ψ mittels H bestimmen. Damit lässt sich dann insbesondere auch U und der Jacobi-Operator bestimmen.

- (ii) Die Darstellung von F in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) erhält man nicht nur in symmetrischen Räumen negativer Krümmung (s. Kapitel 2.2), sondern auch unter der (schwächeren) Voraussetzung, dass die Geodätische c Bahn einer Ein-Parameter-Untergruppe von Isometrien von M ist.

Ist c eine solche, so lassen sich die Differentiale der Ein-Parameter-Untergruppe von Isometrien bezüglich einer parallelen Orthonormalbasis schreiben als $t \mapsto e^{tX}$ mit $X = -X^T$. Horosphären werden von Isometrien auf Horosphären abgebildet. Zudem ist die Weingarten-Abbildung dieser invariant unter Isometrien. Somit ist die Weingarten-Abbildung der Horosphären von der Form

$$U'(t) \cdot U(t)^{-1} = L(t) = -e^{tX} \cdot Y \cdot e^{-tX}$$

für eine konstante Matrix $Y \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$. Mit Hilfe dieser Gleichung sieht man mittels Ableiten leicht, dass der Ausdruck $e^{t(X+Y)} \cdot e^{-tX} \cdot U(t)$ konstant ist. Da dieser für $t = 0$ gleich der Identität ist, folgt damit

$$U(t) = e^{tX} \cdot e^{-t(X+Y)}$$

und folglich

$$(U^T(\tau)U(\tau))^{-1} = e^{\tau(X+Y)} \cdot e^{\tau(X+Y)^T}.$$

Da nach Annahme das Integral $\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau = \int_0^\infty e^{\tau(X+Y)} \cdot e^{\tau(X+Y)^T} d\tau$ existiert, konvergiert $e^{\tau(X+Y)} \cdot e^{\tau(X+Y)^T}$ gegen 0 für $\tau \rightarrow \infty$. Insbesondere gilt somit

$$(X + Y) \cdot \int_0^\infty e^{\tau(X+Y)} \cdot e^{\tau(X+Y)^T} d\tau + \int_0^\infty e^{\tau(X+Y)} \cdot e^{\tau(X+Y)^T} d\tau \cdot (X + Y)^T$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{d\tau} \left(e^{\tau(X+Y)} \cdot e^{\tau(X+Y)^T} \right) d\tau = -I.$$

Folglich ist $-e^{\tau(X+Y)} \cdot F(0) \cdot e^{\tau(X+Y)^T}$ eine Stammfunktion für $e^{t(X+Y)} \cdot e^{t(X+Y)^T}$ und es gilt

$$\int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1} d\tau = F(t) = e^{t(X+Y)} \cdot F(0) \cdot e^{t(X+Y)^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und F ist in Standardform gemäß 2.1.5(b).

Mannigfaltigkeiten, in denen alle Geodätische Bahn einer Ein-Parameter-Untergruppe von Isometrien sind, nennt man g.o.-Räume (vgl. [BTV95, Kapitel 2.2]), dabei steht „g.o.“ für den englischen Ausdruck „geodesic orbit“.

- (iii) Lässt sich unsere Abbildung F in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) schreiben, so zeigt (i) in dem obigen Satz, dass sich der Jacobi-Operator längs der Geodätischen c schreiben lässt als

$$R(t) = e^{tX} \cdot R(0) \cdot e^{-tX}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und eine von c abhängige schiefsymmetrische Matrix X . Hat der Jacobi-Operator längs jeder Geodätischen diese Darstellung, so nennt man die Mannigfaltigkeit einen \mathfrak{C}_0 -Raum (vgl. [BTV95, Kapitel 2.9, Proposition 1]).

Jeder \mathfrak{C}_0 -Raum ist auch ein sogenannter \mathfrak{C} -Raum. Dabei nennt man eine Mannigfaltigkeit einen \mathfrak{C} -Raum, wenn die Eigenwerte des Jacobi-Operators längs jeder Geodätischen konstant sind (vgl. [BTV95, Kapitel 2.8]).

Wir haben damit gezeigt, dass g.o.-Räume, die zusätzlich unsere Voraussetzungen an die Mannigfaltigkeit erfüllen, auch \mathfrak{C}_0 -Räume sind. Diese Aussage gilt sogar allgemein [BPV95, Proposition 4.10].

Die Klasse der \mathfrak{C} - beziehungsweise \mathfrak{C}_0 -Räume wurde von J. Berndt, F. Prüfer und L. Vanhecke eingeführt. Sie zählen zu den Klassen von Mannigfaltigkeiten, die in gewisser Weise ähnlich zu symmetrischen Räumen sind. Für weitere Informationen verweisen wir auf [BTV95, Kapitel 2] und [BPV95] sowie die darin enthaltenen Referenzen.

- (iv) Lässt sich unsere Abbildung F längs jeder Geodätischen der Mannigfaltigkeit in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) mittels der gleichen konstanten Matrix W schreiben, so sind die Eigenwerte längs jeder Geodätischen konstant und für jede Geodätische gleich. Mannigfaltigkeiten, die diese Eigenschaft besitzen, heißen globale Osserman-Räume (vgl. [Nik05a]).

Flache und lokal symmetrische Räume vom Rang 1 besitzen stets die globale Osserman-Eigenschaft. R. Osserman vermutete, dass auch die Umkehrung gilt [Oss90]. Die Osserman-Vermutung wurde bis auf den Fall von 16-dimensionalen Mannigfaltigkeiten vollständig bewiesen [Nik05a, Nik04].

Mannigfaltigkeiten, in denen die Eigenwerte des Jacobi-Operators $R_v := R(\cdot, v)v$ nicht von $v \in S_p M$ abhängen (gegebenenfalls aber von $p \in M$), heißen punktweise Osserman-Räume. Auch hier wurde die Osserman-Vermutung außer in den Dimensionen 2, 4 und 16 bewiesen [Nik05a, Nik04].

Im folgenden Kapitel untersuchen wir, ob sich das in Kapitel 2.1 eingeführte F auch in Damek-Ricci-Räumen – einer anderer Beispielklasse harmonischer Mannigfaltigkeiten – in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) schreiben lässt.

4 Damek-Ricci-Räume

Neben den lokal symmetrischen Räumen vom Rang 1 sind Damek-Ricci-Räume die einzigen bekannten nicht trivialen, nicht flachen Beispiele von harmonischen Mannigfaltigkeiten. Sie wurden nach E. Damek und F. Ricci benannt. Diese zeigten in [DR92], dass diese harmonisch aber zum Teil nicht symmetrisch sind, und lieferten damit Gegenbeispiele für die Lichnerowicz-Vermutung.

Im Folgenden definieren wir Damek-Ricci-Räume und fassen einige wichtige Eigenschaften zusammen. Im Anschluss zeigen wir, dass das in Kapitel 2.1 eingeführte F in nicht symmetrischen Damek-Ricci-Räumen nicht längs jeder Geodätischen von Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) sein kann. Um diese F besser zu verstehen, geben wir anschließend eine Formel für allgemeine Jacobi-Vektorfelder in einer speziellen Klasse von nicht symmetrischen Damek-Ricci-Räumen an. Dabei orientieren wir uns an Beispiel 2 in [Nik05b], und bemerken, dass die dort angegebenen Gleichungen einen Fehler aufweisen. Abschließend beweisen wir ein Kriterium, unter welchen Bedingungen ein Jacobi-Vektorfeld in dieser speziellen Klasse instabil ist.

Wir orientieren uns in unserer Darstellung an [BTV95, Kapitel 4], wo auch detailliertere Informationen zu Damek-Ricci-Räumen zu finden sind.

4.1 Definition und wichtige Eigenschaften

Damek-Ricci-Räume sind bestimmte auflösbare, mit einer linksinvarianten Metrik ausgestattete Lie-Gruppen. Sie sind Erweiterungen von verallgemeinerten Heisenberg-Gruppen. Wir wiederholen die Konstruktion (vgl. [BTV95, 3.1.1, 4.1.1]).

Es seien \mathfrak{v} und \mathfrak{z} reelle Vektorräume der Dimension n und $m \in \mathbb{N}$ und $\omega: \mathfrak{v} \times \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{z}$ eine schiefsymmetrische bilineare Abbildung. Weiter sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{n}}$ ein Skalarprodukt auf der direkten Summe $\mathfrak{n} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z}$, so dass \mathfrak{v} und \mathfrak{z} zueinander senkrecht sind. Wir definieren einen \mathbb{R} -Algebra-Homomorphismus

$$J: \mathfrak{z} \rightarrow \text{End}(\mathfrak{v}), Z \mapsto J_Z$$

durch

$$\langle J_Z U, V \rangle_{\mathfrak{n}} = \langle \omega(U, V), Z \rangle_{\mathfrak{n}} \quad \text{für alle } U, V \in \mathfrak{v}, Z \in \mathfrak{z}.$$

Weiter definieren wir eine Lie-Algebren-Struktur auf \mathfrak{n} mittels

$$[U + X, V + Y]_{\mathfrak{n}} := \omega(U, V) \quad \text{für alle } U, V \in \mathfrak{v}, X, Y \in \mathfrak{z}.$$

Die Lie-Algebra \mathfrak{n} heißt verallgemeinerte Heisenberg-Algebra, falls

$$J_Z^2 = -|Z|_{\mathfrak{n}}^2 \cdot \text{id}_{\mathfrak{v}} \quad \text{für alle } Z \in \mathfrak{z}$$

gilt, wobei $|\cdot|_{\mathfrak{n}} := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{n}}}$ gelte. Die zugehörige einfach zusammenhängende Lie-Gruppe N zusammen mit der induzierten linksinvarianten Riemannschen Metrik heißt verallgemeinerte Heisenberg-Gruppe.

Mit Hilfe der verallgemeinerten Heisenberg-Algebra können wir nun Damek-Ricci-Räume definieren. Dafür sei \mathfrak{a} ein weiterer eindimensionaler reeller Vektorraum und A ein Vektor ungleich 0 in \mathfrak{a} . Wir betrachten den neuen Vektorraum

$$\mathfrak{s} := \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{a}.$$

Jeder Vektor in \mathfrak{s} kann eindeutig geschrieben werden als $V + Y + sA$ für $V \in \mathfrak{v}$, $Y \in \mathfrak{z}$ und $s \in \mathbb{R}$ und wir werden Vektoren in \mathfrak{s} stets auf diese Weise schreiben. Dafür benutzen wir U, V, W für Vektoren in \mathfrak{v} , X, Y, Z für Vektoren in \mathfrak{z} und r, s, t für reelle Zahlen.

Wir definieren ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und eine Lie-Klammer $[\cdot, \cdot]$ auf \mathfrak{s} wie folgt

$$\langle U + X + rA, V + Y + sA \rangle := \langle U + X, V + Y \rangle_{\mathfrak{n}} + r \cdot s$$

und

$$[U + X + rA, V + Y + sA] := [U, V]_{\mathfrak{n}} + \frac{1}{2}rV - \frac{1}{2}sU + rY - sX.$$

Damit wird \mathfrak{s} eine 2-Schritt-nilpotente Lie-Algebra mit Skalarprodukt. Die zugehörige einfach zusammenhängende Lie-Gruppe zusammen mit der induzierten linksinvarianten Metrik bezeichnen wir mit S und nennen sie einen Damek-Ricci-Raum.

Damek-Ricci-Räume sind nach [DR92] immer harmonisch, allerdings nicht immer symmetrisch. Ein Damek-Ricci-Raum S ist genau dann ein symmetrischer Raum, wenn die zugehörige Heisenberg-Algebra \mathfrak{n} die sogenannte J^2 -Bedingung erfüllt (vgl. [BTV95, 4.1.9]). Dabei erfüllt \mathfrak{n} die J^2 -Bedingung, wenn für alle $X, Y \in \mathfrak{z}$ mit $\langle X, Y \rangle_{\mathfrak{n}} = 0$ und alle $U \in \mathfrak{v} \setminus \{0\}$ ein $Z \in \mathfrak{z}$ existiert mit $J_X J_Y U = J_Z U$ (vgl. [BTV95, 3.1.3]). Die J^2 -Bedingung ist wiederum genau dann erfüllt, wenn S negative Schnittkrümmung hat (vgl. [Dot97]).

4.2 F ist nicht immer in Standardform

Es sei S ein nicht symmetrischer Damek-Ricci-Raum. Nach [BTV95, 4.4, Theorem] ist S eine harmonische Mannigfaltigkeit. Zudem hat S nicht positive Schnittkrümmung

(vgl. [BTV95, 4.1.7, Proposition 2]). Insbesondere ist S dann vollständig und besitzt keine konjugierten Punkte. Zudem existiert das Integral $\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$ längs beliebiger Geodätischer c . Wir sind also in der Situation aus Kapitel 2 und betrachten wieder

$$F(t) = \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$$

längs beliebiger Geodätischer c .

Angenommen für jede Geodätische c wäre F in Standardform gemäß 2.1.5(b), das heißt, für jede Geodätische c existiere ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann wäre S nach Bemerkung (iii) nach Satz 3.0.1 ein sogenannter \mathfrak{C} -Raum. Nach [BTV95, 4.3, Theorem 1] ist ein Damek-Ricci-Raum genau dann ein \mathfrak{C} -Raum, wenn er symmetrisch ist. Folglich kann F nicht für jede Geodätische c in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) sein. Es gibt allerdings Geodätische, für die das der Fall ist.

Bezeichnet man mit c_A die Geodätische, die im Einheitselement von S in Richtung A startet (s. Kapitel 4.1), so ist c_A Bahn einer Ein-Parameter-Untergruppe von Isometrien von S (vgl. [BTV95, Kapitel 4.1.11, Theorem 1]). Nach Bemerkung (ii) nach Satz 3.0.1 ist das zu c_A gehörige F somit in Standardform.

Im Hinblick auf die Gestalt von F in symmetrischen Räumen vom Rang 1 (vgl. Kapitel 2.2) ist es folglich interessant, die Abbildungen F , welche nicht in Standardform sind, besser zu verstehen. Wir zeigen in Kapitel 5.1, dass Lösungen unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) im Spezialfall $n = 2$ exponentielle Polynome sind. In Kapitel 6.1 begründen wir, dass diese Annahme auch in höheren Dimensionen plausibel ist. Insbesondere ist es interessant, ob die F , die sich in den nicht symmetrischen Damek-Ricci-Räumen nicht in Standardform schreiben lassen, exponentielle Polynome sind oder nicht.

Zur Untersuchung dieser Frage berechnen wir im Folgenden allgemeine und instabile Jacobi-Vektorfelder längs Geodätischer, für die nach dem Beweis von [BTV95, 4.3, Theorem 1] die Abbildung F nicht in Standardform sein kann. Aufgrund der Komplexität der entstehenden Ausdrücke für die instabilen Jacobi-Tensoren sehen wir keine praktikable Möglichkeit F konkret zu berechnen. Die Frage, ob F ein exponentielles Polynom ist, können wir damit nicht abschließend beantworten.

4.3 Allgemeine Jacobi-Vektorfelder

Wir geben eine Formel für allgemeine Jacobi-Vektorfelder in Damek-Ricci-Räumen im Spezialfall $\dim(\mathfrak{z}) = 2$ an. Dabei orientieren wir uns in unserem Vorgehen an Beispiel 2 in

[Nik05b], bemerken aber, dass in einer der dort angegebenen Differentialgleichungen ein Fehler ist. Wir weisen im Verlauf unserer Rechnungen darauf hin, wo Y. Nikolayevskys Fehler liegt.

Es sei S ein Damek-Ricci-Raum mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$ und es gelte $\dim(\mathfrak{z}) = 2$ (vgl. Kapitel 4.1). Insbesondere folgt dann aus der Klassifikation der verallgemeinerten Heisenberg-Algebra, dass $\dim(S) = 4k + 3$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt (vgl. [BTV95, 3.1.2]).

Es sei $V + Y + sA \in \mathfrak{s}$ ein Einheitsvektor mit $V \neq 0$, $Y \neq 0$ und $s \neq 0$ und γ die Geodätische mit $\gamma(0) = e$ und $\gamma'(0) = V + Y + sA$, wobei e das neutrale Element in S bezeichne. Identifiziert man die Tangentialräume $T_{\gamma(t)}S$ mittels Linksverschiebung, so lässt sich $\gamma'(t)$ bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{s} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$ nach [BTV95, 4.1.11, Theorem 2] schreiben als

$$\gamma'(t) = V(t) + Y(t) + s(t)A$$

mit

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{\sqrt{h(t)}}{\chi(t)} \left((1 - s\vartheta(t))^2 - |Y|^2\vartheta^2(t) \right) V + 2\frac{\sqrt{h(t)}}{\chi(t)} \vartheta(t)(1 - s\vartheta(t)) J_Y V \\ &=: a(t)V + b(t)J_Y V, \end{aligned}$$

$$Y(t) = h(t)Y$$

und

$$s(t) = (\ln h)'(t),$$

wobei die Funktionen ϑ , χ und h wie folgt definiert sind

$$\vartheta(t) := \tanh(t/2), \quad \chi := (1 - s\vartheta)^2 + |Y|^2\vartheta^2 \quad \text{und} \quad h := \frac{1 - \vartheta^2}{\chi}.$$

Weiter gilt

$$|V(t)|^2 = |V|^2 h(t) \quad \text{und} \quad |Y(t)|^2 = |Y|^2 h^2(t).$$

Das Ziel ist es, Jacobi-Vektorfelder beziehungsweise Jacobi-Tensoren längs γ zu bestimmen.

Nach [BTV95, 4.2, Theorem (vi)] lässt sich $T_{\gamma(t)}S$ orthogonal zerlegen in $T_{\gamma(t)}S = \mathfrak{s}_4(t) \oplus \mathfrak{p}(t) \oplus \mathfrak{q}(t)$ mit $R(t)$ -invarianten Teilräumen

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_4(t) &= \text{span}\{V(t), J_{Y(t)}V(t), Y(t), s(t)A\}, \\ \mathfrak{p}(t) &= \ker(\text{ad}(V(t)) \cap \ker(\text{ad}(J_{Y(t)}V(t))), \\ \mathfrak{q}(t) &= \text{span}\{Y(t)^\perp, J_{Y(t)^\perp}V(t), J_{Y(t)^\perp}J_{Y(t)}V(t)\}, \end{aligned}$$

wobei $Y(t)^\perp$ das orthogonale Komplement von $Y(t)$ in \mathfrak{z} bezeichnet und die Abbildung ad durch $\text{ad}(V): \mathfrak{v} \rightarrow \mathfrak{z}$, $U \mapsto [U, V]$, $V \in \mathfrak{v}$, gegeben ist.

Eine direkte Rechnung zeigt, dass der Teilraum $\mathfrak{b} := \text{span}\{V(t), J_{Y(t)}V(t)\}$ unabhängig von t ist. Da zudem $\gamma'(t) \in \mathfrak{s}_4 := \mathfrak{s}_4(0)$ ist, sind die Teilräume $\mathfrak{s}_4(t)$, $\mathfrak{p}(t)$ und $\mathfrak{q}(t)$ parallel und wir schreiben $\mathfrak{s}_4 := \mathfrak{s}_4(t)$, $\mathfrak{p} := \mathfrak{p}(t)$ und $\mathfrak{q} := \mathfrak{q}(t)$.

Nach Voraussetzung ist \mathfrak{z} zweidimensional, folglich ist Y^\perp eindimensional. Sei X ein Einheitsvektor in Y^\perp . Nach [BTV95, 4.2, Theorem (vi)(3)] ist 0 der einzige Eigenwert des Endomorphismus $K^2: Y^\perp \rightarrow Y^\perp$, wobei K definiert ist als

$$K := K_{V,Y}: Y^\perp \rightarrow Y^\perp, Z \mapsto [\hat{V}, J_Z J_Y \hat{V}] \text{ mit } \hat{V} := \frac{V}{|V|}, \hat{Y} := \frac{Y}{|Y|}.$$

Es gilt folglich $J_X J_Y V \in \ker(\text{ad}(V))$ (vgl. [BTV95, 3.1.12]).

Da Y^\perp eindimensional ist, ist \mathfrak{q} höchstens dreidimensional. Nach [BTV95, 4.2, Theorem (vi)(3)] ist \mathfrak{q} auch mindestens dreidimensional.

Weiter ist \mathfrak{s}_4 tangential an einem totalgeodätischen $\mathbb{C}H^2 \subseteq S$ (vgl. [BTV95, 4.1.11]) und $R(t)|_{\mathfrak{p}} = -\frac{1}{4} \text{id}_{\mathfrak{p}}$ (vgl. [BTV95, 4.2, Theorem (vi)(2)]). Folglich sind Jacobi-Tensoren auf dem $(4k-1)$ -dimensionalen Raum $(\mathfrak{s}_4 \oplus \mathfrak{p}) \cap \gamma'(t)^\perp$ diagonalisierbar. Die Diagonaleinträge φ_j , $j = 1, \dots, (4k-1)$, errechnen sich als Lösungen der Differentialgleichung

$$\varphi_j''(t) - \kappa_j \cdot \varphi_j(t) = 0,$$

das heißt

$$\varphi_j(t) = c_j \cdot e^{\sqrt{\kappa_j}t} + d_j \cdot e^{-\sqrt{\kappa_j}t}$$

für Konstanten $c_j, d_j \in \mathbb{R}$, wobei $\kappa_1 = 1$ und $\kappa_j = 1/4$ für $j = 2, \dots, (4k-1)$ ist.

Die Jacobi-Vektorfelder bzw. Jacobi-Tensoren längs γ auf dem dreidimensionalen Raum \mathfrak{q} zu bestimmen, ist weitaus komplizierter. Setze dafür $\mu := s + \iota|Y|$ und betrachte die komplexe Funktion

$$\phi(t) = \mu \sinh(t/2) - \cosh(t/2) \tag{1}$$

und die reelle Funktion

$$f(t) = \phi(t) \cdot \bar{\phi}(t) = (s \sinh(t/2) - \cosh(t/2))^2 + |Y|^2 \sinh^2(t/2). \tag{2}$$

Weiter sei $X \in Y^\perp \subseteq \mathfrak{z}$ ein Einheitsvektor. Wir bemerken, dass $f = 1/h$ gilt. Unter Verwendung der Formeln für den Levi-Civita-Zusammenhang und den Riemannschen Krümmungstensor in Damek-Ricci-Räumen (vgl. [BTV95, 4.1.6, 4.1.7]) und den Beobachtungen, dass $[V, J_X J_Y V] = 0$ und

$$f''(t) - f(t) + \frac{1}{2}|V|^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2}f'(t)a(t) + f(t)a'(t) + |Y|^2 b(t) = 0$$

sowie

$$\frac{1}{2}f'(t)b(t) + f(t)b'(t) - a(t) = 0$$

gilt, sieht man mittels direkter Rechnung, dass $f(t)X$ ein Jacobi-Vektorfeld ist.

Nun sei $\tilde{Z}(t) = Z(t) + g(t)X = \alpha(t)J_X V + \beta(t)J_X J_Y V + g(t)X \in \mathfrak{q}$ für Funktionen $\alpha, \beta, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Vektorfeld in \mathfrak{q} . Unter Berücksichtigung, dass $f(t)X$ ein Jacobi-Vektorfeld ist, zeigen direkte Rechnungen, dass \tilde{Z} genau dann ein Jacobi-Vektorfeld ist, wenn

$$0 = \frac{1}{f(t)}(g(t)f''(t) - f(t)g''(t)) + (\ln h)'(t)\alpha(t)a(t)|V|^2 + (\ln h)'(t)\beta(t)b(t)|J_Y V|^2 - \alpha'(t)a(t)|V|^2 - \alpha(t)a'(t)|V|^2 - \beta'(t)b(t)|J_Y V|^2 - \beta(t)b'(t)|J_Y V|^2$$

und

$$0 = \alpha''(t) - \beta'(t)h(t)|Y|^2 - \frac{1}{2}\beta(t)h'(t)|Y|^2 - \frac{1}{4}\alpha(t) - \frac{1}{4}\alpha(t)h^2(t)|Y|^2 - \alpha(t)a^2(t)|V|^2 - \beta(t)a(t)b(t)|J_Y V|^2 + \frac{a(t)}{f(t)}(g(t)f'(t) - f(t)g'(t))$$

sowie

$$0 = \beta''(t) + \alpha'(t)h(t) + \frac{1}{2}\alpha(t)h'(t) - \frac{1}{4}\beta(t) - \frac{1}{4}\beta(t)h^2(t)|Y|^2 - \alpha(t)a(t)b(t)|V|^2 - \beta(t)b^2(t)|J_Y V|^2 + \frac{b(t)}{f(t)}(g(t)f'(t) - f(t)g'(t))$$

gelten, was wiederum äquivalent zu den folgenden beiden Gleichungen ist

$$Z''(t) - J_{Y(t)}Z'(t) + \frac{f'(t)}{2f(t)}J_{Y(t)}Z(t) - \frac{1}{4}(1 + |Y(t)|^2)Z(t) + \frac{c}{f(t)}J_X V(t) = 0$$

und

$$g(t)f'(t) - f(t)g'(t) + f(t)\langle J_X Z(t), V(t) \rangle = c$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, wobei mit $Z'(t)$ beziehungsweise $Z''(t)$ die Ausdrücke $\alpha'(t)J_X V + \beta'(t)J_X J_Y V$ beziehungsweise $\alpha''(t)J_X V + \beta''(t)J_X J_Y V$ gemeint sind.

