
Mathematisches Beweisverständnis in Sekundarstufe und Hochschule

Theoretisches Rahmenmodell und
empirische Ergebnisse zur Entwicklung und Förderung
eines Beweisverständnisses

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
an der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von
FEMKE SPORN

Kiel, Juni 2023

Gutachter:

Prof. Dr. Daniel Sommerhoff

Zweitgutachter:

Prof. Dr. Aiso Heinze

Tag der mündlichen Prüfung:

01.09.2023

Danksagung

Danken möchte ich zunächst allen Personen, die mich auf dem Weg der Doktorarbeit begleitet haben und ohne deren Unterstützung und Rückhalt diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Allen voran danke ich Prof. Dr. Daniel Sommerhoff und Prof. Dr. Aiso Heinze für die Möglichkeit, mein Promotionsvorhaben am IPN durchführen zu können, die hervorragende Betreuung in den vergangenen Jahren und die Möglichkeit, meine Begeisterung für die Wissenschaft zu entdecken und auszuleben. Ganz herzlichen Dank für die stets offenen Ohren und die vielen konstruktiven Gespräche zu jeder Zeit. Ihr seid für mich ein herausragendes Betreuer-Team.

Ein weiterer besonderer Dank geht an Dunja Rohenroth und Dr. Lara Petersen für die bedingungslose Unterstützung in jeglicher Form, das Lösen vieler kleiner und großer Knoten und dem hilfreichen inhaltlichen sowie methodischen Austausch. Ihr seid großartig und habt beide einen großen Teil dazu beigetragen, dass ich diesen Weg mit all seinen Höhen und Tiefen gehen konnte.

Zudem danke ich den Kolleginnen und Kollegen des Mathematischen Seminars sowie allen Schulleitungen und Lehrkräften für ihre Unterstützung bei den Datenerhebungen. Des Weiteren danke ich Jan Niklas Dühr für die stets gewissenhafte und unermüdliche Unterstützung im Rahmen der Hilfskrafttätigkeiten bzw. Masterarbeit. Für das Korrekturlesen dieser Arbeit danke ich Dunja Rohenroth und Mira Hykkelbjerg Wulff.

Danken möchte ich auch meinen Kolleginnen und Kollegen am IPN für den konstruktiven und inspirierenden Austausch, die familiäre Arbeitsatmosphäre und die vielen gemeinsamen außerinstitutionellen Aktivitäten. Danke für die lehrreiche und bereichernde Zeit sowie die inhaltliche und persönliche Unterstützung. Mit euch wird jeder noch so kalte Tag herzenswarm und ich freue mich auf noch viele weitere Kuchen-Runden.

Von Herzen danke ich meiner Familie und meinen Freundinnen und Freunden, die mich in meinen Entscheidungen stets unterstützt und ermutigt haben und für den passenden Ausgleich gesorgt haben. Ein ganz besonderer Dank gebührt Mira. Du hast es in jeder noch so anstrengenden Phase geschafft, dass ich die schönen Dinge des Lebens nicht aus dem Auge verliere und hast immer einen Rat, wenn ich ratlos bin.

Zusammenfassung

Mathematisches Beweisen ist für die Mathematik als beweisende Disziplin von zentraler Bedeutung und spielt daher auch in der mathematischen Ausbildung eine wichtige Rolle. So sollen Lernende Mathematik als deduktives System begreifen und argumentative Herausforderungen erfolgreich bewältigen können. Empirische Studien haben jedoch wiederholt gezeigt, dass Lernende inhalts- und altersübergreifend Schwierigkeiten im Bereich mathematischer Beweise zeigen. In diesem Zusammenhang wird in der Forschungsliteratur verschiedentlich berichtet, dass Lernende ein adäquates Verständnis von mathematischen Beweisen aufbauen sollen. Es bleibt jedoch unklar, was genau unter einem Beweisverständnis zu verstehen ist. So ist nicht näher spezifiziert, wie sich das fachliche Beweisverständnis (einer mathematischen Fachgemeinschaft) und das individuelle Beweisverständnis (einer Person) zueinander verhalten, welche Aspekte ein solches Beweisverständnis inkludieren müsste, was zentrale Unterscheidungs- bzw. Strukturelemente sind und wie dies ggf. durch den sozialen Kontext beeinflusst wird. Neben dieser fehlenden Konzeptualisierung fehlt insbesondere auch eine systematische, empirische Untersuchung des Beweisverständnisses.