Wir schreiben $W(t) = J_X Z(t) = -\alpha(t)V - \beta(t)J_Y V$ und $J = |Y(t)|^{-1}J_{Y(t)} = J_{\frac{Y}{|Y|}}$. Dann ist $W(t)$ in $\mathfrak{b} = \text{span}\{V, J_Y V\}$ und $J: \mathfrak{b} \rightarrow \mathfrak{b}$ ist ein schiefsymmetrischer orthogonaler Operator (vgl. [BTV95, 3.1.3]). Betrachte die komplexwertigen Funktionen

$$w(t) := \frac{1}{|V|} (\langle W(t), V \rangle + \imath \langle W(t), J_Y V \rangle) = -\alpha(t)|V| - \imath \beta(t)|J_Y V|$$

und

$$v(t) := \frac{1}{|V|} (\langle V(t), V \rangle + i \langle V(t), JV \rangle) = a(t)|V| + ib(t)|J_Y V|. \quad (3)$$

Eine direkte Rechnung oder die Tatsache, dass $J_X J_Y = -J_Y J_X$ gilt (vgl. [BTV95, 3.1.3]), zeigt dann, dass sich die obigen Gleichungen schreiben lassen als

$$w''(t) + i|Y| \frac{w'(t)}{f(t)} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{|Y|^2}{f^2(t)} + \frac{2i|Y|f'(t)}{f^2(t)} \right) w(t) - \frac{c \cdot v(t)}{f(t)} = 0$$

und

$$g(t)f'(t) - f(t)g'(t) + f(t) \operatorname{Re}(w(t)\bar{v}(t)) = c.$$

Bemerkung. Die erste Gleichung unterscheidet sich von der entsprechenden Gleichung in Beispiel 2 in [Nik05b] um zwei Vorzeichen. Während wir bis zu diesem Punkt Y. Nikolayevkys Vorgehen gefolgt sind und die Ergebnisse übereingestimmt haben, unterscheiden sich die Ergebnisse nun von denen in Beispiel 2 in [Nik05b]. Zudem werden wir im anschließenden Kapitel ein Kriterium angeben, unter welchen Bedingungen ein Jacobi-Vektorfeld instabil ist. Mit Hilfe dieses Kriteriums berechnen wir den instabilen Jacobi-Tensor. Diese Ergebnisse sind in Beispiel 2 in [Nik05b] nicht zu finden.

Mittels Standardverfahren zum Lösen von linearen, nicht homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung errechnet man, dass die Lösung der ersten Gleichung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \left(\frac{2c|V|}{(s + i|Y| + 1)(s + i|Y| - 1)} + A \cdot \phi(t) \sinh(t/2) + B \cdot \phi(t) \cosh(t/2) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \left(\frac{2c|V|}{\mu^2 - 1} + A \cdot \phi(t) \sinh(t/2) + B \cdot \phi(t) \cosh(t/2) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

für $A, B \in \mathbb{C}$. Die zweite Gleichung lässt sich schreiben als

$$g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot g(t) + \left(\operatorname{Re}(w(t)\bar{v}(t)) - \frac{c}{f(t)} \right).$$

Wegen $\int \frac{f'}{f} dt = \ln(f)$ ist eine beliebige Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$g(t) = f(t) \left(D + \int_0^t \left(\frac{\operatorname{Re}(w(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c}{f^2(\tau)} \right) d\tau \right) \quad (5)$$

für ein $D \in \mathbb{R}$. Insgesamt haben Jacobi-Vektorfelder in \mathfrak{g} damit die Form

$$\tilde{Z}(t) = -\operatorname{Re}(w(t))J_X \frac{V}{|V|} - \operatorname{Im}(w(t))J_X J_Y \frac{V}{|V|} + g(t)X \quad (6)$$

mit w wie in (4) und g wie in (5) für Konstanten $c, D \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{C}$.

Die Funktion g lässt sich noch weiter berechnen. Zunächst beobachtet man, dass

$$\frac{v(t)}{\sqrt{f(t)}} = \frac{1}{\sqrt{f(t)}} (a(t)|V| + \imath b(t)|J_Y V|) = \frac{|V|}{f^2(t)} \bar{\phi}^2(t) = \frac{|V|}{\phi^2(t)}$$

gilt. Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{w(t)\bar{v}(t)}{f(t)} &= \frac{1}{f(t)} \cdot \frac{\bar{v}(t)}{\sqrt{f(t)}} \left(\frac{2c|V|}{\mu^2 - 1} + A \cdot \phi(t) \sinh(t/2) + B \cdot \phi(t) \cosh(t/2) \right) \\ &= \frac{1}{f(t)} \cdot \frac{|V|}{\bar{\phi}^2(t)} \left(\frac{2c|V|}{\mu^2 - 1} + A \cdot \phi(t) \sinh(t/2) + B \cdot \phi(t) \cosh(t/2) \right) \\ &= \frac{2c|V|^2}{\mu^2 - 1} \cdot \frac{1}{\phi(t)\bar{\phi}^3(t)} + A|V| \cdot \frac{\sinh(t/2)}{\bar{\phi}^3(t)} + B|V| \cdot \frac{\cosh(t/2)}{\bar{\phi}^3(t)}. \end{aligned}$$

Mittels der Integrale

- $\int \frac{\sinh(t/2)}{\bar{\phi}^3(t)} dt = \frac{\bar{\mu}^2 - 1 + \bar{\mu} \sinh(t) - \bar{\mu}^2 \cosh(t)}{(\bar{\mu}^2 - 1)\bar{\phi}^2(t)},$
- $\int \frac{\cosh(t/2)}{\bar{\phi}^3(t)} dt = \frac{\sinh(t) - \bar{\mu} \cosh(t)}{(\bar{\mu}^2 - 1)\bar{\phi}^2(t)},$
- $\int \operatorname{Re} \left(\frac{2c|V|^2}{(\mu^2 - 1)} \cdot \frac{1}{\phi(t)\bar{\phi}^3(t)} \right) - \frac{c}{f^2(t)} dt = c \int \operatorname{Re} \left(\frac{2(1 - \mu\bar{\mu})}{\phi(t)\bar{\phi}^3(t)(\mu^2 - 1)} \right) - \frac{1}{\phi^2(t)\bar{\phi}^2(t)} dt$
 $= c \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{2(1 - \mu\bar{\mu})}{(\mu^2 - 1)(\bar{\mu} - \mu)\bar{\phi}^2(t)} - \frac{4 \sinh(t/2)}{(\mu^2 - 1)\bar{\phi}(t)} \right)$

lässt sich g bei Bedarf konkret berechnen.

4.4 Instabile Jacobi-Vektorfelder

Mit Hilfe der allgemeinen Darstellung für Jacobi-Vektorfelder in Damek-Ricci-Räumen im Spezialfall $\dim(\mathfrak{g}) = 2$ aus dem vorangegangenen Kapitel werden wir zunächst ein Kriterium für instabile Jacobi-Vektorfelder herleiten und dann den instabilen Jacobi-Tensor U bestimmen.

Auf dem Raum $(\mathfrak{s}_4 \oplus \mathfrak{p}) \cap \gamma'(t)^\perp$ ist dieser nach vorherigen Überlegungen diagonalisierbar. Die Diagonaleinträge sind e^t mit Multiplizität 1 und $e^{t/2}$ mit Multiplizität $(4k-2)$ (vgl. Kapitel 2.2).

Auf dem Raum \mathfrak{q} betrachten wir zunächst ein allgemeines Jacobi-Vektorfeld

$$\tilde{Z}(t) = Z(t) + g(t)X,$$

wobei wir die zu Z gehörigen w und g wieder schreiben als

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \left(\frac{2c|V|}{\mu^2 - 1} + A \cdot \phi(t) \sinh(t/2) + B \cdot \phi(t) \cosh(t/2) \right)$$

und

$$g(t) = f(t) \left(D + \int_0^t \left(\frac{\operatorname{Re}(w(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c}{f^2(\tau)} \right) d\tau \right)$$

für Konstanten $c, D \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{C}$. Das Normquadrat von \tilde{Z} ist dann gegeben als

$$|w(t)|^2 + g(t)^2.$$

Damek-Ricci-Räume haben Schnittkrümmung $K \leq 0$ (vgl. [BTV95, 4.1.7, Proposition 2]), so dass $t \mapsto |\tilde{Z}(t)|$ jeweils konvexe Funktionen sind (vgl. [Bal95, Lemma 2.3 in Kapitel IV]). Ist \tilde{Z} ein instabiles Jacobi-Vektorfeld, so konvergiert $|\tilde{Z}(t)|$ für $t \rightarrow -\infty$ gegen eine Konstante ≥ 0 . Damit ist \tilde{Z} genau dann ein instabiles Jacobi-Vektorfeld, wenn $|w(t)|$ und $g(t)$ für $t \rightarrow -\infty$ konvergieren.

Es ist

$$\begin{aligned} |w(t)|^2 &= w(t) \cdot \bar{w}(t) \\ &= \frac{1}{f(t)} \cdot \frac{4c^2|V|^2}{(\mu^2 - 1)(\bar{\mu}^2 - 1)} \\ &\quad + \left(\frac{2c|V|\bar{A}}{(\mu^2 - 1)\phi(t)} + \frac{2c|V|A}{(\bar{\mu}^2 - 1)\bar{\phi}(t)} \right) \sinh(t/2) \\ &\quad + \left(\frac{2c|V|\bar{B}}{(\mu^2 - 1)\phi(t)} + \frac{2c|V|B}{(\bar{\mu}^2 - 1)\bar{\phi}(t)} \right) \cosh(t/2) \\ &\quad + \left(A \sinh(t/2) + B \cosh(t/2) \right) \left(\bar{A} \sinh(t/2) + \bar{B} \cosh(t/2) \right). \end{aligned}$$

Weiter gilt $f(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow -\infty$ und damit

$$\frac{1}{f(t)} \cdot \frac{4c^2|V|^2}{(\mu^2 - 1)(\bar{\mu}^2 - 1)} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow -\infty.$$

Zudem konvergiert

$$\frac{\sinh(t/2)}{\phi(t)} \rightarrow \frac{1}{\mu+1} \quad \text{und} \quad \frac{\cosh(t/2)}{\phi(t)} \rightarrow -\frac{1}{\mu+1}$$

für $t \rightarrow -\infty$ und damit konvergieren die mittleren beiden Summanden. Schließlich ist

$$\begin{aligned} & \left(A \sinh(t/2) + B \cosh(t/2) \right) \left(\bar{A} \sinh(t/2) + \bar{B} \cosh(t/2) \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{-t} \left((\operatorname{Re}(A) - \operatorname{Re}(B))^2 + (\operatorname{Im}(A) - \operatorname{Im}(B))^2 \right) \\ & \quad + \frac{1}{4} e^t \left((\operatorname{Re}(A) + \operatorname{Re}(B))^2 + (\operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B))^2 \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \left(-\operatorname{Re}(A)^2 - \operatorname{Im}(A)^2 + \operatorname{Re}(B)^2 + \operatorname{Im}(B)^2 \right) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Folglich konvergiert der letzte Summand für $t \rightarrow -\infty$ genau dann, wenn $A = B$ gilt. In diesem Fall konvergiert der Ausdruck auch gegen 0. Für $A = B$ konvergiert auch die Summe der mittleren Summanden gegen 0.

Wir haben also insgesamt gezeigt, dass $|w(t)|$ für $t \rightarrow -\infty$ genau dann konvergiert, wenn $A = B$ gilt. In diesem Fall ist der Grenzwert auch stets gleich 0.

Unter dieser Annahme untersuchen wir nun, unter welchen Bedingungen $g(t)$ für $t \rightarrow -\infty$ konvergiert. Dafür bemerken wir zunächst, dass

- $\int_0^{-\infty} \frac{\sinh(t/2)}{\bar{\phi}^3(t)} dt = -\frac{1}{(\bar{\mu}+1)^2},$
- $\int_0^{-\infty} \frac{\cosh(t/2)}{\bar{\phi}^3(t)} dt = \frac{\bar{\mu}+2}{(\bar{\mu}+1)^2},$
- $\int_0^{-\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{2c|V|^2}{(\mu^2-1)} \cdot \frac{1}{\phi(t)\bar{\phi}^3(t)} \right) - \frac{c}{f^2(t)} dt = c \left(\frac{\mu^2\bar{\mu} + \mu\bar{\mu}^2 - 3\mu - 3\bar{\mu} + 4}{(\mu^2-1)(\bar{\mu}^2-1)} \right)$

gilt. Wegen $f(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow -\infty$ ist eine notwendige Bedingung, dass $g(t)$ für $t \rightarrow -\infty$ konvergiert, dass

$$D = - \int_0^{-\infty} \left(\frac{\operatorname{Re}(w(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c}{f^2(\tau)} \right) d\tau$$

gilt. Wir zeigen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Es gelte also

$$D = - \int_0^{-\infty} \left(\frac{\operatorname{Re}(w(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c}{f^2(\tau)} \right) d\tau.$$

Dann sind $t \mapsto \frac{1}{f(t)}$ und

$$t \mapsto D + \int_0^t \left(\frac{\operatorname{Re}(w(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c}{f^2(\tau)} \right) d\tau$$

zwei differenzierbare Funktionen, die für $t \rightarrow -\infty$ gegen 0 konvergieren. Nach dem Kriterium von L'Hospital konvergiert g – der Quotient der beiden Funktionen – gegen den Grenzwert des Quotienten der Ableitungen. Dieser ist

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\operatorname{Re}(w(t)\bar{v}(t))}{f(t)} - \frac{c}{f^2(t)}}{-\frac{f'(t)}{f^2(t)}} &= -\frac{f^2(t) \frac{\operatorname{Re}(w(t)\bar{v}(t))}{f(t)} - c}{f'(t)} \\ &= -\frac{\operatorname{Re}\left(\frac{2c|V|^2}{\mu^2-1} \cdot \frac{\phi(t)}{\bar{\phi}(t)} + A|V| \cdot \frac{\phi^2(t)\sinh(t/2)}{\bar{\phi}(t)} + B|V| \cdot \frac{\phi^2(t)\cosh(t/2)}{\bar{\phi}(t)}\right) - c}{\phi'(t)\bar{\phi}(t) + \phi(t)\bar{\phi}'(t)} \end{aligned}$$

und konvergiert gegen 0 für $t \rightarrow -\infty$, denn es gilt $A = B$ und

- $\frac{\phi(t)}{\bar{\phi}(t)} \rightarrow \frac{\mu+1}{\bar{\mu}+1}$,
- $\phi'(t)\bar{\phi}(t) + \phi(t)\bar{\phi}'(t) = f'(t) \rightarrow -\infty$,
- $\frac{\phi^2(t)\sinh(t/2)}{\bar{\phi}(t)(\phi'(t)\bar{\phi}(t) + \phi(t)\bar{\phi}'(t))} \rightarrow -\frac{\mu+1}{(\bar{\mu}+1)^2}$,
- $\frac{\phi^2(t)\cosh(t/2)}{\bar{\phi}(t)(\phi'(t)\bar{\phi}(t) + \phi(t)\bar{\phi}'(t))} \rightarrow \frac{\mu+1}{(\bar{\mu}+1)^2}$

für $t \rightarrow -\infty$. Insbesondere gilt also $g(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow -\infty$. Insgesamt haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 4.4.1. *Es sei S ein Damek-Ricci-Raum mit zugehöriger Lie-Algebra $\mathfrak{s} = \mathfrak{v} \oplus \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{a}$ und es gelte $\dim(\mathfrak{z}) = 2$.*

Es sei $V + Y + sA \in \mathfrak{s}$ ein Einheitsvektor mit $V \neq 0$, $Y \neq 0$ und $s \neq 0$ und γ die Geodätische mit $\gamma(0) = e$ und $\gamma'(0) = V + Y + sA$, wobei e das neutrale Element in S bezeichne. Weiter sei $X \in \mathfrak{z}$ ein zu Y orthogonaler Einheitsvektor und

$$\tilde{Z}(t) = -\operatorname{Re}(w(t))J_X \frac{V}{|V|} - \operatorname{Im}(w(t))J_X J_Y \frac{V}{|V|} + g(t)X$$

ein beliebiges Jacobi-Vektorfeld in $\mathfrak{q} = \operatorname{span}\{X, J_X V, J_X J_Y V\}$ mit Funktionen

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \left(\frac{2c|V|}{\mu^2-1} + A \cdot \phi(t) \sinh(t/2) + B \cdot \phi(t) \cosh(t/2) \right)$$

und

$$g(t) = f(t) \left(D + \int_0^t \left(\frac{\operatorname{Re}(w(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c}{f^2(\tau)} \right) d\tau \right)$$

für Konstanten $c, D \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{C}$ (vgl. (1) – (6) in Kapitel 4.3). Dann ist \tilde{Z} genau dann ein instabiles Jacobi-Vektorfeld, wenn

$$A = B \text{ und } D = - \int_0^{-\infty} \left(\frac{\operatorname{Re}(w(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c}{f^2(\tau)} \right) d\tau$$

gilt.

Um den instabilen Jacobi-Tensor U auf \mathfrak{q} bezüglich der Orthonormalbasis $J_X \frac{V}{|V|}, -J_X J_Y \frac{V}{|V|}$ und X zu berechnen, sind instabile Jacobi-Vektorfelder $\tilde{Z}_j(t) = Z_j(t) + g_j(t)X$, $j = 1, 2, 3$, gemäß den vorherigen Berechnungen gesucht mit

$$\tilde{Z}_1(0) = J_X \frac{V}{|V|}, \quad \tilde{Z}_2(0) = -J_X J \frac{V}{|V|} \text{ und } \tilde{Z}_3(0) = X.$$

Das zu Z_j gehörige w_j schreiben wir dann als

$$w_j(t) = \frac{1}{\sqrt{f(t)}} \left(\frac{2c_j|V|}{\mu^2 - 1} + A_j \cdot \phi(t) \sinh(t/2) + B_j \cdot \phi(t) \cosh(t/2) \right)$$

für Konstanten $c_j \in \mathbb{R}$ und $A_j = B_j \in \mathbb{C}$. Die Funktion g_j schreiben wir als

$$g_j(t) = f(t) \left(D_j + \int_0^t \left(\frac{\operatorname{Re}(w_j(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c_j}{f^2(\tau)} \right) d\tau \right)$$

mit

$$D_j = - \int_0^{-\infty} \left(\frac{\operatorname{Re}(w_j(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c_j}{f^2(\tau)} \right) d\tau.$$

- Wir beginnen mit der Berechnung von \tilde{Z}_3 . Es sind Konstanten $c_3 \in \mathbb{R}$ und $A_3 = B_3 \in \mathbb{C}$ gesucht mit

$$\begin{aligned} 0 &= w_3(0) = \frac{2c_3|V|}{\mu^2 - 1} - B_3, \\ 1 &= g_3(0) = f(0) \cdot D_3 = D_3. \end{aligned}$$

Somit gilt $A_3 = B_3 = \frac{2c_3|V|}{\mu^2 - 1}$. Gesucht ist folglich c_3 mit

$$-1 = \int_0^{-\infty} \left(\frac{\operatorname{Re}(w_3(t)\bar{v}(t))}{f(t)} - \frac{c_3}{f^2(t)} \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{-\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{2c_3|V|^2}{(\mu^2 - 1)} \cdot \frac{1}{\phi(t)\bar{\phi}^3(t)} \right) - \frac{c_3}{f^2(t)} \\
&\quad + \operatorname{Re} \left(\frac{2c_3|V|^2}{\mu^2 - 1} \cdot \frac{\sinh(t/2) + \cosh(t/2)}{\bar{\phi}^3(t)} \right) dt \\
&= c_3 \left(\left(\frac{\mu^2\bar{\mu} + \mu\bar{\mu}^2 - 3\mu - 3\bar{\mu} + 4}{(\mu^2 - 1)(\bar{\mu}^2 - 1)} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{2(1 - \mu\bar{\mu})}{(\mu^2 - 1)(\bar{\mu} + 1)} \right) \right) \\
&= \frac{2c_3}{(\mu + 1)(\bar{\mu} + 1)}.
\end{aligned}$$

Somit gilt $c_3 = -\frac{1}{2}(\mu + 1)(\bar{\mu} + 1)$ und $A_3 = B_3 = -|V| \cdot \frac{\bar{\mu} + 1}{\mu - 1}$. Insbesondere gilt damit

$$w_3(t) = \frac{|V|}{2}(\bar{\mu} + 1) \cdot \frac{1 - e^t}{\sqrt{f(t)}}$$

und

$$\begin{aligned}
g_3(t) &= f(t) \left(1 + \int_0^t \left(\frac{\operatorname{Re}(w_3(\tau)\bar{v}(\tau))}{f(\tau)} - \frac{c_3}{f^2(\tau)} \right) d\tau \right) \\
&= f(t) \left(1 + \int_0^t \frac{|V|^2}{2}(1 - e^\tau) \operatorname{Re} \left(\frac{\bar{\mu} + 1}{\phi(\tau)\bar{\phi}^3(\tau)} \right) + \frac{(\mu + 1)(\bar{\mu} + 1)}{2f^2(\tau)} d\tau \right).
\end{aligned}$$

- Für \tilde{Z}_1 sind Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}$ und $A_1 = B_1 \in \mathbb{C}$ gesucht mit

$$\begin{aligned}
-1 &= w_1(0) = \frac{2c_1|V|}{\mu^2 - 1} - B_1, \\
0 &= g_1(0) = f(0) \cdot D_3 = D_3.
\end{aligned}$$

Folglich gilt $A_1 = B_1 = 1 + \frac{2c_3|V|}{\mu^2 - 1}$. Gesucht ist damit c_3 mit

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{-\infty} \left(\frac{\operatorname{Re}(w_3(t)\bar{v}(t))}{f(t)} - \frac{c_3}{f^2(t)} \right) dt \\
&= \frac{2c_1}{(\mu + 1)(\bar{\mu} + 1)} + |V| \int_0^{-\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{\sinh(t/2) + \cosh(t/2)}{\bar{\phi}^3(t)} \right) dt \\
&= \frac{2c_1}{(\mu + 1)(\bar{\mu} + 1)} + \frac{|V|}{2} \cdot \frac{\mu + \bar{\mu} + 2}{(\mu + 1)(\bar{\mu} + 1)}
\end{aligned}$$

und damit $c_1 = -\frac{|V|}{4}(\mu + \bar{\mu} + 2)$ und $A_1 = B_1 = 1 - \frac{|V|^2(\mu + \bar{\mu} + 2)}{2(\mu^2 - 1)}$. Insbesondere

folgt somit

$$w_1(t) = \frac{(\mu - 1)^2(1 - e^t) \operatorname{Re}(\mu) + 2\mu(e^t - 1) \operatorname{Re}(\mu)^2 - 2(\mu + e^t)}{2(\mu + 1)\sqrt{f(t)}}.$$

- Eine analoge Rechnung liefert für \tilde{Z}_2 die Konstanten $c_2 = \frac{\imath|V|}{4}(\mu - \bar{\mu})$ und $A_2 = B_2 = -\imath + \imath \frac{|V|^2(\mu - \bar{\mu})}{2(\mu^2 - 1)}$. Insbesondere folgt damit

$$w_2(t) = \frac{(e^t - 1) \operatorname{Im}(\mu)(\mu\bar{\mu} - 1) - \imath(\mu^2(e^t - 1) - 2\mu - e^t - 1)}{2(\mu + 1)\sqrt{f(t)}}.$$

Bemerkung. Theoretisch ließe sich mit Hilfe dieser Formeln der instabile Jacobi-Tensor konkret berechnen. Mit der expliziten Darstellung des instabilen Jacobi-Tensors ließe sich dann anschließend auch die in Kapitel 2.1 eingeführte Abbildung F berechnen, was dadurch erschwert ist, dass die linksinvarianten Vektorfelder $J_X \frac{V}{|V|}$, $-J_X J_Y \frac{V}{|V|}$ und X längs γ nicht parallel sind. Aufgrund der Komplexität der Ausdrücke erkennen wir darin allerdings keinen weiteren Erkenntnisgewinn und beenden an dieser Stelle unsere Berechnungen.

Die ursprüngliche Frage nach der genauen Gestalt von F und ob F längs solcher Geodätischen ein exponentielles Polynom ist oder nicht, können wir damit nicht abschließend beantworten.

5 Klassifikation in Dimension 2

Wir lösen uns von dem geometrischen Hintergrund und wollen alle Abbildungen, die Lösungen unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) sind, klassifizieren. In Kapitel 4.2 haben wir eingesehen, dass sich nicht alle Abbildungen, die Lösung unseres Problems sind, auch in Standardform gemäß 2.1.5(b) schreiben lassen. Im Gegensatz dazu zeigen wir in diesem Kapitel, dass sich im Spezialfall $n = 2$ alle Lösungen unseres Problems stets in Standardform darstellen lassen.

Im Hinblick auf die Theorie harmonischer Mannigfaltigkeiten liefert dies allerdings keine neuen Erkenntnisse, da diese Einsteinisch sind und somit in Dimension 3 konstante Schnittkrümmung besitzen.

Wir haben allerdings nach Korollar 2.1.3 bemerkt, dass Abbildungen, die Lösung unseres Problems sind, auch im Kontext von D'Atri-Räumen vorkommen. Lösungen unseres Problems spielen also nicht nur in der Theorie harmonischer Mannigfaltigkeiten eine Rolle.

Es sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a). Das heißt, F hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $F(t)$ symmetrisch und positiv definit.
- (ii) Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert $F(t)$ monoton gegen 0.
- (iii) Für $t \in \mathbb{R}$ gilt $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ für ein $h > 0$.
- (iv) Es existiert eine C^∞ -Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(u) = \frac{\det(F(s+u) - F(s))}{\det(F(s))}$$

für alle $s, u \in \mathbb{R}$.

Als zusätzliche Hilfsfunktion definieren wir $G(t) := e^{ht} \cdot F(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, dass G und damit auch F ein exponentielles Polynom ist und

$$F(t) = e^{t(W-h/2 \cdot \text{id})} \cdot F(0) \cdot e^{t(W-h/2 \cdot \text{id})^T} \quad \text{für ein } W \in \mathfrak{sl}(2) := \{W \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \text{tr}(W) = 0\}$$

und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt und damit in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) ist.

Setze dafür $\bar{V} := \text{span} \{G(t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \text{span} \{F(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2}$. Weiter sei

$\{V_1, \dots, V_N\}$ eine Basis von \bar{V} , so dass die Gramsche Matrix A von $Q_2|_{\bar{V}^2}$ bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen $+1$ oder -1 sind (Da $F(0) \in \bar{V}$ positiv definit ist, ist nach Lemma 1.6.3 die Bilinearform $Q_2|_{\bar{V}^2}$ nicht entartet.).

5.1 F ist ein exponentielles Polynom

Für $n = 2$ erhalten wir eine einfache Folgerung für G aus Korollar 2.1.4, welches wir mittels den Eigenschaften (iii) und (iv) bewiesen haben.

Lemma 5.1.1. *Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$Q_2(G'(t), G(s)) + Q_2(G(t), G'(s)) = 0.$$

Beweis. Es seien $s, t \in \mathbb{R}$. Im Spezialfall $n = 2$ folgt aus Korollar 2.1.4 mit $H(t) = h \cdot F(t) + F'(t)$ bereits

$$\begin{aligned} 0 &= -Q_2(H(t) - H(s), F(t) - F(s)) \\ &= -Q_2(H(t), F(t)) + Q_2(H(t), F(s)) + Q_2(H(s), F(t)) - Q_2(H(s), F(s)) \\ &= Q_2(H(t), F(s)) + Q_2(H(s), F(t)). \end{aligned}$$

Mit $G(t) = e^{ht} \cdot F(t)$ gilt $G'(t) = h \cdot e^{ht} \cdot F(t) + e^{ht} \cdot F'(t) = e^{ht} \cdot H(t)$ und damit

$$\begin{aligned} 0 &= e^{ht} \cdot e^{hs} \cdot (Q_2(H(t), F(s)) + Q_2(H(s), F(t))) \\ &= Q_2(e^{ht} \cdot H(t), e^{hs} \cdot F(s)) + Q_2(e^{hs} \cdot H(s), e^{ht} \cdot F(t)) \\ &= Q_2(G'(t), G(s)) + Q_2(G(t), G'(s)). \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun zeigen, dass F ein exponentielles Polynom ist.

Satz 5.1.2. *Die Funktion F ist ein exponentielles Polynom und es gilt*

$$F(t) = e^{-ht} \cdot e^{t\bar{P}} F(0) \text{ für ein } \bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$$

und alle $t \in \mathbb{R}$.

Der Beweis ist inspiriert von Y. Nikolayevskys Beweis, dass die Dichte-Funktion in harmonischen Mannigfaltigkeiten ein exponentielles Polynom ist (vgl. [Nik05b, Beweis von Theorem 2]).

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ schreibe $G(t) = \sum_{i=1}^N b_i(t) \cdot V_i$ für \mathcal{C}^∞ -Funktionen $b_1, \dots, b_N: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, wobei die Basis $\{V_1, \dots, V_N\}$ von \bar{V} so gewählt war, dass die Gramsche Matrix A von $Q_2|_{\bar{V}_2}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen $+1$ oder -1 sind. Dann sind die Funktionen b_1, \dots, b_N linear unabhängig über \mathbb{R} , denn wäre etwa

$$\sum_{i=1}^N \mu_i \cdot b_i(t) \equiv 0 \text{ für } \mu_1, \dots, \mu_N \in \mathbb{R} \text{ mit } \mu_{i_0} \neq 0 \text{ für ein } i_0 \in \{1, \dots, N\}$$

und alle $t \in \mathbb{R}$, so wäre $b_{i_0}(t) = \sum_{i \neq i_0} \frac{-\mu_i}{\mu_{i_0}} \cdot b_i(t)$ und damit

$$G(t) = \sum_{i \neq i_0} b_i(t) \cdot \left(V_i - \frac{\mu_i}{\mu_{i_0}} \cdot V_{i_0} \right),$$

so dass $\dim(\bar{V}) = \dim(\text{span}\{G(t) \mid t \in \mathbb{R}\}) \leq N - 1$ gilt – ein Widerspruch. Für $t \in \mathbb{R}$ schreibe $b(t) := (b_1(t), \dots, b_N(t))^T$. Nach Lemma 5.1.1 gilt

$$\begin{aligned} 0 &= Q_2(G'(t), G(s)) + Q_2(G(t), G'(s)) \\ &= \sum_{i,j=1}^N \left(b'_i(t) \cdot Q_2(V_i, V_j) \cdot b_j(s) + b_i(t) \cdot Q_2(V_i, V_j) \cdot b'_j(s) \right) \\ &= b'(t)^T \cdot A \cdot b(s) + b(t)^T \cdot A \cdot b'(s) \end{aligned}$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Da b_1, \dots, b_N linear unabhängig über \mathbb{R} sind, gilt für alle $v \in \mathbb{R}^N$ mit $\langle b(t), v \rangle = 0$ bereits $v = 0$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt des \mathbb{R}^N bezeichne. Insbesondere hat damit der Aufspann $\text{span}\{b(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ triviales orthogonales Komplement und enthält damit eine Basis des \mathbb{R}^N . Folglich existieren $t_1 < \dots < t_N \in \mathbb{R}$, so dass $B := (b(t_1), \dots, b(t_N)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ invertierbar ist. Mit $\hat{B} := (b'(t_1), \dots, b'(t_N)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ folgt

$$0 = \hat{B}^T \cdot A \cdot b(s) + B^T \cdot A \cdot b'(s)$$

und damit $b'(s) = P \cdot b(s)$ mit $P := -A^{-1} \cdot (\hat{B} \cdot B^{-1})^T \cdot A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Insbesondere sind b und damit G sowie F exponentielle Polynome.

Mit Obigem folgt

$$0 = b(t)^T \cdot P^T \cdot A \cdot b(s) + b(t)^T \cdot A \cdot P \cdot b(s)$$

und folglich

$$0 = B^T \cdot (P^T \cdot A + A \cdot P) \cdot B$$

und somit $P^T \cdot A + A \cdot P = 0$. Damit ist P die darstellende Matrix bezüglich $\{V_1, \dots, V_N\}$ des Endomorphismus $\bar{P} \in \text{End}(\text{span}\{V_1, \dots, V_N\}) = \text{End}(\bar{V})$, $\bar{P}V_i = \sum_{l=1}^N P_{li} \cdot V_l$, mit $Q_2(\bar{P}V, W) = -Q_2(V, \bar{P}W)$ für alle $V, W \in \bar{V}$. Also gilt $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$. Für alle

$t \in \mathbb{R}$ folgt mit Obigem $G'(t) = \bar{P}G(t)$ und damit

$$G(t) = e^{t\bar{P}}G(0) \text{ und } F(t) = e^{-ht} \cdot e^{t\bar{P}}F(0).$$

□

5.2 Berechnung der wirkenden Matrizen

Wir berechnen die Gestalt von $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$ in Satz 5.1.2 und zeigen, dass sich F stets schreiben lässt als

$$F(t) = e^{t(W-h/2 \cdot I)} \cdot F(0) \cdot e^{t(W-h/2 \cdot I)^T} \quad \text{für ein } W \in \mathfrak{sl}(2)$$

und alle $t \in \mathbb{R}$.

Dafür nehmen wir zunächst an, dass $F(0) = I$ gilt. Weiter setzen wir für unsere Berechnungen

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet $\{X, Y, Z\}$ eine Basis von $\mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2}$. Bezüglich dieser Basis ist die Gramsche Matrix von Q_2 gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir führen eine Fallunterscheidung über $\dim(\bar{V}) = \dim(\text{span}\{G(t) \mid t \in \mathbb{R}\}) = \dim(\text{span}\{F(t) \mid t \in \mathbb{R}\})$ durch. Zunächst stellen wir folgende Vorüberlegungen an. Da \bar{V} mit $F(0)$ eine positiv definite Matrix enthält, ist $Q_2|_{\bar{V}^2}$ nach Lemma 1.6.3 nicht entartet und wir können stets eine Basis von \bar{V} so wählen, dass die Gramsche Matrix A bezüglich dieser Basis die Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_k & 0 \\ \hline 0 & -\mathbf{I}_{N-k} \end{array} \right)$$

hat, wobei $N = \dim(\bar{V})$ und $k \in \{0, \dots, N\}$ gilt. Ist P die darstellende Matrix von $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2|_{\bar{V}^2}))$ bezüglich dieser Basis und schreibt man

$$P = \left(\begin{array}{c|c} P_1 & P_2 \\ \hline P_3 & P_4 \end{array} \right)$$

für entsprechende Matrizen P_1, \dots, P_4 , so ist $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2|_{\bar{V}^2}))$ genau dann, wenn

$$0 = P^T \cdot A + A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c} P_1^T & -P_3^T \\ \hline P_2^T & -P_4^T \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} P_1 & P_2 \\ \hline -P_3 & -P_4 \end{array} \right)$$

gilt. Dies ist wiederum genau dann erfüllt, wenn P_1 und P_4 schiefsymmetrisch sind und $P_3 = P_2^T$ gilt. Die Dimension der Isometriegruppe ist folglich $\binom{N}{2}$.

(a) Es gelte $\dim(\bar{V}) = 1$.

Dann gilt insbesondere $\bar{V} = \text{span}\{F(0) = I\}$ und die Gramsche Matrix A von $Q_2|_{\bar{V}^2}$ bezüglich der Basis $\{F(0) = I\}$ hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Vorüberlegung ist damit die Nullabbildung das einzige Element in $\text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$. Nach Satz 5.1.2 gilt folglich

$$F(t) = e^{-ht} \cdot F(0)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $W = 0$ die einzige Matrix mit $\bar{P}(U) = W \cdot U + U \cdot W^T$ für alle $U \in \bar{V}$.

(b) Es gelte $\dim(\bar{V}) = 3$.

In diesem Fall bildet $\{X, Y, Z\}$ eine Basis von $\mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2}$ bezüglich dieser die Gramsche Matrix A von Q_2 gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es sei $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$ und $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ die darstellende Matrix von \bar{P} bezüglich der Basis $\{X, Y, Z\}$. Nach der Vorüberlegung ist $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$ genau dann, wenn

$$P \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

gilt. Wir zeigen, dass

$$\phi: \mathfrak{sl}(2) = \{W \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid \text{tr}(W) = 0\} \rightarrow \text{Lie}(\text{Isom}(\mathbb{R}^{2 \times 2}, Q_2)),$$

$$W \mapsto [B \mapsto WB + BW^T],$$

einen wohldefinierten Isomorphismus definiert.

Es sei $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$, das heißt, \bar{P} habe bezüglich der Basis $\{X, Y, Z\}$ die

darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ x & 0 & z \\ y & -z & 0 \end{pmatrix} \text{ für } x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Schreibe $W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} xY + yZ &= \bar{P}(X) \stackrel{!}{=} WX + XW^T = W + W^T = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} \\ &= (a+d)X + (a-d)Y + (b+c)Z \end{aligned}$$

und

$$xX - zZ = \bar{P}(Y) \stackrel{!}{=} WY + YW^T = (a-d)X + (a+d)Y + (c-b)Z$$

und

$$yX + zY = \bar{P}(Z) \stackrel{!}{=} WZ + ZW^T = (b+c)X + (b-c)Y + (a+d)Z$$

genau dann, wenn

$$a+d=0 \quad \wedge \quad a-d=x \quad \wedge \quad b+c=y \quad \wedge \quad c-b=-z$$

gilt. Folglich gilt

$$a = \frac{x}{2} = -d \quad \wedge \quad b = \frac{y+z}{2} \quad \wedge \quad c = \frac{y-z}{2}.$$

Dies zeigt zum einen, dass ϕ wohldefiniert ist, und zum anderen, dass ϕ surjektiv ist. Da $\mathfrak{sl}(2)$ und $\text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$ dreidimensional sind, ist ϕ damit ein Isomorphismus.

Ist \bar{P} wie oben und $W = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}$, so gilt also insbesondere

$$e^{t\bar{P}}(F(0)) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

(c) Es gelte $\dim(\bar{V}) = 2$.

Es sei $\{U, V\}$ eine Basis von \bar{V} , so dass die Gramsche Matrix A von $Q_2|_{\bar{V}_2}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen $+1$ oder -1 sind (Nach Lemma 1.6.3 ist $Q_2|_{\bar{V}_2}$ nicht entartet.). Aufgrund des Trägheitssatzes von Sylvester und da \bar{V} mit $F(0)$ eine positiv definite Matrix enthält, kann A nicht die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

haben. Bis auf Permutation der Diagonaleinträge gilt somit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt nach Voraussetzung $X = I = F(0) \in \bar{V}$ und $1 = Q_2(X, X)$. Wähle X als einen Basisvektor von \bar{V} und ergänze diesen zu einer Orthonormalbasis von $(\bar{V}, Q_2|_{\bar{V}^2})$: Ist also $\alpha X + \beta Y + \gamma Z \in \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2}$ mit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit

$$0 = Q_2(X, \alpha X + \beta Y + \gamma Z) = \alpha$$

und

$$-1 = Q_2(\alpha X + \beta Y + \gamma Z, \alpha X + \beta Y + \gamma Z) = \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2,$$

so folgt $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \cos(\varphi), \sin(\varphi))$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$. Abschließend folgt $\bar{V} = \text{span}\{U, V\} = \text{span}\{X, W := \cos(\varphi)Y + \sin(\varphi)Z\}$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$.

Es sei $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$ und sei $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die darstellende Matrix von \bar{P} bezüglich der Basis $\{X, W\}$. Nach der Vorüberlegung ist $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$ genau dann, wenn

$$P \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

gilt. Wir zeigen, dass

$$\phi: \text{span}\{W\} \leq \mathfrak{sl}(2) \rightarrow \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2)),$$

$$\tilde{W} \mapsto [B \mapsto \tilde{W}B + B\tilde{W}^T],$$

einen wohldefinierten Isomorphismus definiert. Es sei $\bar{P} \in \text{Lie}(\text{Isom}(\bar{V}, Q_2))$, das heißt, \bar{P} habe bezüglich der Basis $\{X, W\}$ die darstellende Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \text{ für ein } x \in \mathbb{R}.$$

Schreibe $\tilde{W} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x(\cos(\varphi)Y + \sin(\varphi)Z) &= xW = \bar{P}(X) \stackrel{!}{=} \tilde{W}X + X\tilde{W}^T = \tilde{W} + \tilde{W}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix} = (a+d)X + (a-d)Y + (b+c)Z \end{aligned}$$

und

$$xX = \bar{P}(W) \stackrel{!}{=} \tilde{W}W + W\tilde{W}^T$$

$$\begin{aligned}
&= (a \cos(\varphi) + b \sin(\varphi) + c \sin(\varphi) - d \cos(\varphi))X \\
&\quad + (a \cos(\varphi) + b \sin(\varphi) - c \sin(\varphi) + d \cos(\varphi))Y \\
&\quad + (a \sin(\varphi) - b \cos(\varphi) - c \cos(\varphi) + d \sin(\varphi))Z
\end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
a + d = 0 \quad \wedge \quad a - d = x \cos(\varphi) \quad \wedge \quad b + c = x \sin(\varphi) \\
\wedge \quad (a - d) \cos(\varphi) + (b + c) \sin(\varphi) = x \quad \wedge \quad (a + d) \cos(\varphi) + (b - c) \sin(\varphi) = 0 \\
\wedge \quad (a + d) \sin(\varphi) + (c - b) \cos(\varphi) = 0
\end{aligned}$$

gilt. Folglich gilt

$$a + d = 0 \quad \wedge \quad a - d = x \cos(\varphi) \quad \wedge \quad b + c = x \sin(\varphi) \quad \wedge \quad b - c = 0$$

und damit

$$a = \frac{x \cos(\varphi)}{2} = -d \quad \wedge \quad b = \frac{x \sin(\varphi)}{2} = c.$$

Abschließend folgt, dass $\tilde{W} \in \text{span}\{W\}$ gilt. Dies zeigt zum einen, dass ϕ wohldefiniert ist, und zum anderen, dass ϕ ein Isomorphismus ist.

Ist \bar{P} wie oben, so gilt also insbesondere

$$e^{t\bar{P}}(F(0)) = e^{\frac{tx}{2}W} \cdot F(0) \cdot e^{\frac{tx}{2}W^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Wir haben eingesehen, dass für Lösungen unseres Problems $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gemäß Definition 2.1.5(a) unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass $F(0) = I$ gilt, stets ein $W \in \mathfrak{sl}(2)$ existiert mit

$$F(t) = e^{t(W-h/2 \cdot I)} \cdot F(0) \cdot e^{t(W-h/2 \cdot I)^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Es sei nun $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine beliebige Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a). Dann ist

$$\tilde{F}(t) := \sqrt{F(0)^{-1}} \cdot F(t) \cdot \sqrt{F(0)^{-1}}$$

für die positiv definite Wurzel $\sqrt{F(0)^{-1}}$ von $F(0)^{-1}$ (vgl. Bemerkung nach Lemma 1.6.3) offensichtlich wieder eine Lösung unseres Problems mit gleichem $h > 0$ und $\tilde{F}(0) = I$. Folglich existiert ein $\tilde{W} \in \mathfrak{sl}(2)$ mit

$$\tilde{F}(t) = e^{t(\tilde{W}-h/2 \cdot I)} \cdot \tilde{F}(0) \cdot e^{t(\tilde{W}-h/2 \cdot I)^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Setzt man

$$W := \sqrt{F(0)} \cdot \tilde{W} \cdot \sqrt{F(0)^{-1}},$$

so gilt $W \in \mathfrak{sl}(2)$ und

$$\begin{aligned} F(t) &= \sqrt{F(0)} \cdot \tilde{F}(t) \cdot \sqrt{F(0)} \\ &= \sqrt{F(0)} \cdot e^{t(\tilde{W}-h/2\mathbf{1})} \cdot \sqrt{F(0)^{-1}} \cdot F(0) \cdot \sqrt{F(0)^{-1}} \cdot e^{t(\tilde{W}-h/2\mathbf{1})^T} \cdot \sqrt{F(0)} \\ &= e^{t(W-h/2\mathbf{1})} \cdot F(0) \cdot e^{t(W-h/2\mathbf{1})^T} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

6 Klassifikationsprogramm

In diesem Kapitel untersuchen wir exponentielle Polynome, die die Eigenschaften von dem im Kapitel 2.1 eingeführten F besitzen, also Lösungen unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) sind. Nach und nach vereinfachen wir dabei den Fall allgemeiner exponentieller Polynome zum Fall von exponentiellen Polynomen mit reellen ganzzahligen Exponenten und reellen Koeffizientenmatrizen (vgl. Kapitel 1.5).

Zunächst rechtfertigen wir im folgenden Kapitel die Annahme, dass Lösungen unseres Problems auch exponentielle Polynome sind.

6.1 Lösungen unseres Problems als exponentielle Polynome

Wir haben in Kapitel 2.2 eingesehen, dass das in Kapitel 2.1 eingeführte F im Fall negativ gekrümmter symmetrischer Räume stets ein exponentielles Polynom ist. In Bemerkung (ii) nach Satz 3.0.1 haben wir festgestellt, dass dies auch der Fall ist, wenn die Geodätische c , längs der wir F betrachten, Bahn einer Ein-Parameter-Untergruppe von Isometrien ist. Ebenso haben wir in Satz 5.1.2 erkannt, dass Lösungen unseres Problems gemäß 2.1.5(a) im Fall $n = 2$ exponentielle Polynome sind.

Wir begründen, dass die Annahme, dass Lösungen unseres Problems exponentielle Polynome sind, auch in allgemeineren Fällen gerechtfertigt ist.

Diese Überlegungen sind motiviert vom Nachweis in [Nik05b, Theorem 2], dass die Volumendichte θ für jede harmonische Mannigfaltigkeit ein exponentielles Polynom ist.

Es sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a). Insbesondere gilt dann

$$\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$$

und es existiert eine \mathcal{C}^∞ -Funktion f mit

$$f(t - s) = \frac{\det(F(t) - F(s))}{\det(F(s))}$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$\tilde{f}(t-s) := \det(F(0)) \cdot e^{-h(t-s)} \cdot f(t-s) = e^{ht} \cdot e^{hs} \cdot \det(F(t) - F(s))$$

nur von $t-s$ abhängig. Mit [Mar90] gilt

$$\begin{aligned} \det(F(t) - F(s)) &= \sum_{r=0}^n \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{s(\alpha)+s(\beta)} \cdot \det(F(t)[\alpha|\beta]) \cdot \det(-F(s)(\alpha|\beta)) \\ &= \sum_{r=0}^n \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{s(\alpha)+s(\beta)} \cdot (-1)^{n-r} \cdot \det(F(t)[\alpha|\beta]) \cdot \det(F(s)(\alpha|\beta)), \end{aligned}$$

wobei für festes $r \in \{0, \dots, n\}$ die innere Summe über alle strikt aufsteigenden Ganzzahlfolgen α und β der Länge r in $\{1, \dots, n\}$ läuft. Weiter bezeichne $F(t)[\alpha|\beta]$ die r -Teilmatrix von $F(t)$, die in den Zeilen α und Spalten β liegt, und $F(s)(\alpha|\beta)$ die $(n-r)$ -Teilmatrix von $F(s)$, die in den zu α komplementären Zeilen und zu β komplementären Spalten liegt. Mit $s(\alpha)$ beziehungsweise $s(\beta)$ bezeichnen wir die Summe über die Einträge von α beziehungsweise β . Wir bemerken Folgendes:

- Für festes $r \in \{0, \dots, n\}$ ist die Anzahl der Summanden in obiger Summe $\binom{n}{r} \cdot \binom{n}{r}$. Insgesamt gibt es also

$$N := \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 = \binom{2n}{n}$$

Summanden, was stets eine gerade Zahl ist.

- Für festes $r \in \{0, \dots, n\}$ und eine strikt aufsteigende Ganzzahlfolge α der Länge r in $\{1, \dots, n\}$ bezeichne $\bar{\alpha}$ die komplementäre strikt aufsteigende Ganzzahlfolge der Länge $(n-r)$ in $\{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$s(\bar{\alpha}) + s(\bar{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^n i \right) - s(\alpha) + \left(\sum_{i=1}^n i \right) - s(\beta) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - (s(\alpha) + s(\beta))$$

und daher

$$(-1)^{s(\bar{\alpha})+s(\bar{\beta})} = (-1)^{-(s(\alpha)+s(\beta))} = (-1)^{s(\alpha)+s(\beta)}$$

- Es gilt $(-1)^{n-(n-r)} = (-1)^n \cdot (-1)^{n-r}$ für $r \in \{0, \dots, n\}$.

Nummeriert man die Minoren auf geeignete Art und Weise, so erhält man also

$$\det(F(t) - F(s)) = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \cdot \phi_i(t) \cdot \phi_{N+1-i}(s)$$

mit $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ und $\epsilon_i = (-1)^n \cdot \epsilon_{N+1-i}$ für $i \in \{1, \dots, N\}$, wobei $\phi_i(t)$ und $\phi_{N+1-i}(s)$ komplementäre Minoren von $F(t)$ und $F(s)$ bezeichnen.

Setzt man $\Phi(t) = (e^{ht} \cdot \phi_1(t), \dots, e^{ht} \cdot \phi_N(t))$ und

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \epsilon_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 0 & \vdots \\ \epsilon_N & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

so gilt

$$\tilde{f}(t-s) = \Phi(t) \cdot \mathcal{E} \cdot \Phi(s)^T$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$. Setze weiter $V := \text{span}\{\Phi(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ und bezeichne mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$ die von \mathcal{E} induzierte symmetrische (n gerade) beziehungsweise schiefsymmetrische (n ungerade) Bilinearform und mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}, V}$ die Einschränkung auf V . Schreibe $V = W^* \oplus \bar{W}$, wobei \bar{W} den Kern der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}, V}$ bezeichne und W^* den nicht entarteten komplementären Teilraum der Dimension $N' \leq N$. Bezüglich dieser Zerlegung schreiben wir $\Phi(t) = \Phi^*(t) + \bar{\Phi}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Sei $\{W_1, \dots, W_{N'}\}$ eine Basis von W^* und schreibe $\Phi^*(t) = \sum_{i=1}^{N'} b_i(t) \cdot W_i$ für C^∞ -Funktionen $b_1, \dots, b_{N'}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ein analoger Beweis wie für Satz 5.1.2 zeigt, dass Φ^* ein exponentielles Polynom und Bahn einer 1-Parameter-Untergruppe von $\text{Isom}(W^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}, V})$ ist. Da der Vektor $\Phi(t)$ bis auf Skalierung mit e^{ht} alle Minoren von $F(t)$ enthält, muss $\bar{\Phi}$ eine in dieser Hinsicht zu Φ^* passende Gestalt haben. Das heißt, es müssen beispielsweise die Relationen der Minoren ϕ_1, \dots, ϕ_N untereinander respektiert werden. Allein aus der Gleichung $\tilde{f}(t-s) = \Phi(t) \cdot \mathcal{E} \cdot \Phi(s)^T$ folgen allerdings keine weiteren Einschränkungen für $\bar{\Phi}$.