Vor diesem Hintergrund fokussiert die vorliegende Arbeit die Entwicklung eines theoretischen Rahmenmodells zur Konzeptualisierung eines mathematischen Beweisverständnisses unter Berücksichtigung fachlicher und individueller Aspekte. Das entwickelte Rahmenmodell erhöht die Vergleichbarkeit und Interpretierbarkeit der Ergebnisse bisheriger empirischer Forschung im Kontext des Beweisverständnisses und ermöglicht zukünftig eine systematische Forschung in diesem Bereich.

Im Rahmen von drei durchgeführten empirischen Studien wurde das individuelle Beweisverständnis von Lernenden in verschiedenen Phasen der mathematischen Ausbildung betrachtet. Hinsichtlich des Rahmenmodells zeigen die Ergebnisse, dass wesentliche Aspekte und Unterscheidungen innerhalb des theoretisch fundierten

Rahmenmodells zum Beweisverständnis, wie z. B. zwischen konzept- und handlungsorientiertem Beweisverständnis, auch empirisch validiert werden können. Aufgrund der Unterschiede im individuellen Beweisverständnis der Lernenden von der 8. Klassenstufe bis zum Studienbeginn ist außerdem anzunehmen, dass das theoretische Rahmenmodell eine geeignete Grundlage zur Erfassung des individuellen Beweisverständnisses darzustellen scheint und sensitiv für dessen Veränderung im Verlauf der mathematischen Ausbildung ist. Die empirischen Ergebnisse der Studien 1 und 2 deuten allerdings darauf hin, dass das Beweisverständnis sowohl von Schülerinnen und Schülern in den Klassenstufen 8 bis 11 als auch von Studierenden zu Beginn des Mathematikstudiums als eher schwach bis moderat zu beschreiben ist. Darüber hinaus zeigt sich, dass sich das individuelle Beweisverständnis im Verlauf der mathematischen Ausbildung kaum zu verändern scheint. Insgesamt wird damit unter anderem die Qualität der aktuellen Lerngelegenheiten zum Aufbau eines Beweisverständnisses in Frage gestellt und ein klarer Förderbedarf abgeleitet. In diesem Sinne zeigen die Ergebnisse von Studie 3, dass eine explizite Förderung einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses möglich ist: Die im Rahmen von Studie 3 entwickelten Unterrichtsmaterialien, die explizite Diskussions- und Reflexionsanlässe bezüglich mathematischer Beweise bieten, unterstützen den Aufbau eines adäquaten Beweisverständnisses, insbesondere bei einem handlungsorientierten Fokus.

Insgesamt liefert diese Arbeit einen systematischen Überblick über das mathematische Beweisverständnis in Form einer theoretischen Konzeptualisierung und macht deutlich, dass zukünftig eine systematische Betrachtung des Beweisverständnisses auf Basis des entwickelten Rahmenmodells fokussiert werden sollte. Basierend auf den Ergebnissen dieser Arbeit und diese ergänzend, sollte dabei unter anderem die längsschnittliche Entwicklung und gegenseitige Beeinflussung zentraler Aspekte des Beweisverständnisses explizit untersucht werden.

Abstract

Proofs are of central importance in mathematics as a proving discipline. Thus, they play an essential role in mathematics education. Learners are expected to deal with argumentative challenges successfully and – in general – to understand mathematics as a deductive system. However, empirical studies have repeatedly shown that learners experience difficulties in the context of mathematical proofs, independent of mathematical content and age groups. In this context, prior research has repeatedly suggested that learners must build an adequate understanding of proof to overcome these difficulties. However, it is not yet clear what is meant by an understanding of proof. In particular, it is not specified how the disciplinary understanding of proof (of a mathematical community) and the individual's understanding of proof (of a person) relate to each other, which aspects such an understanding of proof should include, what central distinctions or structural elements are, and how this may be impacted by the social context. In addition to the missing conceptualisation, there is also a lack of systematic, empirical investigation of the understanding of proof.

Against this background, this dissertation focuses on the development of a theoretical framework to conceptualize understanding of proof, considering disciplinary and individual aspects. The developed framework increases the comparability and interpretability of results from prior research in the context of understanding of proof and facilitates future systematic research in this field.