Sobald sich alle (1×1) -Minoren von F aus Φ^* rekonstruieren lassen, wissen wir damit, dass F ein exponentielles Polynom ist.

Dies ist beispielsweise der Fall, wenn die Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}, V}$ nicht entartet ist. Da \mathcal{E} invertierbar ist, ist dies etwa wiederum der Fall, wenn $V = \mathbb{R}^N$ gilt beziehungsweise alle Minoren von F linear unabhängige Funktionen sind.

Im Folgenden werden wir stets annehmen, dass Lösungen unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) auch exponentielle Polynome sind.

6.2 Vom allgemeinen zum diagonalisierbaren Fall

Ausgehend von allgemeinen exponentiellen Polynomen, die Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) sind, zeigen wir, dass dann auch das zugehörige diagonalisierbare exponentielle Polynom eine Lösung unseres Problems ist. Diagonalisierbar meint in diesem Zusammenhang, dass das Minimalpolynom der zugehörigen Differentialgleichung nur einfache Nullstellen besitzt (s. Kapitel 1.5).

Satz 6.2.1. *Es sei*

$$F(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} e^{\lambda_j t} \cdot t^k \cdot G_{jk}$$

ein reelles exponentielles Polynom mit $m \in \mathbb{N}$, $d_j \in \mathbb{N}_0$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und $G_{jk} \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}$ für $k = 0, \dots, d_j$ und $j = 1, \dots, m$, wobei $\{\lambda_j \mid j = 1, \dots, m\}$ invariant unter Konjugation sei und $G_{jk} = \overline{G_{j'k}}$ für alle $j, j' \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_j = \overline{\lambda_{j'}}$ und $k = 0, \dots, d_j = d_{j'}$ gelte. Weiter sei F eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a). Dann ist auch

$$F_0(t) := \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot G_{j0}$$

eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a).

Beweis. (A) Zu Beginn des Beweises führen wir einige verkürzende Schreibweisen ein.

Betrachte Multiindizes mit (j, k) -Einträgen für $1 \leq j \leq m$, $0 \leq k \leq d_j$ und schreibe jeden als

$$\alpha_{\cdot, \cdot} = (\alpha_{j,k})_{1 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq d_j} \in (\mathbb{N}_0)^{\sum_j d_j + 1}$$

und setze für festes $j \in \{1, \dots, m\}$ beziehungsweise $k \in \mathbb{N}_0$ jeweils

$$\alpha_{j,*} := \sum_{k=0}^{d_j} \alpha_{j,k} \quad \text{und} \quad \alpha_{*,k} := \sum_{j=1}^m \alpha_{j,k} \quad (\text{mit } \alpha_{j,k} := 0 \text{ für } k > d_j).$$

Ferner bezeichnen $\beta_{\cdot, \cdot} \leq \alpha_{\cdot, \cdot}$. Multiindizes mit $\beta_{j,k} \leq \alpha_{j,k}$ für alle Einträge (j, k) .

Für Multiindizes $\alpha_{\cdot, \cdot}$ mit $|\alpha_{\cdot, \cdot}| := \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} \alpha_{j,k} = n$ setzen wir

$$b_{\alpha_{\cdot, \cdot}} = \binom{n}{\alpha_{\cdot, \cdot}} \cdot Q_n(\dots, \underbrace{G_{jk}, \dots, G_{jk}}_{\alpha_{j,k}\text{-mal}}, \dots),$$

wobei der verallgemeinerte Binomialkoeffizient definiert ist als $\binom{n}{\alpha_{\cdot, \cdot}} = \frac{n!}{\prod_{j,k} \alpha_{j,k}!}$.

(B) Da F nach Voraussetzung eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) ist, gilt $\det(F(s)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2hs}$ und es existiert eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(u) = \frac{\det(F(s+u) - F(s))}{\det(F(s))}$$

für alle $u, s \in \mathbb{R}$. Wir berechnen die von s unabhängige rechte Seite der Gleichung. Unter Verwendung, dass die von der Determinantenfunktion induzierte Multilinearform Q_n symmetrisch ist (vgl. Kapitel 1.6), folgt dann

$$\det(F(0)) \cdot f(u) = e^{2hs} \cdot \det(F(u+s) - F(s))$$

$$\begin{aligned}
&= e^{2hs} \cdot \det \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} \left(e^{\lambda_j(s+u)} \cdot (s+u)^k - e^{\lambda_j s} \cdot s^k \right) \cdot G_{jk} \right) \\
&= e^{2hs} \cdot \sum_{|\alpha_{\cdot,\cdot}|=n} b_{\alpha_{\cdot,\cdot}} \cdot \prod_{(j,k)} \left(e^{\lambda_j s} \left(e^{\lambda_j u} (s+u)^k - s^k \right) \right)^{\alpha_{j,k}} \\
&= \sum_{|\alpha_{\cdot,\cdot}|=n} b_{\alpha_{\cdot,\cdot}} \cdot e^{\left(2h + \sum_j \lambda_j \alpha_{j,*}\right)s} \\
&\quad \prod_{(j,k)} \left(\sum_{\beta_{j,k}=0}^{\alpha_{j,k}} \binom{\alpha_{j,k}}{\beta_{j,k}} \cdot e^{\lambda_j \beta_{j,k} u} \cdot (s+u)^{k \beta_{j,k}} \cdot (-s^k)^{\alpha_{j,k} - \beta_{j,k}} \right) \\
&= \sum_{|\alpha_{\cdot,\cdot}|=n} b_{\alpha_{\cdot,\cdot}} \cdot e^{\left(2h + \sum_j \lambda_j \alpha_{j,*}\right)s} \\
&\quad \sum_{0 \leq \beta_{\cdot,\cdot} \leq \alpha_{\cdot,\cdot}} \left[\binom{\alpha_{\cdot,\cdot}}{\beta_{\cdot,\cdot}} e^{\left(\sum_j \lambda_j \beta_{j,*}\right)u} \cdot (s+u)^{\sum_k k \beta_{*,k}} \cdot (-1)^{n - |\beta_{\cdot,\cdot}|} \cdot s^{\sum_k k(\alpha_{*,k} - \beta_{*,k})} \right]
\end{aligned}$$

mit $\binom{\alpha_{\cdot,\cdot}}{\beta_{\cdot,\cdot}} := \prod_{(j,k)} \binom{\alpha_{j,k}}{\beta_{j,k}}$. Mit $K_\beta := \sum_k k \beta_{*,k}$ und

$$(s+u)^{\sum_k k \beta_{*,k}} = (s+u)^{K_\beta} = \sum_{l=0}^{K_\beta} \binom{K_\beta}{l} \cdot u^l \cdot s^{K_\beta - l}$$

erhalt man

$$\begin{aligned}
(*) \quad \det(F(0)) \cdot f(u) &= \sum_{|\alpha_{\cdot,\cdot}|=n} \sum_{0 \leq \beta_{\cdot,\cdot} \leq \alpha_{\cdot,\cdot}} \sum_{l=0}^{K_\beta} b_{\alpha_{\cdot,\cdot}} \cdot \binom{\alpha_{\cdot,\cdot}}{\beta_{\cdot,\cdot}} \cdot \binom{K_\beta}{l} \cdot (-1)^{n - |\beta_{\cdot,\cdot}|} \\
&\quad e^{\left(2h + \sum_j \lambda_j \alpha_{j,*}\right)s} \cdot e^{\left(\sum_j \lambda_j \beta_{j,*}\right)u} \cdot u^l \cdot s^{K_\alpha - l} \\
&=: \sum_{\nu, \varrho, l, p} c_{\nu, \varrho, l, p} \cdot e^{\nu s} \cdot e^{\varrho u} \cdot u^l \cdot s^p.
\end{aligned}$$

Daher ist $c_{\nu, \varrho, l, p} = 0$ fur alle (ν, ϱ, l, p) mit $\nu \neq 0$ oder $p \neq 0$, was aquivalent dazu ist, dass $c_{\nu, \varrho, l, p} \neq 0$ bereits $\nu = 0$ und $p = 0$ impliziert.

(C) Da $F(t)$ fur $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, gilt $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ fur alle $j = 1, \dots, m$ in der Darstellung von F und es folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{u \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \det(F(0)) \cdot f(u) &= \lim_{u \rightarrow \infty} e^{2hs} \det(F(s) - F(s+u)) \\
&= e^{2hs} \cdot \det(F(s)) = \det(F(0)) > 0.
\end{aligned}$$

Daher impliziert $c_{\nu, \varrho, l, p} \neq 0$ bereits

$$\nu = p = 0 \text{ und } \operatorname{Re}(\varrho) < 0$$

oder $(\nu, \varrho, l, p) = (0, 0, 0, 0)$. Insbesondere folgt

$$(-1)^n \cdot c_{0,0,0,0} = \lim_{u \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \det(F(0)) \cdot f(u) = \det(F(0)) > 0.$$

(D) Wir ersetzen jedes G_{jk} in der Formel für $F(t)$ durch $\tilde{G}_{jk} := \gamma^k \cdot G_{jk}$ für alle (j, k) mit festem $\gamma > 0$ und betrachten $\tilde{F}(t) := \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} e^{\lambda_j t} \cdot t^k \cdot \tilde{G}_{jk}$. Jeder Summand der rechten Seite von (B)(*), das heißt jedes $\alpha_{\cdot, \cdot}$, $\beta_{\cdot, \cdot}$ und l , trägt immer noch zum selben Exponenten-Tupel (ν, ϱ, l, p) wie vorher bei und nur der Faktor $b_{\alpha_{\cdot, \cdot}}$ wird ersetzt durch

$$\tilde{b}_{\alpha_{\cdot, \cdot}} = b_{\alpha_{\cdot, \cdot}} \cdot \prod_{(j,k)} (\gamma^k)^{\alpha_{j,k}} = b_{\alpha_{\cdot, \cdot}} \cdot \gamma^{\sum_k k \alpha_{\cdot, k}} = b_{\alpha_{\cdot, \cdot}} \cdot \gamma^{K_{\alpha}}.$$

In der obigen Formel wird damit jedes $c_{\nu, \varrho, l, p}$ ersetzt durch

$$\tilde{c}_{\nu, \varrho, l, p} = \gamma^{p+l} \cdot c_{\nu, \varrho, l, p}.$$

Analog zu (B)(*) gilt für das neue $\tilde{F}(t)$ daher

$$\begin{aligned} e^{2hs} \cdot \det(\tilde{F}(u+s) - \tilde{F}(s)) &= \sum_{\nu, \varrho, l, p} \tilde{c}_{\nu, \varrho, l, p} \cdot e^{\nu s} \cdot e^{\varrho u} \cdot u^l \cdot s^p \\ &= \sum_{\nu, \varrho, l, p} \gamma^{p+l} \cdot c_{\nu, \varrho, l, p} \cdot e^{\nu s} \cdot e^{\varrho u} \cdot u^l \cdot s^p. \end{aligned}$$

Wegen (B) ist damit die linke Seite der Gleichung unabhängig von s . Setze \tilde{f} , so dass

$$\det(\tilde{F}(0)) \cdot \tilde{f}(u) = e^{2hs} \cdot \det(\tilde{F}(u+s) - \tilde{F}(s))$$

gilt. Wegen (C) und der Tatsache, dass auch $\tilde{F}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, gilt

$$\begin{aligned} e^{2hs} \cdot \det(\tilde{F}(s)) &= \lim_{u \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \det(\tilde{F}(0)) \cdot \tilde{f}(u) = (-1)^n \cdot \tilde{c}_{0,0,0,0} \\ &= (-1)^n \cdot c_{0,0,0,0} = \det(F(0)) = \det(\tilde{F}(0)). \end{aligned}$$

Da für festes $s_0 \in \mathbb{R}$ die Matrix $\tilde{F}(s_0) \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ stetig von γ abhängt und für $\gamma \rightarrow 1$ gegen das positiv definite $F(s_0)$ konvergiert, ist auch $\tilde{F}(s_0)$ positiv definit. Insgesamt ist damit \tilde{F} eine differenzierbare Abbildung in die positiv definiten Matrizen, die für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert und für die

$$\det(\tilde{F}(s)) = \det(\tilde{F}(0)) \cdot e^{-2hs}$$

und

$$\tilde{f}(u) = \frac{\det(\tilde{F}(u+s) - \tilde{F}(s))}{\det(\tilde{F}(s))}$$

für alle $s, u \in \mathbb{R}$ gilt. Folglich ist \tilde{F} eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a).

Für $\gamma \rightarrow 0$ erhalten wir im Grenzwert, dass auch

$$F_0(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot G_{j0}$$

eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) ist.

□

Bemerkung. In (D) gilt $\tilde{c}_{\nu, \rho, l, p} = \gamma^{p+l} \cdot c_{\nu, \rho, l, p}$. Insbesondere ist die Anzahl der Summanden von f und \tilde{f} gleich. Da beim Übergang zum Grenzwert $\gamma \rightarrow 0$ Summanden von \tilde{f} gegebenenfalls gleich 0 werden, ist die Anzahl der Summanden des zu F_0 gehörenden f gegebenenfalls geringer als bei dem f , welches zum ursprünglichen F gehört.

Mittels f kann man mögliche Dichte-Funktionen von harmonischen Mannigfaltigkeiten berechnen (vgl. Kapitel 2.1). Y. Nikolayevsky gibt in seinem Beweis, dass die Dichte-Funktion einer harmonischen Mannigfaltigkeit ein exponentielles Polynom ist, eine obere Schranke für die Anzahl der Monome dieses exponentiellen Polynoms an [Nik05b, Bemerkung 2].

6.3 Vom komplexen zum reellen Fall

In diesem Kapitel zeigen wir, dass wir ein diagonalisierbares exponentielles Polynom, welches Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) ist, deformieren können, zu einem exponentiellen Polynom, dessen Exponenten und Koeffizientenmatrizen reell sind und welches weiterhin eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) ist.

Im Anschluss zeigen wir, dass wir die reellen Exponenten zu ganzzahligen Exponenten modifizieren können.

Gemäß Satz 6.2.1 lassen sich allgemeine exponentielle Polynome, die Lösung unseres Problems sind, zu diagonalisierbaren exponentiellen Polynomen reduzieren.

Satz 6.3.1. *Es sei*

$$F(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot G_j$$

ein reelles exponentielles Polynom mit $m \in \mathbb{N}$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und $G_j \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}$ für $j = 1, \dots, m$, wobei $\{\lambda_j \mid j = 1, \dots, m\}$ invariant unter Konjugation sei und $G_j = \overline{G_{j'}}$ für alle

$j, j' \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_j = \overline{\lambda_{j'}}$ gelte. Weiter sei F eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a). Dann ist auch

$$\tilde{F}(t) := \sum_{j=1}^m e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} \cdot \operatorname{Re}(G_j)$$

eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a).

Beweis. (A) Da F eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) ist, konvergiert $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 und damit gilt $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ für alle $j = 1, \dots, m$. Somit konvergiert auch $\tilde{F}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0.

(B) Analog zum Beweis von Satz 6.2.1 führen wir folgende Schreibweisen ein. Für einen Multiindex $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| := \sum_{j=1}^m \alpha_j = n$ setzen wir

$$b_\alpha := \binom{n}{\alpha} \cdot Q_n(\underbrace{G_1, \dots, G_1}_{\alpha_1\text{-mal}}, \underbrace{G_2, \dots, G_2}_{\alpha_2\text{-mal}}, \dots, \underbrace{G_m, \dots, G_m}_{\alpha_m\text{-mal}}).$$

Ferner bezeichnen $\beta \leq \alpha$ Multiindizes mit $\beta_j \leq \alpha_j$ für alle $j = 1, \dots, m$. Für $A \in \mathbb{C}$ setzen wir weiter

$$\operatorname{Mult}_{\lambda, h}(A) := \{\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m \mid 2h + \langle \lambda, \alpha \rangle = A \text{ und } |\alpha| = n\},$$

wobei $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das gewöhnliche Skalarprodukt bezeichne.

(C) Da F eine Lösung des Problems gemäß Definition 2.1.5(a) ist, existiert eine \mathcal{C}^∞ -Funktion f , so dass

$$\begin{aligned} \det(F(0)) \cdot f(u) &= \det(F(0)) \cdot \frac{\det(F(s+u) - F(s))}{\det(F(s))} \\ &= e^{2hs} \cdot \det(F(s+u) - F(s)) \end{aligned}$$

für alle $u, s \in \mathbb{R}$ gilt. Eine analoge Rechnung wie in (B) im Beweis von Satz 6.2.1 zeigt, dass

$$\det(F(0)) \cdot f(u) = \sum_{|\alpha|=n} e^{(2h + \langle \lambda, \alpha \rangle)s} \cdot \left(\sum_{0 \leq \beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \cdot (-1)^{n-|\beta|} \cdot e^{\langle \lambda, \beta \rangle u} \right) \cdot b_\alpha$$

gilt, wobei die rechte Seite folglich nur von u abhängt. Dies ist äquivalent dazu,

dass für alle $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und alle $B = D + \imath E \in \mathbb{C}$ die folgende Gleichung gilt

$$(*)_{A,D,E}^{\lambda,h} \quad \sum_{\alpha \in \text{Mult}_{\lambda,h}(A)} b_{\alpha} \left(\sum_{\substack{0 \leq \beta \leq \alpha \\ \langle \text{Re}(\lambda), \beta \rangle = D \\ \langle \text{Im}(\lambda), \beta \rangle = E}} (-1)^{|\beta|} \cdot \binom{\alpha}{\beta} \right) = 0.$$

Variiere für $0 \leq r \leq 1$ nun

$$\begin{aligned} \lambda^r &= (\lambda_1^r, \dots, \lambda_m^r) = \text{Re}(\lambda) + \imath(1-r)\text{Im}(\lambda), \\ A^r &= \text{Re}(A) + \imath(1-r)\text{Im}(A) \\ D^r &= D \text{ und } E^r = (1-r)E \end{aligned}$$

und betrachte

$$F^r(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j^r t} \cdot G_j.$$

Dann stimmen für $0 \leq r < 1$ die Gleichungen $(*)_{A,D,E}^{\lambda,h}$ mit den Gleichungen $(*)_{A^r,D^r,E^r}^{\lambda^r,h}$ überein. Folglich ist

$$\det(F(0)) \cdot \tilde{f}(u) = e^{2hs} \cdot \det(F^r(s+u) - F^r(s))$$

für eine \mathcal{C}^∞ -Funktion \tilde{f} nur von u abhängig. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch für $F^1 = \tilde{F}$.

(D) Für den Spezialfall $D^r = 0$ und $E^r = 0$ gilt weiter

$$\begin{aligned} \det(F^r(t)) &= \sum_{|\alpha|=n} b_{\alpha} \cdot e^{\langle \lambda^r, \alpha \rangle t} = \sum_{\alpha \in \text{Mult}_{\lambda^r,h}(0)} b_{\alpha} \cdot e^{\langle \lambda^r, \alpha \rangle t} \\ &= \det(F^r(0)) \cdot e^{-2ht} = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht} \end{aligned}$$

und somit aus Stetigkeitsgründen auch $\det(\tilde{F}(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da $\tilde{F}(0) = F(0)$ positiv definit ist, ist damit $\tilde{F}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv definit. Insgesamt haben wir bewiesen, dass auch \tilde{F} eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) ist. □

Bemerkung. Nach (C) stimmt die Anzahl der Summanden von dem f , welches zu dem ursprünglichen F gehört, und dem \tilde{f} , welches zu F^r , $0 \leq r < 1$, gehört, überein. Im Fall $r = 1$ kann es gegebenenfalls passieren, dass Frequenzen des exponentiellen Polynoms \tilde{f} beim Verschwinden der Imaginärteile zusammenfallen. Die Anzahl der Summanden

von dem f , welches zu \tilde{F} gehört, ist damit gegebenenfalls kleiner als die Anzahl der Summanden von dem f , welches zum ursprünglichen F gehört (vgl. auch Bemerkung nach Beweis von Satz 6.2.1).

Wir zeigen nun, dass wir die reellen Exponenten so zu ganzzahligen Exponenten modifizieren können, dass wir weiterhin eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) erhalten.

Satz 6.3.2. *Es sei*

$$F(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot G_j$$

ein reelles exponentielles Polynom mit $m \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{R}$ und $G_j \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ für alle $j = 1, \dots, m$. Weiter sei F eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a).

Dann existieren paarweise verschiedene $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{Z}$, so dass auch

$$\tilde{F}(t) = \sum_{j=1}^m e^{\mu_j t} \cdot G_j$$

eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) ist, wobei sich die Bedingung (iii) zu

$$\det(\tilde{F}(t)) = \det(\tilde{F}(0)) \cdot e^{-2\tilde{h}t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und ein $\tilde{h} \in \mathbb{N}$ ändert.

Beweis. (A) Wir verwenden die gleichen Schreibweisen für Multiindizes wie in (B) im Beweis von Satz 6.3.1. Für $D \geq 0$ setzen wir weiter

$$M_{\lambda, D} := \{\delta \in (\mathbb{N}_0)^m \mid \langle \delta, -\lambda \rangle = D \text{ und } |\delta| \leq n\}$$

und

$$\Delta_{\lambda, D} := \{\delta - \delta' \mid \delta, \delta' \in M_{\lambda, D}\} \subseteq \mathbb{Z}^m \quad (\text{beziehungsweise } := \{0\}, \text{ falls } M_{\lambda, D} = \emptyset \text{ ist}).$$

Für $E := \text{span}_{\mathbb{R}} \left(\bigcup_{D \geq 0} \Delta_{\lambda, D} \right) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist $\lambda \in E^\perp$. Da E von einer Teilmenge des \mathbb{Z}^m aufgespannt wird, wird auch E^\perp von $E^\perp \cap \mathbb{Z}^m$ aufgespannt.

(B) Wir zeigen, dass es ein $\mu \in E^\perp \cap (\mathbb{Z}_-)^m$ gibt, wobei \mathbb{Z}_- die Menge aller negativen ganzen Zahlen bezeichne.

Da E^\perp von $E^\perp \cap \mathbb{Z}^m$ aufgespannt wird und $\lambda \in E^\perp$ ist, existiert zunächst ein Vektor in $E^\perp \cap \mathbb{Q}^n$ beliebig nahe an λ . Da die Einträge von λ paarweise verschieden sind, sind damit auch die Einträge dieses Vektors paarweise verschieden. Zudem schließt dieser Vektor insbesondere einen beliebigen kleinen Winkel mit λ ein. Skaliert man diesen Vektor geeignet, so erhält man ein $\mu \in E^\perp \cap \mathbb{Z}^m$ mit beliebig kleinem Winkel

zu λ , dessen Einträge paarweise verschieden sind.

Um zu zeigen, dass $\mu \in E^\perp \cap (\mathbb{Z}_-)^m$ ist, normieren wir μ beziehungsweise λ auf euklidische Norm 1 und bezeichnen die normierten Vektoren mit $\tilde{\mu}$ beziehungsweise $\tilde{\lambda}$. Die Eigenschaft, dass $\tilde{\mu}$ beliebig kleinen Winkel zu $\tilde{\lambda}$ hat, bedeutet dann, dass $\langle \tilde{\mu}, \tilde{\lambda} \rangle > 1 - \epsilon$ für beliebiges $\epsilon > 0$ ist. Da $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, ist $\lambda_j < 0$ und damit $-1 \leq \tilde{\lambda}_j < 0$ für alle $j = 1, \dots, m$. Für alle $j = 1, \dots, m$ folgt mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_j \cdot \tilde{\lambda}_j &> 1 - \epsilon - \sum_{i \neq j} \tilde{\mu}_i \cdot \tilde{\lambda}_i \\ &\geq 1 - \epsilon - \left(\sqrt{\sum_{i \neq j} \tilde{\mu}_i^2} \right) \left(\sqrt{\sum_{i \neq j} \tilde{\lambda}_i^2} \right) \\ &= 1 - \epsilon - \sqrt{1 - \tilde{\mu}_j^2} \cdot \sqrt{1 - \tilde{\lambda}_j^2} \\ &\geq 1 - \epsilon - \sqrt{1 - \tilde{\lambda}_j^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

für $0 < \epsilon < 1 - \max \left(\left\{ \sqrt{1 - \tilde{\lambda}_i} \mid i = 1, \dots, m \right\} \right)$. Damit haben $\tilde{\mu}_j$ und $\tilde{\lambda}_j$ das gleiche Vorzeichen und somit ist $\mu \in E^\perp \cap (\mathbb{Z}_-)^m$.

(C) Eine analoge Rechnung wie in (C) im Beweis von Satz 6.3.1 zeigt, dass

$$\frac{\det(F(s+u) - F(s))}{\det(F(s))}$$

genau dann nur von u abhängt, wenn

$$0 = \sum_{\substack{|\alpha|=n \\ \langle \alpha, -\lambda \rangle = A}} \left(\sum_{\substack{0 \leq \beta < \alpha \\ \langle \beta, -\lambda \rangle = B}} (-1)^{|\beta|} \cdot \binom{\alpha}{\beta} \right) \cdot b_\alpha$$

für alle $A \neq 2h$ und $B \geq 0$ gilt.

Setze in diesen Gleichungen μ anstelle von λ ein und ersetze

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \langle \alpha, \mu \rangle \text{ für ein beliebiges } \alpha \in M_{\lambda, A}, |\alpha| = n, \\ \tilde{B} &= \langle \beta, \mu \rangle \text{ für ein beliebiges } \beta \in M_{\lambda, B}. \end{aligned}$$

Da $\mu \in E^\perp$ gilt, ändern sich die obigen Gleichungen, Summanden und Koeffizienten nicht, sie werden nur nach anderen \tilde{A}, \tilde{B} parametrisiert.

Folglich ist auch für

$$\tilde{F}(t) := \sum_{j=1}^m e^{\mu_j t} \cdot G_j$$

der Ausdruck

$$\frac{\det(\tilde{F}(s+u) - \tilde{F}(s))}{\det(\tilde{F}(s))}$$

nur von u abhängig. Ebenso konvergiert $\tilde{F}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0.

(D) Mit den Gleichungen aus (C) im Spezialfall $B = 0$ gilt

$$\det(\tilde{F}(t)) = \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot e^{\langle \alpha, \mu \rangle t} = \sum_{\substack{|\alpha|=n \\ \alpha \in M_{\lambda, 2h}}} b_\alpha \cdot e^{\langle \alpha, \mu \rangle t}.$$

Wegen $\tilde{F}(0) = F(0)$ und $\mu \in E^\perp$ ist damit $\det(\tilde{F}(t)) = \det(\tilde{F}(0)) \cdot e^{-2\tilde{h}t}$ für ein $\tilde{h} > 0$. Da $\tilde{F}(0) = F(0)$ positiv definit ist, ist damit insbesondere $\tilde{F}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ positiv definit.

□

Bemerkungen.

- (i) Nach (C) ist die Anzahl der Summanden des f , welches zum ursprünglichen F gehört, gleich der Anzahl der Summanden des f , welches zu \tilde{F} gehört. Die Summanden selbst können sich aber gegebenenfalls ändern (vgl. auch Bemerkungen nach den Beweisen von Satz 6.2.1 und Satz 6.3.1).
- (ii) Setzt man $x = e^{-t}$, so ist $\tilde{F}(t) = P(x)$ ein Matrix-wertiges Polynom in x mit $P(0) = 0$. Weiter ist $\frac{\det(P(y \cdot x) - P(x))}{\det(P(x))}$ nur von y abhängig.
- (iii) Betrachtet man exponentielle Polynome

$$F(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot G_j$$

mit $m \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedenen $\lambda_j < 0$ und $G_j \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ für alle $j = 1, \dots, m$, für die $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ gilt, so zeigt ein analoger Beweis wie oben, dass paarweise verschiedene $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{Z}_-$ existieren, so dass für

$$\tilde{F}(t) = \sum_{j=1}^m e^{\mu_j t} \cdot G_j$$

auch $\det(\tilde{F}(t)) = \det(\tilde{F}(0)) \cdot e^{-2\tilde{h}t}$ für ein $\tilde{h} > 0$ gilt.

6.4 Exponentielle Polynome in Standardform

Wir untersuchen, ob exponentielle Polynome F , die Lösungen unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) sind, sich in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) darstellen lassen – das heißt, ob ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach den Überlegungen in den beiden vorangegangenen Kapiteln konzentrieren wir uns dabei auf exponentielle Polynome der Form

$$F(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot G_j$$

mit $m \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{R}$ und $G_j \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ für alle $j = 1, \dots, m$ und geben zunächst ein notwendiges Kriterium an, dass ein solches exponentielles Polynom in Standardform ist. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium, dass sich allgemeine reelle exponentielle Polynome in Standardform schreiben lassen, findet sich in Lemma 7.1.4.

Für Multiindizes $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| = n$ setzen wir wieder

$$b_\alpha = \binom{n}{\alpha} \cdot Q_n(\underbrace{G_1, \dots, G_1}_{\alpha_1\text{-mal}}, \underbrace{G_2, \dots, G_2}_{\alpha_2\text{-mal}}, \dots, \underbrace{G_m, \dots, G_m}_{\alpha_m\text{-mal}}).$$

Weiter setzen wir $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Lemma 6.4.1. *Betrachte ein exponentielles Polynom F wie oben. Es gebe ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\text{tr}(W) = -h < 0$ und $F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $b_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| = n$ und $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq -2h$. Weiter sind G_1, \dots, G_m linear unabhängig über \mathbb{R} und es existiert höchstens ein $j \in \{1, \dots, m\}$, so dass G_j invertierbar ist.*

Beweis. Es sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot e^{t_0 W} \cdot G_j \cdot e^{t_0 W^T} &= e^{t_0 W} \cdot F(t) \cdot e^{t_0 W^T} \\ &= e^{t_0 W} \cdot e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T} \cdot e^{t_0 W^T} \\ &= F(t + t_0) \\ &= \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot e^{\lambda_j t_0} \cdot G_j \end{aligned}$$

und damit

$$e^{t_0 W} \cdot G_j \cdot e^{t_0 W^T} = e^{\lambda_j t_0} \cdot G_j$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Insbesondere ist G_j ein Eigenvektor zum Eigenwert $e^{\lambda_j t_0}$ des Endomorphismus $A \mapsto e^{t_0 W} \cdot A \cdot e^{t_0 W^T}$, $A \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$. Da $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind, sind G_1, \dots, G_m als Eigenvektoren verschiedener Eigenwerte linear unabhängig. Ist G_j invertierbar für ein $j \in \{1, \dots, m\}$, so folgt insbesondere

$$e^{n\lambda_j t_0} \cdot \det(G_j) = \det(e^{t_0 W} \cdot G_j \cdot e^{t_0 W^T}) = e^{-2ht_0} \cdot \det(G_j)$$

und damit $\lambda_j = -2h/n$. Folglich kann höchstens ein G_j invertierbar sein. Nach Voraussetzung gilt $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{2 \operatorname{tr}(W)t} = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$. Damit folgt für alle $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| = n$ mit Hilfe von Lemma 1.6.2 insbesondere

$$\begin{aligned} e^{\langle \alpha, \lambda \rangle t_0} \cdot b_\alpha &= \binom{n}{\alpha} \cdot Q_n(\underbrace{e^{\lambda_1 t_0} \cdot G_1, \dots, e^{\lambda_1 t_0} \cdot G_1}_{\alpha_1\text{-mal}}, \dots, \underbrace{e^{\lambda_m t_0} \cdot G_m, \dots, e^{\lambda_m t_0} \cdot G_m}_{\alpha_m\text{-mal}}) \\ &= \binom{n}{\alpha} \cdot Q_n(\dots, e^{t_0 W} \cdot G_j \cdot e^{t_0 W^T}, \dots) \\ &= (\det((e^{t_0 W}))^2) \cdot \binom{n}{\alpha} \cdot Q_n(\dots, G_j, \dots) \\ &= e^{-2ht_0} \cdot b_\alpha, \end{aligned}$$

was äquivalent zu $(e^{\langle \alpha, \lambda \rangle t_0} - e^{-2ht_0}) \cdot b_\alpha = 0$ ist. Folglich gilt $b_\alpha = 0$ für alle α mit $|\alpha| = n$ und $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq -2h$. \square

Bemerkung. Ist F ein exponentielles Polynom wie oben und gilt

$$F(t) = e^{t(A - 2h/n \cdot \operatorname{id})}(F(0))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, ein $h > 0$ und ein A aus der Stabilisatorgruppe von $\det|_V$ mit $V := \operatorname{span}\{G_1, \dots, G_m\}$, das heißt

$$A \in \{A \in \operatorname{End}(V) \mid \det(e^{tA}(B)) = \det(B) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, B \in V\},$$

so zeigt ein analoger Beweis wie in dem vorangegangenen Lemma, dass $b_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| = n$ und $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq -2h$ gilt.

Wir geben ein hinreichendes Kriterium an, wann ein exponentielles Polynom in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) ist. Im Anschluss an den Beweis von Korollar 6.4.4 zeigen wir, dass dieses Kriterium allerdings nicht notwendigerweise erfüllt sein muss.

Satz 6.4.2. *Gegeben sei ein exponentielles Polynom*

$$F(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot G_j$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und $\lambda_j \in \mathbb{R}$ und $G_j \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ für alle $j = 1, \dots, m$. Weiter gelte

$$\mathbb{R}^n = \text{Bild}(G_1) \oplus \dots \oplus \text{Bild}(G_m).$$

Dann existiert ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Setze $V_j := \text{Bild}(G_j)$ und $\alpha_j = \dim(V_j)$ und betrachte die analoge Standard-Zerlegung in Koordinaten-Untervektorräume $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\alpha_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^{\alpha_m} =: V_1^0 \oplus \dots \oplus V_m^0$. Wähle weiter ein $B \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $B(V_j) = V_j^0$ für alle $j = 1, \dots, m$.

Für $\bar{G}_j := B \cdot G_j \cdot B^T$ und $\bar{F}(t) = B \cdot F(t) \cdot B^T = \sum_{i=1}^m e^{\lambda_i t} \cdot \bar{G}_j$ gilt

$$\text{Bild}(\bar{G}_j) = (B \cdot G_j \cdot B^T)(\mathbb{R}^n) = (B \cdot G_j)(\mathbb{R}^n) = B(V_j) = V_j^0$$

und

$$\ker(\bar{G}_j) = \left(\text{Bild}(\bar{G}_j^T) \right)^\perp = \left(\text{Bild}(\bar{G}_j) \right)^\perp = (V_j^0)^\perp = \bigoplus_{i \neq j} V_i^0,$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$x \in \ker(\bar{G}_j) \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n : \langle \bar{G}_j x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n : \langle x, \bar{G}_j^T y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in \left(\text{Bild}(\bar{G}_j^T) \right)^\perp$$

gilt. Damit sind alle \bar{G}_j in zueinander passender Blockgestalt mit jeweils einem Block \bar{G}'_j ungleich 0.

Es folgt

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &= \sum_{i=1}^m e^{\lambda_i t} \cdot \bar{G}_i = \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t} \cdot \bar{G}'_1}{\phantom{e^{\lambda_1 t} \cdot \bar{G}'_1}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{e^{\lambda_m t} \cdot \bar{G}'_m}{\phantom{e^{\lambda_m t} \cdot \bar{G}'_m}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{I}_{\alpha_1}}{\phantom{e^{\lambda_1 t} \cdot \mathbf{I}_{\alpha_1}}} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{e^{\lambda_m t} \cdot \mathbf{I}_{\alpha_m}}{\phantom{e^{\lambda_m t} \cdot \mathbf{I}_{\alpha_m}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{G}'_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{G}'_m \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die hintere Matrix gerade gleich

$$\sum_{i=1}^m \bar{G}_i = \bar{F}(0) = B \cdot F(0) \cdot B^T$$

ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} F(t) &= B^{-1} \cdot \bar{F}(t) \cdot (B^{-1})^T \\ &= B^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} e^{\frac{\lambda_1}{2} \cdot t} \cdot I_{\alpha_1} & & & \\ \hline & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\frac{\lambda_m}{2} \cdot t} \cdot I_{\alpha_m} \end{array} \right) \cdot \bar{F}(0) \cdot \\ & \quad \left(\begin{array}{c|ccc} e^{\frac{\lambda_1}{2} \cdot t} \cdot I_{\alpha_1} & & & \\ \hline & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\frac{\lambda_m}{2} \cdot t} \cdot I_{\alpha_m} \end{array} \right)^T \cdot (B^{-1})^T \\ &= e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T} \end{aligned}$$

mit

$$W = B^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{\lambda_1}{2} \cdot I_{\alpha_1} & & & \\ \hline & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\lambda_m}{2} \cdot I_{\alpha_m} \end{array} \right) \cdot B.$$

□

Wir geben zwei Fälle an, bei denen die Voraussetzungen des vorherigen Satzes erfüllt sind.

Korollar 6.4.3. *Gegeben sei ein exponentielles Polynom*

$$F(t) = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j t} \cdot G_j$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und $0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_m$ und $G_j \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ für alle $j = 1, \dots, m$. Zusätzlich seien die G_j paarweise kommutierende Matrizen und es gelte $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Nach der Bemerkung nach dem Beweis von Satz 6.3.2 existieren $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{Z}_-$, so dass für

$$\tilde{F}(t) = \sum_{j=1}^m e^{\mu_j t} \cdot G_j$$

auch $\det(\tilde{F}(t)) = \det(\tilde{F}(0)) \cdot e^{-2\tilde{h}t}$ für ein $\tilde{h} > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Da die G_j , $j = 1, \dots, m$, paarweise kommutierende symmetrische Matrizen sind, existiert ein $B \in O(n)$, so dass alle $\bar{G}_j := B \cdot G_j \cdot B^T$ diagonale Matrizen sind. Folglich ist auch

$$\bar{F}(t) := B \cdot \tilde{F}(t) \cdot B^T = \sum_{j=1}^m e^{\mu_j t} \cdot \bar{G}_j$$

eine Diagonalmatrix und der i -te Diagonaleintrag von $\bar{F}(t)$ ist von der Gestalt $P_i(e^{-t})$ für ein Polynom $P_i \in \mathbb{R}[x]$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt damit

$$\det(\bar{F}(0)) \cdot (e^{-t})^{2\tilde{h}} = \det(\bar{F}(t)) = \left(\prod_{i=1}^n P_i \right) (e^{-t})$$

und es folgt $(\prod_{i=1}^n P_i)(x) = \det(\bar{F}(0)) \cdot x^{2\tilde{h}}$. Also ist jedes P_i ein Monom und folglich der i -te Diagonaleintrag von \bar{G}_j höchstens für ein einziges \bar{G}_j ungleich Null. Somit gilt

$$\mathbb{R}^n = \text{Bild}(\bar{G}_1) \oplus \dots \oplus \text{Bild}(\bar{G}_m)$$

und damit

$$\mathbb{R}^n = \text{Bild}(G_1) \oplus \dots \oplus \text{Bild}(G_m).$$

Nach Satz 6.4.2 existiert damit ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Korollar 6.4.4. Gegeben sei ein exponentielles Polynom

$$F(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot G_j$$

mit $m \in \mathbb{N}$ und $\lambda_j \in \mathbb{R}$ und $G_j \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ für alle $j = 1, \dots, m$. Zudem seien die λ_j , $j = 1, \dots, m$, linear unabhängig über \mathbb{Z} und es gelte $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Weiter sei $F(0)$ positiv definit. Dann existiert ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da $F(0)$ und damit auch $F(0)^{-1}$ positiv definit ist, besitzt $F(0)^{-1}$ eine positiv definite Wurzel (vgl. Bemerkung nach Lemma 1.6.3). Indem man $F(t)$ durch $\tilde{F}(t) := \sqrt{F(0)^{-1}} \cdot F(t) \cdot \sqrt{F(0)^{-1}}$ ersetzt, kann man erreichen, dass

$$I = \tilde{F}(0) = \sum_{j=1}^m \sqrt{F(0)^{-1}} \cdot G_j \cdot \sqrt{F(0)^{-1}} =: \sum_{j=1}^m \tilde{G}_j$$

gilt. Analog zu vorher setzen wir wieder

$$b_\alpha := \binom{n}{\alpha} \cdot Q_n(\underbrace{\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_1}_{\alpha_1\text{-mal}}, \underbrace{\tilde{G}_2, \dots, \tilde{G}_2}_{\alpha_2\text{-mal}}, \dots, \underbrace{\tilde{G}_m, \dots, \tilde{G}_m}_{\alpha_m\text{-mal}})$$

für Multiindizes $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| = n$. Dann folgt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} e^{-2ht} &= \det(F(0)^{-1}) \cdot \det(F(t)) = \det(\tilde{F}(t)) = Q_n \left(\sum_{j_1=1}^m e^{\lambda_{j_1} t} \cdot \tilde{G}_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^m e^{\lambda_{j_n} t} \cdot \tilde{G}_{j_n} \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n=1}^n Q_n(\tilde{G}_{j_1}, \dots, \tilde{G}_{j_n}) \cdot \prod_{k=1}^n e^{\lambda_{j_k} t} \\ &= \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot \prod_{j=1}^m e^{\alpha_j \lambda_j t} = \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot e^{\langle \alpha, \lambda \rangle \cdot t} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit der Annahme, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ linear unabhängig über \mathbb{Z} sind, existiert genau ein $\bar{\alpha} \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\bar{\alpha}| = n$, $\langle \bar{\alpha}, \lambda \rangle = -2h$ und $b_{\bar{\alpha}} = 1$ und $b_\alpha = 0$ für alle $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Analog gilt für $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$ allgemeiner

$$\det \left(\sum_{j=1}^m x_j \cdot \tilde{G}_j \right) = \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m} = \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot \prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_j}.$$

Damit ist das charakteristische Polynom von $\sum_{j=1}^m x_j \cdot \tilde{G}_j$ in der Variablen μ gegeben durch

$$P \left(\sum_{j=1}^m x_j \cdot \tilde{G}_j \right) (\mu) = \det \left(\sum_{j=1}^m x_j \cdot \tilde{G}_j - \mu \cdot I_n \right) = \det \left(\sum_{j=1}^m (x_j - \mu) \cdot \tilde{G}_j \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot \prod_{j=1}^m (x_j - \mu)^{\alpha_j} \\
&= \prod_{j=1}^m (x_j - \mu)^{\bar{\alpha}_j}.
\end{aligned}$$

Die symmetrische Matrix \tilde{G}_j hat folglich $\bar{\alpha}_j$ Eigenwerte gleich 1 und $n - \bar{\alpha}_j$ Eigenwerte gleich 0. Weiter folgt

$$\mathbb{R}^n = \text{Bild}(\mathbf{I}) = \text{Bild}(\tilde{G}_1 + \dots + \tilde{G}_m) \subseteq \text{Bild}(\tilde{G}_1) + \dots + \text{Bild}(\tilde{G}_m) =: V_1 + \dots + V_m.$$

Wegen $\dim(V_j) = \bar{\alpha}_j$ und $\sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j = n$ ist dies eine direkte Summe. Nach Satz 6.4.2 existiert damit ein $\tilde{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\tilde{F}(t) = e^{t\tilde{W}} \cdot \tilde{F}(0) \cdot e^{t\tilde{W}^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Setzt man $W = \sqrt{F(0)} \cdot \tilde{W} \cdot \sqrt{F(0)}^{-1}$, so folgt

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

Die Bedingung, dass $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ linear unabhängig über \mathbb{Z} sind, lässt sich noch etwas abschwächen (s. Bemerkung (ii) nach dem Beweis von 6.4.6).

Bemerkung. Der Schlüssel in dem Beweis ist, dass unter gegebenen Voraussetzungen nur ein Multiindex $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^m$ mit $|\alpha| = n$ und $b_\alpha \neq 0$ existiert und damit $\text{Bild}(G_1), \dots, \text{Bild}(G_m)$ eine direkte Summenzerlegung des \mathbb{R}^n induzieren. Eine Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt.

Es seien

$$W = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(0) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 18 & 3 & -4 \\ 3 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-t} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-3/2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} -16 & -12 & -4 \\ -12 & -8 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix} + e^{-2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 33/2 & 9 \\ 33/2 & 15 & 15/2 \\ 9 & 15/2 & 3 \end{pmatrix} \\
&\quad + e^{-5/2 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} -56/5 & -56/5 & -42/5 \\ -56/5 & -56/5 & -42/5 \\ -42/5 & -42/5 & -28/5 \end{pmatrix} + e^{-3 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\
&=: \sum_{k=2}^6 e^{-k/2 \cdot t} \cdot G_k.
\end{aligned}$$

Es ist $\det(F(t)) = 37/100 \cdot e^{-6t}$ und damit $h = 3$ und $F'(0) = -I$. Setze $\lambda := (-1/2, -1, -3/2, -2, -5/2, 3)$, so gilt $b_\alpha = 0$ für alle $\alpha \in (N_0)^6$ mit $|\alpha| = 3$ und $\langle \alpha, \lambda \rangle \neq -6$ und

$$\begin{aligned}
b_{(0,1,0,1,0,1)} &= \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} \cdot Q_3(G_2, G_4, G_6) = 18, \\
b_{(0,1,0,0,2,0)} &= -392/25, \quad b_{(0,0,2,0,0,1)} = -12, \quad b_{(0,0,1,1,1,0)} = 84/5, \quad b_{(0,0,0,3,0,0)} = -27/4.
\end{aligned}$$

Da $\det(G_4) = -27/4 \neq 0$ und damit G_4 invertierbar ist, induzieren die G_i keine direkte Summenzerlegung des \mathbb{R}^3 . Ebenso induzieren die α , für die $b_\alpha \neq 0$ gilt, keine direkte Summenzerlegung des \mathbb{R}^n durch $\text{Bild}(G_j)$, $\alpha_j \neq 0$, wie man anhand von $b_{(0,0,1,1,1,0)} \neq 0$ sieht.

Wir betrachten nun einen weiteren Spezialfall von exponentiellen Polynomen. Es gelte

$$F(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda t} \cdot t^{j-1} \cdot G_j$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $G_j \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$, das heißt, das Minimalpolynom von F hat nur eine Nullstelle λ (vgl. Kapitel 1.5). Wir nehmen wieder an, dass $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$ gilt und $F(0)$ positiv definit ist und gehen wieder über zu

$$\tilde{F}(t) = \sqrt{F(0)^{-1}} \cdot F(t) \cdot \sqrt{F(0)^{-1}} =: \sum_{i=1}^m e^{\lambda t} \cdot t^{i-1} \cdot \tilde{G}_i$$

und setzen b_α wie oben. Dann folgt analog zu vorherigen Überlegungen

$$\begin{aligned}
e^{-2ht} &= \det(\tilde{F}(t)) = \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot \prod_{j=1}^m (e^{\lambda t} \cdot t^{j-1})^{\alpha_j} \\
&= \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot \prod_{j=1}^m (e^{\lambda \alpha_j t} \cdot t^{(j-1)\alpha_j})
\end{aligned}$$

$$= \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot e^{n\lambda t} \cdot t^{\left(\sum_{j=1}^m (j-1)\alpha_j\right)}$$

und damit gilt $b_\alpha = 0$ für $\alpha \neq (n, 0, \dots, 0)$ und $n\lambda = -2h$. Setze $\bar{\alpha} = (n, 0, \dots, 0)$. Dann ist das charakteristische Polynom von $\sum_{j=1}^m x_j \cdot \tilde{G}_j$ in der Variablen μ wieder gegeben durch

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{j=1}^m x_j \cdot \tilde{G}_j\right)(\mu) &= \det\left(\sum_{j=1}^m x_j \cdot \tilde{G}_j - \mu \cdot I_n\right) = \det\left(\sum_{j=1}^m (x_j - \mu) \cdot \tilde{G}_j\right) \\ &= \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot \prod_{j=1}^m (x_j - \mu)^{\alpha_j} \\ &= \prod_{j=1}^m (x_j - \mu)^{\bar{\alpha}_j}. \end{aligned}$$

Für $j > 1$ ist damit 0 der einzige Eigenwert der symmetrischen Matrix \tilde{G}_j . Also ist $\tilde{G}_j = 0$ für $j > 1$ und damit folgt $m = 1$ und

$$F(t) = e^{\lambda t} \cdot G_1 = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

mit $W = \lambda/2 \cdot I$.

Mit diesen Vorüberlegungen können wir das folgende Korollar beweisen.

Korollar 6.4.5. *Es sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ ein exponentielles Polynom, dessen Minimalpolynom höchstens Grad 2 hat. Weiter sei $F(0)$ positiv definit und es gelte $\det(F(t)) = \det(F(0)) \cdot e^{-2ht}$. Dann lässt sich F schreiben als $F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$ für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Falls der Grad des Minimalpolynoms von F gleich 1 ist, gilt $F(t) = e^{\lambda t} \cdot G$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und ein $G \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ und die Behauptung folgt direkt. Ist der Grad des Minimalpolynoms gleich 2, so hat die Vorüberlegung gezeigt, dass das Minimalpolynom keine doppelte Nullstelle besitzen kann. Wir nehmen zunächst an, dass das Minimalpolynom zwei zueinander konjugierte komplexe Nullstellen hat. Dann hat F die Form

$$F(t) = \cos(\mu t) \cdot e^{\lambda t} \cdot G_1 + \sin(\mu t) \cdot e^{\lambda t} \cdot G_2$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $G_1, G_2 \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$. Da für alle $t \in \mathbb{R}$ die Matrix $F(t)$ positiv definit ist, sind insbesondere auch

$$F(0) = G_1, \quad F\left(\frac{\pi}{\mu}\right) = -e^{\frac{\lambda\pi}{\mu}} \cdot G_1, \quad F\left(\frac{\pi}{2\mu}\right) = e^{\frac{\lambda\pi}{2\mu}} \cdot G_2 \quad \text{und} \quad F\left(\frac{3\pi}{2\mu}\right) = -e^{\frac{3\pi\lambda}{2\mu}} \cdot G_2$$

positiv definit, was ein Widerspruch ist. Also können folglich keine komplexen Nullstellen

aufzutreten.

Wir können also annehmen, dass F die Form $F(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot G_1 + e^{\lambda_2 t} \cdot G_2$ für $\lambda_1 > \lambda_2$ und $G_1, G_2 \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ hat. Sind λ_1 und λ_2 linear unabhängig über \mathbb{Z} , so folgt die Behauptung nach Korollar 6.4.4.

Sind λ_1, λ_2 linear abhängig über \mathbb{Z} , so existiert nach dem nachfolgenden Lemma ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda_1 - x$ und $\lambda_2 - x$ linear unabhängig über \mathbb{Z} sind. Multipliziert man $F(t)$ mit e^{-xt} und geht über zu $\tilde{F}(t) = \sqrt{F(0)^{-1}} \cdot F(t) \cdot \sqrt{F(0)^{-1}}$, so erhält man

$$e^{-xt} \cdot \tilde{F}(t) = e^{(\lambda_1 - x)t} \cdot \tilde{G}_1 + e^{(\lambda_2 - x)t} \cdot \tilde{G}_2$$

und

$$e^{-(2h+nx)t} = \det(e^{-xt} \cdot \tilde{F}(t)) = \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha \cdot e^{((\lambda_1 - x)\alpha_1 + (\lambda_2 - x)\alpha_2)t}.$$

Da $\lambda_1 - x$ und $\lambda_2 - x$ linear unabhängig über \mathbb{Z} sind, existiert genau ein $\bar{\alpha} \in (\mathbb{N}_0)^2$ mit $|\bar{\alpha}| = n$, $b_\alpha = 0$ für $\alpha \neq \bar{\alpha}$ und $(\lambda_1 - x)\bar{\alpha}_1 + (\lambda_2 - x)\bar{\alpha}_2 = -(2h + nx)$ ($\Leftrightarrow \lambda_1 \bar{\alpha}_1 + \lambda_2 \bar{\alpha}_2 = -2h$). Analoges Vorgehen wie im Beweis von Korollar 6.4.4 liefert die Behauptung. \square

Wir beweisen das folgende, im Beweis von Satz 6.4.5 verwendete Lemma.

Lemma 6.4.6. *Es seien $\lambda_1 > \dots > \lambda_m \in \mathbb{R}$ und es gelte*

$$(\text{span} \{(1, \dots, 1), (\lambda_1, \dots, \lambda_m)\})^\perp \cap \mathbb{Z}^m = \{0\}.$$

Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $\lambda_1 - x, \dots, \lambda_m - x$ linear unabhängig über \mathbb{Z} sind.

Beweis. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ linear unabhängig über \mathbb{Z} , so folgt die Behauptung mit $x = 0$. Seien folglich $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ linear abhängig über \mathbb{Z} . Angenommen für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind $\lambda_1 - x, \dots, \lambda_m - x$ linear abhängig über \mathbb{Z} . Das heißt, für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert $(a_1(x), \dots, a_m(x)) \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}$ mit

$$\sum_{i=1}^m a_i(x)(\lambda_i - x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^m a_i(x)\lambda_i = x \cdot \left(\sum_{i=1}^m a_i(x) \right).$$

Ist $\sum_{i=1}^m a_i(x) = 0$, so folgt $\sum_{i=1}^m a_i(x)\lambda_i = 0$ und damit

$$0 \neq (a_1(x), \dots, a_m(x)) \in (\text{span} \{(1, \dots, 1), (\lambda_1, \dots, \lambda_m)\})^\perp \cap \mathbb{Z}^m = \{0\}.$$

Also folgt $\bar{a}(x) := \sum_{i=1}^m a_i(x) \neq 0$ und es ist

$$x = \sum_{i=1}^m \frac{a_i(x)}{\bar{a}(x)} \cdot \lambda_i.$$

Da $a_i(x)/\bar{a}(x) \in \mathbb{Q}$ ist, wäre \mathbb{R} endlich-dimensional über \mathbb{Q} , was ein Widerspruch ist. \square

Bemerkungen.

- (i) Ist $m = 2$, so ist $(\text{span}\{(1, 1), (\lambda_1, \lambda_2)\}) = \mathbb{R}^2$ und die Voraussetzung des Lemmas ist automatisch erfüllt.
- (ii) Mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas kann man Korollar 6.4.4 verallgemeinern für $(0 >) \lambda_1 > \dots > \lambda_m$ mit $(\text{span}\{(1, \dots, 1), (\lambda_1, \dots, \lambda_m)\})^\perp \cap \mathbb{Z}^m = \{0\}$.

Wir beenden das Kapitel mit einem Beispiel eines exponentiellen Polynoms, welches fast alle Eigenschaften einer Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) hat, aber nicht in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) ist. Dies ergänzt unsere Überlegungen aus Kapitel 4.2, welche die Existenz von Lösungen unseres Problems, die nicht in Standardform sind, belegen. Allerdings wissen wir nicht, ob diese Lösungen, die nicht in Standardform sind, exponentielle Polynome sind oder nicht.

Beispiel. Für

$$F(t) = \sum_{j=1}^5 e^{-j \cdot t} \cdot G_j$$

mit

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$G_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\det(F(t)) = -\frac{1}{8}e^{-3t}$$

und

$$\frac{\det(F(t) - F(s))}{\det(F(s))} = e^{3(s-t)} - 3e^{2(s-t)} + 3e^{s-t} - 1$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$. Weiter konvergiert $F(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen 0. Allerdings ist $F(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ indefinit und $F(t) - F(s)$ ist für $t < s$ im Allgemeinen nicht positiv definit. Bis auf die Definitheit und die Monotonie erfüllt F damit alle Eigenschaften einer Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a).

Weiter enthält $V := \text{span}\{G_1, \dots, G_5\}$ mit

$$1 \cdot G_1 + 0 \cdot G_2 + \frac{1}{2} \cdot G_3 + 0 \cdot G_4 + 1 \cdot G_5 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine positiv definite Matrix. Somit ist $Q_n|_{V^n}$ nach Lemma 1.6.3 nicht entartet. Mit der in diesem Kapitel stets verwendeten Notation gilt weiter

$$b_{(3,0,0,0,0)} = -\frac{1}{8},$$

$$b_{(2,0,0,2,0)} = -1, \quad b_{(1,1,1,0,0)} = 2, \quad b_{(0,3,0,0,0)} = -1,$$

$$b_{(1,0,1,0,1)} = 2, \quad b_{(1,0,0,2,0)} = -2, \quad b_{(0,2,0,0,1)} = -2, \quad b_{(0,1,1,1,0)} = 4, \quad b_{(0,0,3,0,0)} = -2$$

und $b_\alpha = 0$ sonst. Nach Lemma 6.4.1 existiert damit kein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Trotz verschiedener Versuche ist es uns nicht gelungen, ein exponentielles Polynom zu konstruieren, welches Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) aber nicht in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b) ist. Das obige Beispiel zeigt aber, dass allein aus den beiden Bedingungen an die Determinante beziehungsweise an die Determinante der Differenz nicht folgt, dass sich die Abbildung F in Standardform schreiben lässt. Nach der Bemerkung nach Lemma 6.4.1 lässt sich F zudem auch nicht als

$$F(t) = e^{t(A-2h/n \cdot \text{id})}(F(0))$$

für ein A aus der Stabilisatoruntergruppe von $\det|_V$ schreiben.

Es scheint schwer einzuschätzen, inwieweit die positive Definitheit aller $F(t)$ und die Monotonie der Abbildung F eine weitere Einschränkung darstellen.

Bemerkung. Die Eigenschaft, dass

$$f(t-s) = \frac{\det(F(t) - F(s))}{\det(F(s))}$$

für eine C^∞ -Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt, wurde in Kapitel 6.4 nicht direkt verwendet. Sie spielte aber eine wichtige Rolle bei der Annahme, dass F ein exponentielles Polynom ist (vgl. Kapitel 6.1).

7 Geschlossene Geodätische

Wir verwenden die Notationen aus Kapitel 2. Es sei M eine $(n + 1)$ -dimensionale, vollständige Mannigfaltigkeit ohne konjugierte Punkte. Diesmal sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte, geschlossene Geodätische mit minimaler Periode t_0 für ein $t_0 > 0$. Wir nehmen wieder an, dass das folgende Integral $\int_0^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$ existiert, wobei U den instabilen Jacobi-Tensor längs c bezeichnet, und betrachten die Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(n) := \{A \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n} \mid A \text{ ist positiv definit}\}$ mit

$$F(t) = \int_t^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau.$$

Da c eine geschlossene Geodätische der Periode $t_0 > 0$ ist, gilt nach Eigenschaften des geodätischen Flusses ϕ insbesondere

$$v := c'(0) = c'(t_0) = \phi^{t_0}(c'(0)) = \phi^{t_0}(v)$$

und somit folgt mit Lemma 1.3.4 (iii) für den instabilen Jacobi-Tensor

$$U_v(t) = U_{\phi^{t_0}(v)}(t) = U_v(t + t_0)U_v(t_0)^{-1}$$

und folglich

$$U_v(t + t_0) = U_v(t)U_v(t_0).$$

Zur Übersichtlichkeit schreiben wir wieder U anstatt U_v und setzen $E := U(t_0)^{-1}$. Wir untersuchen, wie sich die Abbildung F nach einer Periode verhält.

Lemma 7.0.1. *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$F(t + t_0) = E \cdot F(t) \cdot E^T$$

und damit

$$F(t + \mu \cdot t_0) = E^\mu \cdot F(t) \cdot (E^\mu)^T$$

für alle $\mu \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Für $t \in \mathbb{R}$ folgt mit Hilfe der Substitutionsregel

$$F(t + t_0) = \int_{t+t_0}^\infty (U^T(\tau)U(\tau))^{-1}d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= \int_t^\infty (U^T(\sigma + t_0)U(\sigma + t_0))^{-1} d\sigma \\
&= \int_t^\infty (U^T(t_0)U^T(\sigma)U(\sigma)U(t_0))^{-1} d\sigma \\
&= \int_t^\infty U(t_0)^{-1}(U^T(\sigma)U(\sigma))^{-1}(U(t_0)^{-1})^T d\sigma \\
&= U(t_0)^{-1} \cdot F(t) \cdot (U(t_0)^{-1})^T \\
&= E \cdot F(t) \cdot E^T.
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt durch mehrmaliges Anwenden der ersten Gleichung direkt. \square

Wir haben in Kapitel 2.1 beziehungsweise der Bemerkung nach Korollar 2.1.3 eingesehen, dass F eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) ist, sobald die Mannigfaltigkeit harmonisch ist oder – schwächer – die D'Atri-Eigenschaft längs c erfüllt ist. Weiter haben wir in Kapitel 6.1 die Annahme gerechtfertigt, dass Lösungen unseres Problems exponentielle Polynome sind.

Wir lösen uns im Folgenden wieder vom geometrischen Hintergrund und untersuchen reelle exponentielle Polynome $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$, für die ein $E \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $F(t + t_0) = E \cdot F(t) \cdot E^T$ für ein $t_0 > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. Bei zusätzlichen Annahmen an die Nullstellen des Minimalpolynoms von F (vgl. Kapitel 1.5) beziehungsweise an die Eigenwerte von E zeigen wir, dass ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist F in Standardform gemäß Definition 2.1.5(b).

7.1 Koeffizientenmatrizen nach einer Periode

Es sei

$$F(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} e^{\lambda_j t} \cdot t^k \cdot G_{jk}$$

ein reelles exponentielles Polynom mit $m \in \mathbb{N}$, $d_j \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und $G_{jk} \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}$ für $k = 0, \dots, d_j$ und $j = 1, \dots, m$, wobei $\{\lambda_j \mid j = 1, \dots, m\}$ invariant unter Konjugation sei und $G_{jk} = \overline{G_{j'k}}$ für alle $j, j' \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_j = \overline{\lambda_{j'}}$ und $k = 0, \dots, d_j = d_{j'}$ gelte. Weiter existiere ein $E \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und ein $t_0 > 0$ mit

$$F(t + t_0) = E \cdot F(t) \cdot E^T$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt dann

$$F(t + \mu \cdot t_0) = E^\mu \cdot F(0) \cdot (E^\mu)^T$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\mu \in \mathbb{Z}$. Ziel ist es, ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zu konstruieren, so dass

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir untersuchen nun, wie sich die Koeffizientenmatrizen G_{jk} , $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{0, \dots, d_j\}$, bei Anwendung des Endomorphismus

$$\Phi_{E^\mu} : \mathbb{C}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}, \quad A \mapsto E^\mu \cdot A \cdot (E^\mu)^T, \quad \mu \in \mathbb{Z},$$

verhalten, wobei wir E zu einer \mathbb{C} -linearen, invertierbaren Abbildung in $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ fortsetzen. Dann kommutiert Φ_{E^μ} mit der Konjugation und lässt damit insbesondere $\mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ invariant.

Lemma 7.1.1. *Für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{0, \dots, d_j\}$ und $\mu \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\Phi_{E^\mu}(G_{jl}) = E^\mu \cdot G_{jl} \cdot (E^\mu)^T = e^{\lambda_j \mu t_0} \cdot \sum_{k=l}^{d_j} \binom{k}{l} \cdot (\mu \cdot t_0)^{k-l} \cdot G_{jk}.$$

Beweis. Aus der Eigenschaft

$$F(t + \mu \cdot t_0) = E^\mu \cdot F(t) \cdot (E^\mu)^T, \quad \mu \in \mathbb{Z},$$

folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} t^k \cdot e^{\lambda_j t} \cdot E^\mu \cdot G_{jk} \cdot (E^\mu)^T &= E^\mu \cdot F(t) \cdot (E^\mu)^T \\ &= F(t + \mu \cdot t_0) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} (t + \mu \cdot t_0)^k \cdot e^{\lambda_j t} \cdot e^{\lambda_j \mu t_0} \cdot G_{jk} \end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{d_j} t^k \cdot E^\mu \cdot G_{jk} \cdot (E^\mu)^T = \sum_{k=0}^{d_j} (t + \mu \cdot t_0)^k \cdot e^{\lambda_j \mu t_0} \cdot G_{jk}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$. Leitet man diese Gleichung l -mal in $t = 0$ ab für ein $l \in \{0, \dots, d_j\}$, so folgt

$$l! \cdot E^\mu \cdot G_{jl} \cdot (E^\mu)^T = e^{\lambda_j \mu t_0} \cdot \sum_{k=l}^{d_j} \frac{k!}{(k-l)!} \cdot (\mu \cdot t_0)^{k-l} \cdot G_{jk}$$

und damit die Behauptung. \square

Bemerkung. Ist $G_{jl} = 0$ für ein $j \in \{1, \dots, m\}$ und ein $l \in \{1, \dots, d_j\}$, so folgt

$$0 = \sum_{k=l}^{d_j} \binom{k}{l} \cdot \mu^{k-l} \cdot t_0^{k-l} \cdot G_{jk}$$

für alle $\mu \in \mathbb{Z}$. Insbesondere gilt damit $G_{jk} = 0$ für alle $k \geq l$.

Wir können folglich $G_{jl} \neq 0$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $l \in \{0, \dots, d_j\}$ annehmen.

Korollar 7.1.2. Für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, $p \in \{0, \dots, d_j\}$ ist $G_{j(d_j-p)}$ ein Hauptvektor des Endomorphismus Φ_E zum Eigenwert $e^{\lambda_j t_0}$ der Stufe $(p+1)$. Gilt zusätzlich $|\operatorname{Im}(\lambda_j)| < \pi/t_0$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, so ist die Menge

$$\{G_{jk} \mid j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{0, \dots, d_j\}\}$$

linear unabhängig.

Beweis. Es sei $j \in \{1, \dots, m\}$ und $p \in \{0, \dots, d_j\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & (\Phi_E - e^{\lambda_j t_0} \cdot \operatorname{id}_{\mathbb{C}_{sym}^{n \times n}})^{p+1} (G_{j(d_j-p)}) \\ &= \sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} \cdot (-1)^{p+1-q} \cdot e^{\lambda_j t_0(p+1-q)} \cdot \Phi_{E^q} (G_{j(d_j-p)}) \\ &= \sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} \cdot (-1)^{p+1-q} \cdot e^{\lambda_j t_0(p+1)} \cdot \left(\sum_{k=d_j-p}^{d_j} \binom{k}{d_j-p} \cdot (q \cdot t_0)^{k-d_j+p} \cdot G_{jk} \right) \\ &= e^{\lambda_j t_0(p+1)} \cdot \sum_{k=d_j-p}^{d_j} \binom{k}{d_j-p} \cdot t_0^{k-d_j+p} \cdot \left(\sum_{q=0}^{p+1} \binom{p+1}{q} \cdot (-1)^{p+1-q} \cdot q^{k-d_j+p} \right) \cdot G_{jk} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wie in dem sich diesem Beweis anschließendem Lemma gezeigt wird. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} & (\Phi_E - e^{\lambda_j t_0} \cdot \operatorname{id}_{\mathbb{C}_{sym}^{n \times n}})^p (G_{j(d_j-p)}) \\ &= \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot (-1)^{p-q} \cdot e^{\lambda_j t_0(p-q)} \cdot \Phi_{E^q} (G_{j(d_j-p)}) \\ &= \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot (-1)^{p-q} \cdot e^{\lambda_j t_0 p} \cdot \left(\sum_{k=d_j-p}^{d_j} \binom{k}{d_j-p} \cdot (q \cdot t_0)^{k-d_j+p} \cdot G_{jk} \right) \\ &= e^{\lambda_j t_0 p} \cdot \sum_{k=d_j-p}^{d_j} \binom{k}{d_j-p} \cdot t_0^{k-d_j+p} \cdot \left(\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot (-1)^{p-q} \cdot q^{k-d_j+p} \right) \cdot G_{jk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\lambda_j t_0 p} \cdot \binom{d_j}{d_j - p} \cdot t_0^p \cdot \left(\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot (-1)^{p-q} \cdot q^p \right) \cdot G_{j d_j} \\
&= e^{\lambda_j t_0 p} \cdot \binom{d_j}{d_j - p} \cdot t_0^p \cdot p! \cdot G_{j d_j} \\
&\neq 0,
\end{aligned}$$

wobei wiederum die Aussagen des nachfolgenden Lemmas verwendet wurden.

Insgesamt ist damit $G_{j(d_j-p)}$ ein Hauptvektor des Endomorphismus Φ_E zum Eigenwert $e^{\lambda_j t_0}$ der Stufe $(p+1)$.

Gilt zusätzlich $|\operatorname{Im}(\lambda_j)| < \pi/t_0$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, so sind $e^{\lambda_1 t_0}, \dots, e^{\lambda_m t_0}$ paarweise verschieden und damit ist die Menge

$$\{G_{jk} \mid j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{0, \dots, d_j\}\}$$

linear unabhängig. □

Wir beweisen die im vorangegangenen Beweis verwendeten Gleichungen.

Lemma 7.1.3. *Es sei $p \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot (-1)^{p-q} \cdot q^l = 0$$

für alle $l \in \{0, \dots, p-1\}$ und

$$\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot (-1)^{p-q} \cdot q^p = p!.$$

Beweis. Der Beweis orientiert sich an [eh19]. Wir benutzen den Koeffizientenoperator $[z^l]$, der den Koeffizienten von z^l in einer Reihe bezeichnet, zum Beispiel

$$[z^l](1+z)^n = \binom{n}{l} \quad \text{und} \quad l! \cdot [z^l]e^{qz} = l! \cdot [z^l] \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(qz)^j}{j!} = q^l.$$

Für $l \in \{0, \dots, p\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot (-1)^{p-q} \cdot q^l &= \sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot (-1)^{p-q} \cdot l! \cdot [z^l]e^{qz} \\
&= l! \cdot [z^l] \left(\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} \cdot (-1)^{p-q} \cdot (e^z)^q \right) \\
&= l! \cdot [z^l] ((e^z - 1)^p)
\end{aligned}$$

$$= l! \cdot [z^l] \left(\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right)^p \right).$$

Die Behauptung folgt mittels Einsetzen der verschiedenen l . □

Das folgende Lemma gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung an, unter der sich F schreiben lässt als

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dabei betrachten wir den Endomorphismus

$$\Psi_W: \mathbb{C}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}, A \mapsto W \cdot A + A \cdot W^T,$$

wobei wir wiederum W zu einer \mathbb{C} -linearen Abbildung fortsetzen. Dann kommutiert auch Ψ_W mit der Konjugation und lässt $\mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ invariant.

Lemma 7.1.4. *Es gilt $F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$ für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau dann, wenn*

$$\Psi_W(G_{jd_j}) = W \cdot G_{jd_j} + G_{jd_j} \cdot W^T = \lambda_j \cdot G_{jd_j}$$

und

$$\Psi_W(G_{jk}) = W \cdot G_{jk} + G_{jk} \cdot W^T = \lambda_j \cdot G_{jk} + (k+1) \cdot G_{j(k+1)}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{0, \dots, d_j - 1\}$ gilt.

Analog zu Korollar 7.1.2 liegen dann G_{j0}, \dots, G_{jd_j} im λ_j -Hauptraum von Ψ_W , $j = 1, \dots, m$.

Beweis. Es gelte $F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$ für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} t^k \cdot e^{\lambda_j t} \cdot (W \cdot G_{jk} + G_{jk} \cdot W^T) = W \cdot F(t) + F(t) \cdot W^T \\ & = F'(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} \left((kt^{k-1} + \lambda_j t^k) \cdot e^{\lambda_j t} \cdot G_{jk} \right) \\ & = \sum_{j=1}^m \left(\left(\sum_{k=0}^{d_j-1} \left((k+1) \cdot G_{j(k+1)} + \lambda_j \cdot G_{jk} \right) t^k \right) + \lambda_j \cdot t^{d_j} \cdot G_{jd_j} \right) e^{\lambda_j t} \end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$\Psi_W(G_{jd_j}) = W \cdot G_{jd_j} + G_{jd_j} \cdot W^T = \lambda_j \cdot G_{jd_j}$$

und

$$\Psi_W(G_{jk}) = W \cdot G_{jk} + G_{jk} \cdot W^T = \lambda_j \cdot G_{jk} + (k+1) \cdot G_{j(k+1)}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{0, \dots, d_j - 1\}$ gilt.

Andererseits folgt aus $F'(t) = W \cdot F(t) + F(t) \cdot W^T$ bereits $F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$ und somit gilt auch die andere Implikation. \square

Setze $V_{\mathbb{C}} := \text{span}_{\mathbb{C}} \{G_{jk} \mid j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, d_j\}\}$. Wir nehmen an, dass $|\text{Im}(\lambda_j)| < \pi/t_0$ für alle $j = 1, \dots, m$ gilt. Nach Lemma 7.1.1 ist die darstellende Matrix von $\Phi_{E^\mu}|_{V_{\mathbb{C}}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$, $\mu \in \mathbb{Z}$, bezüglich obiger Basis eine Blockmatrix mit Blöcken der Form

$$e^{\lambda_j \mu t_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} (\mu t_0)^{1-0} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{d_j}{0} (\mu t_0)^{d_j-0} & \dots & \dots & \dots & \binom{d_j}{d_j-1} (\mu t_0)^{d_j-d_j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(d_j+1) \times (d_j+1)}$$

für $j \in \{1, \dots, m\}$. Andererseits gilt $F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$ für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nach Lemma 7.1.4 genau dann, wenn die darstellende Matrix von $\Psi_W|_{V_{\mathbb{C}}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$ bezüglich obiger Basis eine Blockmatrix mit Blöcken der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_j \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(d_j+1) \times (d_j+1)}$$

für $j \in \{1, \dots, m\}$ ist. Wir zeigen, dass die eine Matrix gleich dem Matrix-Exponential der anderen ist.

Lemma 7.1.5. Für $j \in \{1, \dots, m\}$, $\mu \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\exp \left(\mu t_0 \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_j \lambda_j \end{pmatrix} \right) = e^{\lambda_j \mu t_0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} (\mu t_0)^1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{d_j}{0} (\mu t_0)^{d_j} & \dots & \dots & \dots & \binom{d_j}{d_j-1} (\mu t_0)^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es seien $j \in \{1, \dots, m\}$ und $\mu \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \exp \left(\mu t_0 \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & d_j & \lambda_j \end{pmatrix} \right) = \exp \left(\lambda_j \mu t_0 \cdot \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu t_0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \mu t_0 d_j & 0 \end{pmatrix} \right) \\
& = e^{\lambda_j \mu t_0} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mu t_0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \mu t_0 d_j & 0 \end{pmatrix}^l \\
& = e^{\lambda_j \mu t_0} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \cdot \text{diag} \left(0!(\mu t_0)^0, 1!(\mu t_0)^1, \dots, d_j!(\mu t_0)^{d_j} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^l \\
& = e^{\lambda_j \mu t_0} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \cdot \text{diag} \left(\frac{1}{0!(\mu t_0)^0}, \frac{1}{1!(\mu t_0)^1}, \dots, \frac{1}{d_j!(\mu t_0)^{d_j}} \right) \\
& = e^{\lambda_j \mu t_0} \cdot \sum_{l=0}^{d_j} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \binom{l}{1} (\mu t_0)^l & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \binom{d_j}{l} (\mu t_0)^l & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= e^{\lambda_j \mu t_0} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & \binom{1}{0} (\mu t_0)^1 & & & & & \vdots \\ & \vdots & & & & & 0 \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & \binom{d_j}{0} (\mu t_0)^{d_j} & \dots & \dots \\ & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & \binom{d_j}{d_j-1} (\mu t_0)^1 & \dots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Wir werden folglich versuchen, W so zu setzen, dass $\Psi_W|_{V_{\mathbb{C}}}$ in gewisser Weise der Logarithmus von $\Phi_E|_{V_{\mathbb{C}}}$ ist. Ein Hilfsmittel dafür ist die vollständige multiplikative Jordan-Zerlegung einer Matrix.

7.2 Vollständige multiplikative Jordan-Zerlegung und Matrix-Logarithmus

Wir orientieren uns in unseren Ausführungen zur vollständigen multiplikativen Jordan-Zerlegung an [Ebe96, S. 122-125].

Satz 7.2.1. (Vollständige multiplikative Jordan-Zerlegung). *Für $B \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ gibt es eindeutige $\phi, H, U \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $B = \phi \cdot H \cdot U$, so dass gilt:*

- (i) ϕ, H und U kommutieren paarweise,
- (ii) ϕ ist diagonalisierbar über \mathbb{C} mit Eigenwerten in $S^1 \subseteq \mathbb{C}$,
- (iii) H ist diagonalisierbar über \mathbb{R} mit Eigenwerten in $(0, \infty)$,
- (iv) U ist unipotent, das heißt, $U - I$ ist nilpotent.

Jedes $T \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, das mit B kommutiert, kommutiert dann auch mit ϕ, H und U .

Bemerkung. Jeder B -invariante Untervektorraum Z ist dann auch ϕ -, H - und U -invariant. Denn nach einem Satz von Halmos (vgl. [Dom10]) existiert ein $T \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ mit $Z = \ker(T)$ und $[T, B] = 0$. Insbesondere gilt dann $[T, \phi] = 0$, $[T, H] = 0$ und $[T, U] = 0$. Also ist Z auch ϕ -, H - und U -invariant.

Es sei $B \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und B habe keine Eigenwerte in $(-\infty, 0)$. Weiter sei $B = \phi \cdot H \cdot U$ die vollständige multiplikative Jordan-Zerlegung von B . Wir konstruieren einen Matrix-Logarithmus von B , indem wir Matrix-Logarithmen W_{im}, W_{re} beziehungsweise N von ϕ, H beziehungsweise U konstruieren.

Dafür rekapitulieren wir die Konstruktion von ϕ , H und U bei der vollständigen multiplikativen Jordan-Zerlegung. Dabei startete man mit der gewöhnlichen multiplikativen Jordan-Zerlegung einer invertierbaren Matrix $B = P \cdot U = U \cdot P$ für eine über \mathbb{C} diagonalisierbare (halbeinfache) Matrix P und eine unipotente Matrix U . Da U unipotent ist, existiert ein eindeutiges nilpotentes $N \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ mit $U = e^N$; explizit

$$N = \log(I - (I - U)) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} (- (I - U))^k}{k} = - \sum_{k=1}^n \frac{(I - U)^k}{k}$$

(vgl. [Gal08, Proposition 3.2]). Da P diagonalisierbar über \mathbb{C} ist, existiert eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\rho_1, \dots, \rho_n \neq 0$. Zunächst definierte man dann die linearen Abbildungen H und ϕ auf dem \mathbb{C}^n durch $H(v_j) = |\rho_j| \cdot v_j$ und $\phi(v_j) = \rho_j/|\rho_j| \cdot v_j$ mit $|\rho_j| \in (0, \infty)$ und $\rho_j/|\rho_j| \in S^1 \setminus \{-1\}$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ (B hat keine negativen Eigenwerte und damit auch P nicht.). Dann gilt $P = \phi \cdot H = H \cdot \phi$. Für den Matrix-Logarithmus setzen wir $W_{re}(v_j) = \log(\rho_j) \cdot v_j$ und $W_{im}(v_j) = \log(\rho_j/|\rho_j|) \cdot v_j$ mit $\log(\rho_j/|\rho_j|) \in i(-\pi, \pi)$ für den Hauptzweig des Logarithmus. Dann gilt offenbar $H = e^{W_{re}}$ und $\phi = e^{W_{im}}$ und $[W_{re}, W_{im}] = 0$.

Man erhielt eine Zerlegung auf dem \mathbb{R}^n wie folgt. Ist ρ_j reell und sei V_j der eindimensionale Untervektorraum von \mathbb{R}^n der von dem Real- oder Imaginärteil von v_j aufgespannt wird. Dann definierte man H und ϕ auf V_j durch $H = |\rho_j| \cdot \text{id}_{V_j}$ und $\phi = \rho_j/|\rho_j| \cdot \text{id}_{V_j} = \text{id}_{V_j}$ (P hat keine negativen Eigenwerte). Für den Logarithmus setzen wir W_{re} und W_{im} auf V_j als $W_{re} = \log(|\rho_j|) \cdot \text{id}_{V_j}$ und $W_{im} = 0$. Ist ρ_j nicht reell, so sei V_j der zweidimensionale Untervektorraum des \mathbb{R}^n , der von dem Real- und Imaginärteil von v_j aufgespannt wird. Man definierte H auf V_j als $H = |\rho_j| \cdot \text{id}_{V_j}$ und ϕ als die Rotation auf V_j um das Argument $\theta_j \in (-\pi, \pi)$ von $\rho_j = |\rho_j| e^{i\theta_j}$, das heißt, die darstellende Matrix von ϕ auf V_j bezüglich der Basis aus Real- und Imaginärteil von v_j war

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}.$$

Wir definieren W_{re} auf V_j als $W_{re} = \log(|\rho_j|) \cdot \text{id}_{V_j}$ und setzen W_{im} auf V_j , so dass die darstellende Matrix von W_{im} bezüglich obiger Basis gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -\theta_j \\ \theta_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Da

$$\exp \left(\begin{pmatrix} 0 & -\theta_j \\ \theta_j & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_j) & -\sin(\theta_j) \\ \sin(\theta_j) & \cos(\theta_j) \end{pmatrix}$$

gilt, gilt $\phi = e^{W_{im}}$ auf V_j . Ebenso gilt $H = e^{W_{re}}$ und $[W_{re}, W_{im}] = 0$ auf V_j . Da für einen nicht reellen Eigenwert ρ_j sein komplex Konjugiertes $\bar{\rho}_j$ zum gleichen V_j beziehungsweise

zu den gleichen Matrizen führt, erhalten wir eine direkte Summenzerlegung des \mathbb{R}^n in die V_j 's. Da ϕ , H , W_{re} sowie W_{im} alle V_j invariant lassen und $P = \phi \cdot H = H \cdot \phi$, $\phi = e^{W_{im}}$, $H = e^{W_{re}}$ auf jedem V_j gilt und alle Matrizen paarweise auf V_j kommutieren, gelten diese Eigenschaften auch auf ganz \mathbb{R}^n .

Da U die Eigenräume von ϕ und H invariant lässt und damit auch die von W_{re} und W_{im} , kommutiert U auch mit diesen Matrizen. Nach der definierenden Gleichung für N kommutiert N demnach auch mit W_{re} und W_{im} .

Wir haben damit im Wesentlichen den folgenden Satz bewiesen.

Satz 7.2.2. *Es sei $B \in GL(n, \mathbb{R})$ und B besitze keinen Eigenwert in $(-\infty, 0)$. Weiter sei $B = \phi \cdot H \cdot U$ die eindeutige vollständige Jordan-Zerlegung von B (siehe Satz 7.2.1). Dann existieren eindeutige $W_{re}, W_{im}, N \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi = e^{W_{im}}$, $H = e^{W_{re}}$ und $U = e^N$, so dass gilt*

- (i) $\phi, H, U, W_{re}, W_{im}$ und N kommutieren paarweise,
- (ii) W_{re} ist diagonalisierbar über \mathbb{R} ,
- (iii) W_{im} ist diagonalisierbar über \mathbb{C} mit Eigenwerten in $i(-\pi, \pi)$,
- (iv) N ist nilpotent.

Jedes $T \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, das mit B kommutiert, kommutiert auch mit W_{re}, W_{im} und N . Jeder B -invariante Untervektorraum $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ ist auch W_{re} -, W_{im} - und N -invariant.

Beweis. Es fehlt noch der Beweis der letzten Aussage. Es sei $T \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$, so dass B und T kommutieren. Nach Satz 7.2.1 kommutiert T dann auch mit ϕ, H und U . Insbesondere lässt T damit die Eigenräume von ϕ invariant, also auch die von W_{im} . Es folgt $[T, W_{im}] = 0$ und analog $[T, W_{re}] = 0$. Da $[T, U] = 0$ ist, folgt aus der definierenden Gleichung für N auch $[T, N] = 0$.

Analog zur Bemerkung nach Satz 7.2.1 ist jeder B -invariante Untervektorraum $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ auch W_{re} -, W_{im} - und N -invariant. \square

Allgemeiner besitzt eine reelle Matrix genau dann einen reellen Logarithmus, wenn sie invertierbar ist und jeder Jordan-Block, der zu einem reellen negativen Eigenwert gehört, in einer geraden Anzahl auftritt. Wir verweisen für Details auf [Gal08, Theorem 3.4] und [Cul66, Theorem 1] sowie die darin enthaltenen Literaturverweise.

Um die Endomorphismen $\Phi_{E\mu}: \mathbb{C}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}$, $\mu \in \mathbb{Z}$, und $\Psi_W: \mathbb{C}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}$ für ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besser analysieren zu können, ist das Kronecker-Produkt und die Kronecker-Summe ein wichtiges Hilfsmittel, welches wir im folgenden Kapitel kurz einführen.

7.3 Kronecker-Produkt und Kronecker-Summe

Das Kronecker-Produkt und die Kronecker-Summe sind wichtige Hilfsmittel der linearen Algebra und werden zum Beispiel beim Lösen von Matrix-Gleichungen verwendet. Wir verwenden sie, um die Endomorphismen

$$\Phi_C: \mathbb{K}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}_{sym}^{n \times n}, A \mapsto C \cdot A \cdot C^T$$

und

$$\Psi_C: \mathbb{K}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}_{sym}^{n \times n}, A \mapsto C \cdot A + A \cdot C^T$$

für $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ als Matrizen zu schreiben und besser analysieren zu können. Die hier genannten Definitionen und Aussagen zu Kronecker-Produkt und Summe stammen aus [HJ91, Kapitel 4].

Definition 7.3.1. Das Kronecker-Produkt einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$ und einer Matrix $B \in \mathbb{K}^{r \times s}$ ist definiert als

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1q}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}B & \cdots & a_{pq}B \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{pr \times qs}.$$

Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$ ist der vec -Operator definiert als

$$\text{vec}(A) = (a_{11}, \dots, a_{p1}, a_{12}, \dots, a_{p2}, \dots, a_{1q}, \dots, a_{pq})^T,$$

das heißt, die Einträge von A werden spaltenweise in einem Vektor der Länge pq gesammelt.

In dem folgenden Lemma fassen wir einige grundlegende Eigenschaften des Kronecker-Produkts zusammen.

Lemma 7.3.2. *Es seien $A \in \mathbb{K}^{p \times q}$ und $B \in \mathbb{K}^{r \times s}$.*

(i) *Das Kronecker-Produkt ist bilinear und assoziativ.*

(ii) *Sind $C \in \mathbb{K}^{q \times k}$ und $D \in \mathbb{K}^{s \times l}$, so gilt*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD).$$

(iii) *Es gilt $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.*

(iv) *Sind A und B quadratische und invertierbare Matrizen, so ist auch $A \otimes B$ invertierbar und es gilt*

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

Weiter sind die Eigenwerte von $A \otimes B$ eindeutig durch die Eigenwerte von A und B bestimmt.

Satz 7.3.3. [HJ91, Theorem 4.2.12] *Es sei $A \in \mathbb{K}^{p \times p}$ und $B \in \mathbb{K}^{q \times q}$. Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor x und μ ein Eigenwert von B mit zugehörigem Eigenvektor y , so ist $\lambda\mu$ ein Eigenwert von $A \otimes B$ mit zugehörigem Eigenvektor $x \otimes y$. Jeder Eigenwert von $A \otimes B$ ist solch ein Produkt von Eigenwerten von A und B .*

Bemerkungen.

- (i) Nicht jeder Eigenvektor von $A \otimes B$ lässt sich als Linearkombination von Kronecker-Produkten von Eigenvektoren von A und B schreiben, wie das folgende Beispiel zeigt.

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein Jordan-Block der Größe zwei. Dieser hat als Eigenvektor den Standardbasisvektor e_1 . Zudem ist der Standardbasisvektor e_2 ein Hauptvektor der Stufe 2. Die Eigenvektoren von $A \otimes A$ sind $e_1 \otimes e_1$ und $(e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1)$. Weiter ist $(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$ ein Hauptvektor der Stufe 2 und $e_2 \otimes e_2$ ein Hauptvektor der Stufe 3.

- (ii) Sind $A \in \mathbb{K}^{p \times p}$ und $B \in \mathbb{K}^{q \times q}$ diagonalisierbar und $\{x_1, \dots, x_p\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von A und $\{y_1, \dots, y_q\}$ eine Basis aus Eigenvektoren von B , so ist auch $A \otimes B$ diagonalisierbar und $\{x_i \otimes y_j \mid i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q\}$ ist eine Basis aus Eigenvektoren von $A \otimes B$ (vgl. [HJ91, Übung nach Theorem 4.2.15]).

Wir definieren die Kronecker-Summe.

Definition 7.3.4. Die Kronecker-Summe zweier quadratischer Matrizen $A \in \mathbb{K}^{p \times p}$ und $B \in \mathbb{K}^{q \times q}$ ist definiert als

$$A \oplus B = (I_q \otimes A) + (B \otimes I_p).$$

Wie für das Kronecker-Produkt erhalten wir auch für die Kronecker-Summe ein Resultat über die Eigenwerte.

Satz 7.3.5. [HJ91, Theorem 4.4.5] *Es sei $A \in \mathbb{K}^{p \times p}$ und $B \in \mathbb{K}^{q \times q}$. Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor x und μ ein Eigenwert von B mit zugehörigem Eigenvektor y , so ist $\lambda + \mu$ ein Eigenwert von $A \oplus B$ mit zugehörigem Eigenvektor $y \otimes x$. Jeder Eigenwert von $A \oplus B$ ist solch ein Produkt von Eigenwerten von A und B .*

Wie im Fall des Kronecker-Produkts ist die Kronecker-Summe zweier diagonalisierbarer Matrizen wieder diagonalisierbar.

Mit Hilfe des Matrix-Exponentials gibt es einen Zusammenhang zwischen der Kronecker-Summe und dem Kronecker-Produkt zweier Matrizen.

Lemma 7.3.6. [HJ91, Problem 30 in Kapitel 4.2] Für $A \in \mathbb{K}^{p \times p}$ und $B \in \mathbb{K}^{q \times q}$ gilt

$$e^{B \oplus A} = e^A \otimes e^B.$$

Abschließend kommen wir zum Zusammenhang zwischen zwei speziellen Matrix-Gleichungen und dem Kronecker-Produkt beziehungsweise der Summe.

Lemma 7.3.7. [HJ91, Kapitel 4.3] Für alle Matrizen A, B, C, X , für die die folgenden Matrix-Produkte beziehungsweise Gleichungen sinnvoll definiert sind, gilt

- (i) $AXB = C$ genau dann, wenn $(B^T \otimes A) \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$ gilt,
- (ii) $AX + XB = C$ genau dann, wenn $(A \oplus B^T) \text{vec}(X) = \text{vec}(C)$ gilt.

Bemerkungen.

- (i) Für Vektoren $x, y \in \mathbb{K}^p = \mathbb{K}^{p \times 1}$ entspricht nach (i) die Matrix $x \cdot y^T$ genau dem Vektor $y \otimes x$.
- (ii) Für $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ entspricht nach dem vorangegangenen Lemma der Endomorphismus

$$\Phi_C: \mathbb{K}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}_{sym}^{n \times n}, A \mapsto C \cdot A \cdot C^T$$

der Matrix $(C \otimes C)$ und der Endomorphismus

$$\Psi_C: \mathbb{K}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}_{sym}^{n \times n}, A \mapsto C \cdot A + A \cdot C^T$$

der Matrix $(C \oplus C)$ jeweils eingeschränkt auf den Untervektorraum $\text{vec}(\mathbb{K}_{sym}^{n \times n}) = \{\text{vec}(A) \mid A \in \mathbb{K}_{sym}^{n \times n}\}$. Zusammen mit Lemma 7.3.6 gilt damit

$$e^{\Psi_C} = \Phi_{e^C}.$$

Mit der Definition von Ψ_C sieht man zudem direkt, dass $\Psi_{(\alpha C)} = \alpha \cdot \Psi_C$ und $\Psi_{(C+C')} = \Psi_C + \Psi_{C'}$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $C' \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt.

7.4 Konstruktion von W

Wir wenden uns wieder unserem ursprünglichem Problem zu. Gesucht ist ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so dass $F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Wir nehmen dafür zunächst an, dass sich F schreiben lässt als

$$F(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} t^k \cdot e^{\lambda_j t} \cdot G_{jk}$$

für $\lambda_1 > \dots > \lambda_m \in \mathbb{R}$ und $G_{jk} \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$. Das heißt, das Minimalpolynom der Differentialgleichung für F hat nur reelle Nullstellen (vgl. Kapitel 1.5). Zudem nehmen wir weiterhin an, dass ein $E \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und ein $t_0 > 0$ existiert, so dass $F(t + t_0) = E \cdot F(0) \cdot E^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Um unsere Konstruktion des Matrix-Logarithmus (vgl. Satz 7.2.2) anwenden zu können, zeigen wir zunächst, dass E^{μ_0} für ein geeignetes $\mu_0 \in \mathbb{Z}$ keine negativen Eigenwerte hat beziehungsweise dass die Eigenwerte von E^{μ_0} für ein geeignetes μ_0 in einem beliebig kleinen Kegel um die positive reelle Achse ($\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \times \{0\}\} \subseteq \mathbb{C}$) liegen. Dabei ist das folgende Lemma hilfreich.

Lemma 7.4.1. *Es sei $A \in \text{O}(n)$. Dann existiert ein $\mu_0 \in \mathbb{N}$, so dass die Eigenwerte von A^{μ_0} beliebig nahe bei 1 sind.*

Beweis. Es sei $A \in \text{O}(n)$. Da $\text{O}(n) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ kompakt ist, besitzt die Folge $(A^j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge und damit auch eine Cauchy-Teilfolge. Für $\epsilon > 0$ existieren damit $j_1 > j_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\epsilon > \|A^{j_1} - A^{j_2}\|$$

in der Operatornorm, die vom gewöhnlichen Skalarprodukt induziert wird. Da $A^{-j_2} \in \text{O}(n)$ ist, gilt

$$\|A^{-j_2}\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\sqrt{\langle A^{-j_2}x, A^{-j_2}x \rangle}}{\|x\|} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$$

und damit

$$\epsilon = \epsilon \cdot \|A^{-j_2}\| > \|A^{j_1} - A^{j_2}\| \cdot \|A^{-j_2}\| \geq \|A^{j_1-j_2} - \text{I}_n\|.$$

Folglich existiert ein $\mu_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\epsilon > \|A^{\mu_0} - \text{I}_n\| \geq \rho(A^{\mu_0} - \text{I}_n) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ Eigenwert von } A^{\mu_0} - \text{I}_n\},$$

wobei $\rho(A^{\mu_0} - \text{I}_n)$ den Spektralradius von $A^{\mu_0} - \text{I}_n$ bezeichne und die Ungleichung direkt aus der Submultiplikativität der Operatornorm folgt. \square

Wir beginnen mit der Konstruktion von W und schreiben dafür $E = \phi \cdot H \cdot U$ gemäß Satz 7.2.1 zur vollständigen multiplikativen Jordan-Zerlegung. Da ϕ nach Konstruktion ähnlich zu einer orthogonalen Matrix ist, existiert nach dem vorangestellten Lemma ein $\mu_0 \in \mathbb{N}$, so dass die Eigenwerte von ϕ^{μ_0} beliebig nahe bei 1 liegen. Das heißt, die Eigenwerte von ϕ^{μ_0} liegen in $\{e^{i\theta} \mid -\epsilon < \theta < \epsilon\}$ beziehungsweise die Eigenwerte von E^{μ_0} liegen in $\{re^{i\theta} \mid r \in (0, \infty), -\epsilon < \theta < \epsilon\}$ für ein beliebiges $0 < \epsilon < \pi/2$. Insbesondere besitzt E^{μ_0} keine negativen Eigenwerte. Damit existieren $W_{im}, W_{re}, N \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$ gemäß Satz 7.2.2 mit

$$\phi^{\mu_0} = e^{\mu_0 t_0 W_{im}}, \quad H^{\mu_0} = e^{\mu_0 t_0 W_{re}} \quad \text{und} \quad U^{\mu_0} = e^{\mu_0 t_0 N}$$

beziehungsweise

$$E^{\mu_0} = e^{\mu_0 t_0 (W_{re} + W_{im} + N)}.$$

Wir setzen $W := W_{re} + W_{im} + N \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dabei liegen die Eigenwerte von $\mu_0 t_0 \cdot W_{im}$ in $\imath(-\epsilon, \epsilon)$. Nach den Vorüberlegungen zum Kronecker-Produkt entspricht $\Phi_{\phi^{\mu_0}}$ gerade der Matrix $\phi^{\mu_0} \otimes \phi^{\mu_0}$ eingeschränkt auf $\text{vec}(\mathbb{R}_{sym}^{n \times n})$ (vgl. Lemma 7.3.7). Nach Satz 7.3.3 und (ii) in der anschließenden Bemerkung ist damit $\Phi_{\phi^{\mu_0}}$ diagonalisierbar über \mathbb{C} mit Eigenwerten in $\{e^{i\theta} \mid -2\epsilon < \theta < 2\epsilon\}$. Auf analoge Weise sieht man, dass $\Phi_{H^{\mu_0}}$ diagonalisierbar über \mathbb{R} mit Eigenwerten in $(0, \infty)$ und $\Phi_{U^{\mu_0}}$ unipotent ist. Da ϕ, H und U paarweise kommutieren, kommutieren auch $\Phi_{\phi^{\mu_0}}, \Phi_{H^{\mu_0}}$ und $\Phi_{U^{\mu_0}}$ paarweise. Die vollständige multiplikative Jordan-Zerlegung gemäß Satz 7.2.1 von $\Phi_{E^{\mu_0}}$ ist damit gegeben durch

$$\Phi_{E^{\mu_0}} = \Phi_{\phi^{\mu_0}} \circ \Phi_{H^{\mu_0}} \circ \Phi_{U^{\mu_0}}$$

und die Eigenwerte von $\Phi_{E^{\mu_0}}$ liegen in $\{re^{i\theta} \mid r \in (0, \infty), -2\epsilon < \theta < 2\epsilon\}$ und damit insbesondere nicht in $(-\infty, 0)$. Damit gibt es gemäß Satz 7.2.2 eindeutige Logarithmen für $\Phi_{\phi^{\mu_0}}, \Phi_{H^{\mu_0}}$ und $\Phi_{U^{\mu_0}}$ mit Eigenwerten aus $\imath(-\pi, \pi)$, \mathbb{R} beziehungsweise $\{0\}$. Mit Bemerkung (ii) nach Lemma 7.3.7 folgt

$$\Phi_{\phi^{\mu_0}} = \Phi_{e^{\mu_0 t_0 W_{im}}} = e^{\Psi(\mu_0 t_0 W_{im})} = e^{\mu_0 t_0 \Psi_{W_{im}}}, \quad \Phi_{H^{\mu_0}} = e^{\mu_0 t_0 \Psi_{W_{re}}}, \quad \Phi_{U^{\mu_0}} = e^{\mu_0 t_0 \Psi_N}.$$

Da W_{re}, W_{im} und N paarweise kommutieren, kommutieren auch $\Psi_{W_{re}}, \Psi_{W_{im}}$ und Ψ_N paarweise und es gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{E^{\mu_0}} &= e^{\mu_0 t_0 \Psi_{W_{im}}} \circ e^{\mu_0 t_0 \Psi_{W_{re}}} \circ e^{\mu_0 t_0 \Psi_N} = e^{\mu_0 t_0 (\Psi_{W_{im}} + \Psi_{W_{re}} + \Psi_N)} \\ &= e^{\mu_0 t_0 \Psi_{(W_{im} + W_{re} + N)}} = e^{\mu_0 t_0 \Psi_W}. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7.1.1 ist $V = \text{span}\{G_{jk} \mid j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{0, \dots, d_j\}\}$ ein $\Phi_{E^{\mu_0}}$ -invarianter Untervektorraum. Nach Satz 7.2.2 ist V damit auch $\Psi_{W_{im}}, \Psi_{W_{re}}$ - und Ψ_N -invariant und damit auch Ψ_W -invariant.

Bezeichne mit \tilde{E} die darstellende Matrix von $\Phi_{E^{\mu_0}}|_V$ und mit \tilde{W} die darstellende Matrix von $\Psi_W|_V$ bezüglich der Basis $\{G_{jk} \mid j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{0, \dots, d_j\}\}$ (vgl. Korollar 7.1.2, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ reell). Aus

$$\Phi_{E^{\mu_0}} = e^{\mu_0 t_0 \Psi_W}$$

folgt dann

$$\tilde{E} = e^{\mu_0 t_0 \tilde{W}}.$$

Nach der Bemerkung vor Lemma 7.1.5 ist \tilde{E} eine Blockmatrix mit Blöcken der

Form

$$e^{\lambda_j \mu_0 t_0} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \binom{1}{0} (\mu_0 t_0)^{1-0} & & & & \\ \vdots & & & & \\ \binom{d_j}{0} (\mu_0 t_0)^{d_j-0} & \dots & \dots & \binom{d_j}{d_j-1} (\mu_0 t_0)^{d_j-d_j+1} & \dots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d_j+1) \times (d_j+1)}$$

für $j \in \{1, \dots, m\}$. Die Eigenwerte von \tilde{E} sind also reell und positiv und zu jedem Eigenwert $e^{\mu_0 t_0 \lambda_j}$, $j = 1, \dots, m$, gehört genau ein Jordan-Block der Größe $(d_j + 1)$. Nach einem Satz von Culver [Cul66, Theorem 2] hat die Gleichung $e^X = \tilde{E}$ eine eindeutige reelle Lösung. Zum einen gilt $e^{\mu_0 t_0 \tilde{W}} = \tilde{E}$ für die reelle Matrix \tilde{W} und zum anderen löst die reelle Blockmatrix mit der gleichen Blockstruktur wie \tilde{E} und Blöcken der Form

$$\mu_0 t_0 \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_j \lambda_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d_j+1) \times (d_j+1)},$$

$j = 1, \dots, m$, nach Lemma 7.1.5 die Gleichung. Folglich ist \tilde{W} eine Blockmatrix mit Blöcken der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_j \lambda_j \end{pmatrix},$$

$j = 1, \dots, m$. Da \tilde{W} die darstellende Matrix von $\Psi_W|_V$ bezüglich der Basis $\{G_{jk} \mid j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{0, \dots, d_j\}\}$ ist, gilt

$$\Psi_W(G_{jd_j}) = W \cdot G_{jd_j} + G_{jd_j} \cdot W^T = \lambda_j \cdot G_{jd_j}$$

und

$$\Psi_W(G_{jk}) = W \cdot G_{jk} + G_{jk} \cdot W^T = \lambda_j \cdot G_{jk} + (k+1) \cdot G_{j(k+1)}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{0, \dots, d_j - 1\}$. Nach Lemma 7.1.4 gilt so-

mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir haben insgesamt den folgenden Satz bewiesen.

Satz 7.4.2. *Es sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ein reelles exponentielles Polynom, dessen zugehöriges Minimalpolynom nur reelle Nullstellen besitze (vgl. Kapitel 1.5). Weiter existiere ein $E \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und ein $t_0 > 0$ mit $F(t + t_0) = E \cdot F(t) \cdot E^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit*

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Wir beweisen im Folgenden eine andere Version des obigen Satzes, wobei sich die Beweise in der Methodik sehr ähneln. Dabei fordern wir weniger starke Einschränkungen an die Nullstellen des Minimalpolynoms des exponentiellen Polynoms F , stellen aber im Gegenzug Forderungen an die Eigenwerte von E .

Schreibe wie anfangs

$$F(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} e^{\lambda_j t} \cdot t^k \cdot G_{jk}$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $d_j \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und $G_{jk} \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}$ für $k = 0, \dots, d_j$ und $j = 1, \dots, m$, wobei $\{\lambda_j \mid j = 1, \dots, m\}$ invariant unter Konjugation sei und $G_{jk} = \overline{G_{j'k}}$ für alle $j, j' \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_j = \overline{\lambda_{j'}}$ und $k = 0, \dots, d_j = d_{j'}$ gelte. Weiter existiere eine $E \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und ein $t_0 > 0$ mit

$$F(t + t_0) = E \cdot F(t) \cdot E^T$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Weiter nehmen wir an, dass alle Eigenwerte von E positiven Realteil besitzen und dass $|\text{Im}(\lambda_j)| < \pi/t_0$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt.

Sei $E = \phi \cdot H \cdot U$ die multiplikative Jordan-Zerlegung von $E \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ gemäß Satz 7.2.1. Wir setzen E , ϕ , H und U jeweils \mathbb{C} -linear fort zu Elementen der $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ und betrachten jeweils die invertierbaren Endomorphismen

$$\Phi_E: \mathbb{C}_{sym}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}, A \mapsto E \cdot A \cdot E^T$$

beziehungsweise Φ_ϕ , Φ_H und $\Phi_U \in \text{GL}(\mathbb{C}_{sym}^{n \times n})$. Nach Lemma 7.1.1 gilt

$$\Phi_E(G_{jl}) = E \cdot G_{jl} \cdot E^T = e^{\lambda_j t_0} \cdot \sum_{k=l}^{d_j} \binom{k}{l} \cdot t_0^{k-l} \cdot G_{jk}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{0, \dots, d_j\}$. Der Endomorphismus Φ_E lässt daher $V_{\mathbb{C}} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{G_{jk} \mid j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{0, \dots, d_j\}\}$ invariant und kommutiert mit der

Konjugation, so dass Φ_E auch $V = V_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}_{sym}^{n \times n} = \{G + \overline{G} \mid G \in V_{\mathbb{C}}\} = \text{span}\{F(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ invariant lässt.

Wieder ist $\Phi_E = \Phi_{\phi} \circ \Phi_H \circ \Phi_U$ die multiplikative Jordan-Zerlegung, wobei $\Phi_E, \Phi_{\phi}, \Phi_H$ und Φ_U jeweils mit der Konjugation kommutieren und daher $\mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ invariant lassen.

Aus der Eindeutigkeit der multiplikativen Jordan-Zerlegung und der Invarianz von $V_{\mathbb{C}}$ unter Φ_{ϕ}, Φ_H und Φ_U (vgl. Bemerkung nach Satz 7.2.1) folgt

$$\begin{aligned}\Phi_{\phi}(G_{jl}) &= e^{\iota \text{Im}(\lambda_j)t_0} \cdot G_{jl}, \\ \Phi_H(G_{jl}) &= e^{\text{Re}(\lambda_j)t_0} \cdot G_{jl}, \\ \Phi_U(G_{jl}) &= \sum_{k=l}^{d_j} \binom{k}{l} \cdot t_0^{k-l} \cdot G_{jk}\end{aligned}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $l \in \{0, \dots, d_j\}$. Nach Satz 7.3.3, (ii) in der daran anschließenden Bemerkung und Bemerkung (i) nach Lemma 7.3.7 ist damit

$$G_{jl} \in \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ p_{\alpha} \cdot q_{\beta}^T + q_{\beta} \cdot p_{\alpha}^T \mid \alpha, \beta \in S^1, \alpha\beta = e^{\iota \text{Im}(\lambda_j)t_0}, p_{\alpha} \in E(\phi, \alpha), q_{\beta} \in E(\phi, \beta) \right\}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $l \in \{0, \dots, d_j\}$, wobei $E(\phi, \alpha)$ beziehungsweise $E(\phi, \beta)$ die Eigenräume von ϕ zu den Eigenwerten α beziehungsweise β bezeichnen.

Wir setzen W_{im}, W_{re} und N wie in der Herleitung von Satz 7.2.2, das heißt mit $\phi = e^{t_0 W_{im}}, H = e^{t_0 W_{re}}$ und $U = e^{t_0 N}$. Es gilt also $W_{im} \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ mit

$$W_{im}|_{E(\phi, \alpha)} = \frac{1}{t_0} \cdot \log(\alpha) \cdot \text{id}_{E(\phi, \alpha)}$$

für den Hauptzweig des Logarithmus und alle Eigenwerte α von ϕ . Da die Eigenwerte von E nach Annahme nur positiven Realteil haben, hat ϕ nur Eigenwerte in $\{e^{\iota\theta} \mid -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$. Sind α, β Eigenwerte von ϕ mit Eigenvektoren p_{α} und q_{β} und $\alpha\beta = e^{\iota \text{Im}(\lambda_j)t_0}$ für ein $j \in \{1, \dots, m\}$, so gilt $\log(\alpha), \log(\beta) \in \iota(-\pi/2, \pi/2)$ und mit der Annahme $\text{Im}(\lambda_j)t_0 \in (-\pi, \pi)$ folgt

$$\begin{aligned}\Psi_{W_{im}}(p_{\alpha} \cdot q_{\beta}^T + q_{\beta} \cdot p_{\alpha}^T) &= W_{im}(p_{\alpha} \cdot q_{\beta}^T + q_{\beta} \cdot p_{\alpha}^T) + (p_{\alpha} \cdot q_{\beta}^T + q_{\beta} \cdot p_{\alpha}^T) W_{im}^T \\ &= \frac{1}{t_0} \cdot (\log(\alpha) + \log(\beta)) \cdot (p_{\alpha} \cdot q_{\beta}^T + q_{\beta} \cdot p_{\alpha}^T) \\ &= \frac{1}{t_0} \cdot \log(\alpha\beta) \cdot (p_{\alpha} \cdot q_{\beta}^T + q_{\beta} \cdot p_{\alpha}^T) \\ &= \iota \text{Im}(\lambda_j) \cdot (p_{\alpha} \cdot q_{\beta}^T + q_{\beta} \cdot p_{\alpha}^T).\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\Psi_{W_{im}}(G_{jl}) = \iota \text{Im}(\lambda_j) \cdot G_{jl}$$

und analog

$$\Psi_{W_{re}}(G_{jl}) = \operatorname{Re}(\lambda_j) \cdot G_{jl}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $l \in \{0, \dots, d_j\}$. Es ist

$$\Phi_U = \Phi_{e^{t_0 N}} = e^{\Psi_{t_0 N}} = e^{t_0 \Psi_N}$$

und nach Satz 7.3.3 ist Φ_U unipotent. Da Ψ_N nach Satz 7.3.5 nilpotent ist, ist damit $t_0 \Psi_N$ der eindeutige Logarithmus von Φ_U . Da $V_{\mathbb{C}}$ invariant unter Φ_U ist, ist $V_{\mathbb{C}}$ damit auch invariant unter Ψ_N . Mit einer vergleichbaren Rechnung wie in Lemma 7.1.5 folgt somit

$$\Psi_N(G_{jd_j}) = 0 \text{ und } \Psi_N(G_{jl}) = (l+1) \cdot G_{j(l+1)}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und alle $l \in \{0, \dots, d_j - 1\}$.

Setzt man $W = W_{im} + W_{re} + N$, so folgt mit $\Psi_W = \Psi_{W_{im}} + \Psi_{W_{re}} + \Psi_N$ insgesamt

$$\Psi_W(G_{jd_j}) = W \cdot G_{jd_j} + G_{jd_j} \cdot W^T = \lambda_j \cdot G_{jd_j}$$

und

$$\Psi_W(G_{jl}) = W \cdot G_{jl} + G_{jl} \cdot W^T = \lambda_j \cdot G_{jl} + (l+1) \cdot G_{j(l+1)}$$

für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $l \in \{0, \dots, d_j - 1\}$ gilt. Mit Lemma 7.1.4 folgt

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz 7.4.3. *Es sei $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}$ ein reelles exponentielles Polynom und bezeichne mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ die Nullstellen des zugehörigen Minimalpolynoms. Zudem existiere ein $E \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$ und ein $t_0 > 0$ mit $F(t + t_0) = E \cdot F(t) \cdot E^T$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gelte $|\operatorname{Im}(\lambda_j)| < \pi/t_0$. Weiter besitze E nur Eigenwerte mit positivem Realteil. Dann existiert ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit*

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Bemerkungen.

- (i) Ohne die Voraussetzung, dass $|\operatorname{Im}(\lambda_j)| < \pi/t_0$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt, ist die Aussage des obigen Satzes im Allgemeinen falsch, wie das folgende Beispiel zeigt. Betrachte das exponentielle Polynom

$$F(t) = 2 \cdot e^{-2t} + \frac{1}{2} \cdot e^{(-2+i)t} + \frac{1}{2} \cdot e^{(-2-i)t} = e^{-t} \cdot (2 + \cos(t)) \cdot e^{-t}.$$

Mit $t_0 = 2\pi$ und $E = e^{-2\pi}$ gilt dann

$$F(t + 2\pi) = e^{-2\pi} \cdot e^{-t} \cdot (2 + \cos(t)) \cdot e^{-t} \cdot e^{-2\pi} = E \cdot F(t) \cdot E^T$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Allerdings existiert offensichtlich kein $W \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ mit

$$F(t) = e^{tW} \cdot F(0) \cdot e^{tW^T}.$$

- (ii) Wir verwenden in diesem Kapitel nicht direkt, dass F eine Lösung unseres Problems gemäß 2.1.5(a) ist. Diese Eigenschaft spielte aber eine entscheidende Rolle bei der Rechtfertigung der Annahme, dass F ein reelles exponentielles Polynom ist.

Ist F eine Lösung unseres Problems, so gelten durch die Bedingungen an die Determinante beziehungsweise die Differenz der Determinante weitere Einschränkungen an $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ und die Koeffizientenmatrizen G_{jk} , $k = 1, \dots, d_j$, $j = 1, \dots, m$. So ist das in (i) betrachtete Beispiel offensichtlich keine Lösung unseres Problems. Im folgenden Kapitel wenden wir uns wieder Lösungen zu.

7.5 Klassifikationsprogramm längs geschlossener Geodätischer

Zum Abschluss kommen wir auf unser Klassifikationsprogramm aus Kapitel 6 zurück und betrachten dieses im Kontext geschlossener Geodätischer. Wir haben gezeigt, dass sich allgemeine exponentielle Polynome, die Lösung unseres Problems gemäß 2.1.5(a) sind, nach und nach vereinfachen lassen – ohne die Eigenschaft, eine Lösung zu sein, dabei zu verlieren.

Es ist direkt einzusehen, dass die Eigenschaft, dass $F(t + t_0) = E \cdot F(t) \cdot E^T$ für ein $E \in GL(n, \mathbb{R})$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, verloren geht, wenn wir die Matrix E beim Vereinfachungsprozess unverändert lassen. Vereinfachen wir die Matrix E bei diesem Prozess allerdings in ähnlicher Weise, so bleibt die Periodizitätseigenschaft bestehen. Wir beschreiben dieses Vorgehen nun genauer:

1. Wir beginnen mit einem beliebigen reellen exponentiellen Polynom

$$F(t) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^{d_j} e^{\lambda_j t} \cdot t^k \cdot G_{jk}$$

mit $m \in \mathbb{N}$, $d_j \in \mathbb{N}_0$, paarweise verschiedenen $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und $G_{jk} \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n}$ für $k = 0, \dots, d_j$ und $j = 1, \dots, m$, wobei $\{\lambda_j \mid j = 1, \dots, m\}$ invariant unter Konjugation sei und $G_{jk} = \overline{G_{j'k}}$ für alle $j, j' \in \{1, \dots, m\}$ mit $\lambda_j = \overline{\lambda_{j'}}$ und $k = 0, \dots, d_j = d_{j'}$

gelte. Zudem sei F eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a) und es existiere ein $E \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und ein $t_0 > 0$ mit

$$F(t + t_0) = E \cdot F(t) \cdot E^T$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Nach Satz 6.2.1 ist

$$F_0(t) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot G_{j0}$$

ebenfalls eine Lösung unseres Problems gemäß Definition 2.1.5(a).

Analog zu den vorherigen Überlegungen sei $E = \phi \cdot H \cdot U$ die multiplikative Jordan-Zerlegung von E gemäß Satz 7.2.1. Die multiplikative Jordan-Zerlegung von Φ_E ist dann gegeben durch $\Phi_E = \Phi_\phi \circ \Phi_H \circ \Phi_U$. Setze $E_0 := \phi \cdot H$. Dann ist die multiplikative Jordan-Zerlegung von Φ_{E_0} gegeben durch $\Phi_{E_0} = \Phi_\phi \circ \Phi_H$. Hauptvektoren von Φ_E werden damit zu Eigenvektoren von Φ_{E_0} . Da G_{j0} nach Korollar 7.1.2 ein Hauptvektor von Φ_E zum Eigenwert $e^{\lambda_j t_0}$ ist, ist G_{j0} insbesondere ein Eigenvektor zum Eigenwert $e^{\lambda_j t_0}$. Folglich gilt

$$F_0(t + t_0) = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot e^{\lambda_j t_0} \cdot G_{j0} = \sum_{j=1}^m e^{\lambda_j t} \cdot E_0 \cdot G_{j0} \cdot E_0^T = E_0 \cdot F_0(t) \cdot E_0^T$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Da F_0 eine Lösung unseres Problems gemäß 2.1.5(a) ist, ist nach Satz 6.3.1 auch

$$\tilde{F}(t) = \sum_{j=1}^m e^{\text{Re}(\lambda_j)t} \cdot \text{Re}(G_{j0})$$

eine Lösung unseres Problems. Setze $\tilde{E} := H$. Dann ist $\Phi_{\tilde{E}} = \Phi_H$ die multiplikative Jordan-Zerlegung von $\Phi_{\tilde{E}}$. Eigenvektoren von Φ_{E_0} zum Eigenwert α werden dann zu Eigenvektoren von $\Phi_{\tilde{E}}$ zum Eigenwert $|\alpha|$. Da G_{j0} ein Eigenvektor von Φ_{E_0} zum Eigenwert $e^{\lambda_j t_0}$ ist, folgt somit

$$\begin{aligned} \Phi_{\tilde{E}}(\text{Re}(G_{j0})) &= \frac{1}{2}(\Phi_{\tilde{E}}(G_{j0}) + \Phi_{\tilde{E}}(\overline{G_{j0}})) = \frac{1}{2}(|e^{\lambda_j t_0}| \cdot G_{j0} + \overline{\tilde{E} \cdot G_{j0} \cdot \tilde{E}^T}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\text{Re}(\lambda_j)t_0} \cdot G_{j0} + \overline{e^{\text{Re}(\lambda_j)t_0} \cdot G_{j0}}) = e^{\text{Re}(\lambda_j)t_0} \cdot \text{Re}(G_{j0}). \end{aligned}$$

Wir erhalten schließlich

$$\tilde{F}(t + t_0) = \tilde{E} \cdot \tilde{F}(t) \cdot \tilde{E}^T$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

3. Nach Satz 7.4.2 existiert somit ein $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\tilde{F}(t) = e^{tW} \cdot \tilde{F}(0) \cdot e^{tW^T}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Ziel künftiger Forschung wäre folglich, zu untersuchen, ob und wie man aus der Gestalt von \tilde{F} Rückschlüsse auf die Gestalt von F_0 beziehungsweise F erhalten kann.

Literaturverzeichnis

- [Bal95] W. Ballmann, *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, vol. 25, Springer Science & Business Media, 1995.
- [BCG95] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geometric and Functional Analysis **5** (1995), no. 5, 731–799.
- [Bes78] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, no. 93, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978.
- [BFL92] Y. Benoist, P. Foulon and F. Labourie, *Flots d’Anosov à distributions stable et instable différentiables*, Journal of the American Mathematical Society **5** (1992), no. 1, 33–74.
- [BPV95] J. Berndt, F. Prüfer and L. Vanhecke, *Symmetric-like riemannian manifolds and geodesic symmetries*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics **125** (1995), no. 2, 265–282.
- [BTV95] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, *Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces*, Lect. Notes Math., vol. 1598, Berlin: Springer-Verlag, 1995.
- [Car26] É. Cartan, *Sur une classe remarquable d’espaces de riemann*, Bulletin de la Société Mathématique de France **54** (1926), 214–264 (fr).
- [Car27] ———, *Sur une classe remarquable d’espaces de riemann. ii*, Bulletin de la Société Mathématique de France **55** (1927), 114–134 (fr).
- [Cul66] W. J. Culver, *On the existence and uniqueness of the real logarithm of a matrix*, Proceedings of the American Mathematical Society **17** (1966), no. 5, 1146–1151.
- [Dom10] I. Domanov, *On invariant subspaces of matrices: A new proof of a theorem of Halmos*, Linear Algebra and its Applications **433** (2010), no. 11, 2255–2256.
- [Dot97] I. Dotti, *On the curvature of certain extensions of H-type groups*, Proceedings of the American Mathematical Society **125** (1997), no. 2, 573–578.

- [DR92] E. Damek and F. Ricci, *A class of nonsymmetric harmonic riemannian spaces*, American Mathematical Society. Bulletin. New Series **27** (1992), no. 1, 139–142.
- [Ebe96] P. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1996.
- [eh19] epi163sqrt (<https://math.stackexchange.com/users/132007/epi163sqrt>), *Alternating sum of binomial coefficients weighted with the some constant power of their index*, Mathematics Stack Exchange, 2019, <https://math.stackexchange.com/q/3369814> (version: 2019-09-25).
- [EO76] J.-H. Eschenburg and J. J. O’Sullivan, *Growth of Jacobi fields and divergence of geodesics*, Mathematische Zeitschrift **150** (1976), no. 3, 221–237.
- [Esc80] J.-H. Eschenburg, *A note on symmetric and harmonic spaces*, Journal of the London Mathematical Society **s2-21** (1980), no. 3, 541–543.
- [Esc97] J.-H. Eschenburg, *Lecture notes on symmetric spaces*, 1997.
- [FL92] P. Foulon and F. Labourie, *Sur les variétés compactes asymptotiquement harmoniques*, Inventiones Mathematicae **109** (1992), no. 1, 97–111.
- [Gal08] J. Gallier, *Logarithms and square roots of real matrices*, Tech. Report No. MS-CIS-08-12, University of Pennsylvania Department of Computer and Information Science, 2008.
- [Got78] M. S. Goto, *Manifolds without focal points*, Journal of Differential Geometry **13** (1978), no. 3, 341–359.
- [Gre58] L. W. Green, *A theorem of E. Hopf*, Michigan Mathematical Journal **5** (1958), 31–34.
- [Heb95] J. Heber, *Homogeneous spaces of nonpositive curvature and their geodesic flow*, International Journal of Mathematics **6** (1995), 279–296.
- [Heb06] ———, *On harmonic and asymptotically harmonic homogeneous spaces*, GAFA Geometric And Functional Analysis **16** (2006), 869–890.
- [Hel01] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, no. 34, American Mathematical Society, Providence, 2001, Corrected reprint of the 1978 original.
- [HJ91] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [Kni12] G. Knieper, *New results on noncompact harmonic manifolds*, Commentarii Mathematici Helvetici **87** (2012), no. 3, 669–703.

- [Kni16] ———, *A survey on noncompact harmonic and asymptotically harmonic manifolds*, London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 146–197, Cambridge University Press, 2016.
- [KP13] G. Knieper and N. Peyerimhoff, *Noncompact harmonic manifolds*, Oberwolfach Preprints 2013 - 08, March 2013.
- [KP15] G. Knieper and N. Peyerimhoff, *Geometric properties of rank one asymptotically harmonic manifolds*, Journal of Differential Geometry **100** (2015), no. 3, 507 – 532.
- [KPV96] O. Kowalski, F. Prüfer and L. Vanhecke, *D'Atri spaces*, pp. 241–284, Birkhäuser Boston Inc., USA, 1996.
- [Kre10] P. Kreyssig, *An introduction to harmonic manifolds and the Lichnerowicz conjecture*, ArXiv e-prints - arXiv:1007.0477 [math.DG], July 2010.
- [Led57] A. J. Ledger, *Symmetric harmonic spaces*, Journal of the London Mathematical Society **s1-32** (1957), no. 1, 53–56.
- [Lic44] A. Lichnerowicz, *Sur les espaces riemanniens complètement harmoniques. (french)*, Bulletin de la Société Mathématique de France **72** (1944), 146–168.
- [Mar90] M. Marcus, *Determinants of sums*, The College Mathematics Journal **21** (1990), no. 2, 130–135.
- [Nik04] Y. Nikolayevsky, *Osserman manifolds of dimension 8*, manuscripta mathematica **115** (2004), 31–52.
- [Nik05a] ———, *Osserman conjecture in dimension $n \neq 8, 16$* , Mathematische Annalen **331** (2005), 505–522.
- [Nik05b] ———, *Two theorems on harmonic manifolds*, Commentarii Mathematici Helvetici **80** (2005), 29–50.
- [O'S74] J. J. O'Sullivan, *Manifolds without conjugate points*, Mathematische Annalen **210** (1974), 259–311.
- [Oss90] R. Osserman, *Curvature in the eighties*, The American mathematical monthly **97** (1990), no. 8, 731–756.
- [Pro06] C. Procesi, *Lie groups: an approach through invariants and representations*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [RS02] A. Ranjan and H. Shah, *Harmonic manifolds with minimal horospheres*, Journal of Geometric Analysis **12** (2002), no. 4, 683–694.

- [RS03] ———, *Busemann functions in a harmonic manifold*, *Geometriae Dedicata* **101** (2003), 167–183.
- [Sza90] Z. I. Szabó, *The Lichnerowicz conjecture on harmonic manifolds*, *Journal of Differential Geometry* **31** (1990), no. 1, 1–28.
- [Wil96] T. Willmore, *Riemannian geometry*, Oxford science publications, Clarendon Press, 1996.
- [Zim12] A.M. Zimmer, *Compact asymptotically harmonic manifolds*, *Journal of Modern Dynamics* **6** (2012), no. 3, 377–403.

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass die vorliegende Abhandlung – abgesehen von der Beratung durch Prof. Dr. Jens Heber – nach Inhalt und Form eigenständig und nur unter Verwendung der angegebenen Hilfsmittel sowie unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft erstellt wurde, sie weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen hat, veröffentlicht wurde oder zur Veröffentlichung eingereicht wurde und mir noch nie ein akademischer Grad entzogen wurde.

Patrick Panck

Kiel, Oktober 2022