This dissertation incorporates three empirical studies that investigated learners' understanding of proof at different stages and thus in the course of mathematics education. Results highlight that key distinctions and structural elements within the theoretically based framework for understanding of proof can also be empirically validated, for example concept- and action-oriented understanding of proof. Based on observed empirical differences between learners from 8th grade to university, the conceptual framework seems to represent a suitable basis for assessing individuals' understanding of proof and is sensitive for its change in the course of mathematics

education. However, the empirical results of Studies 1 and 2 indicate that learners' understanding of proof can be described as weak to moderate both in grades 8 to 11 and at the beginning of university studies. Results also indicate that individuals' understanding of proof does hardly change in the course of mathematics education. Overall, the empirical results call into question the quality of current learning opportunities for building an adequate understanding of proof and indicate a need for future additional support. In this vein, the results of study 3 show that explicitly fostering single aspects of individuals' understanding of proof is possible: The teaching materials developed in the context of study 3, which offer explicit discussion and reflection prompts regarding mathematical proof, support the development of an adequate understanding of proof, especially with an action-oriented focus.

Overall, this dissertation provides a systematic overview of mathematical understanding of proof by way of theoretical conceptualisation and reveals that a systematic consideration of the understanding of proof based on the developed framework should be focused on in the future. Based on and in addition to the results of this dissertation, the longitudinal development and interrelation of central aspects of the understanding of proof should be investigated.

Inhaltsverzeichnis

Danksagung	I
Zusammenfassung	III
Abstract.....	V
Inhaltsverzeichnis	VII
1 Einleitung.....	1
2 Theoretischer Hintergrund.....	5
2.1 Beweise aus fachlicher Perspektive	5
2.1.1 Beweis als Objekt und Beweisen als Prozess	6
2.1.2 Beweise in der mathematischen Praxis.....	8
2.2 Beweise in der mathematischen Ausbildung.....	12
2.2.1 Beweise und Beweisaktivitäten	13
2.2.2 Beweise in Schule und Hochschule	14
2.2.3 Übergang Schule – Hochschule	16
2.3 Mathematikdidaktische Forschung zum Beweisen.....	17
2.3.1 Leistungen und Schwierigkeiten von Lernenden.....	17
2.3.2 Affektiv-motivationale Merkmale von Lernenden	20
2.3.3 Einfluss der Lernumgebung.....	23
2.3.4 Maßnahmen zur Förderung.....	26
2.4 Forschungsdesiderate und übergreifende Forschungsfragen.....	27
3 Theoretisches Rahmenmodell und die drei empirischen Studien.....	33
3.1 Ein theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis.....	35
3.2 Studie 1	43
3.3 Studie 2	46
3.4 Studie 3	50
4 Studie 1: Beweisverständnis – Theoretisches Rahmenmodell und empirische Evidenz	55
4.1 Introduction.....	56
4.2 Proof and Handling Proof.....	58
4.3 Mathematics Education Research on Proof and Handling Proof	59

4.3.1	Learners' Differences and Difficulties Regarding Their Understanding of Proof.....	60
4.3.2	Individuals' Understanding of Proof in the Course of Mathematical Education.....	62
4.4	Understanding of Proof – A Conceptual Framework.....	63
4.4.1	Disciplinary Perspective on Proof and Handling Proof.....	64
4.4.2	Individual-Psychological Perspective on Proof and Handling Proof.....	66
4.5	Research Questions	70
4.6	Method.....	72
4.6.1	Sample and Procedure	72
4.6.2	Instruments	74
4.6.3	Statistical Analyses.....	76
4.7	Results	78
4.7.1	Characterization of Beginning University Students' Understanding of Proof (RQ1.1)	78
4.7.2	Key Distinctions and Relations of the Conceptual Framework for Understanding of Proof (RQ1.2)	79
4.7.3	Students' Learning Opportunities Regarding Proof in School and Their Understanding of Proof (RQ2)	80
4.8	Discussion and Outlook.....	82
4.8.1	Discussion of Research Questions.....	83
4.8.2	Limitations and Future Research.....	85
4.8.3	Outlook	87
5	Studie 2: Beweisverständnis von Schülerinnen und Schülern im Verlauf der mathematischen Ausbildung	91
5.1	Introduction	92
5.2	Proof in Secondary Education.....	93
5.3	Students' Understanding of Proof	94
5.3.1	Conceptual Framework for Understanding of Proof.....	96
5.3.2	Knowledge About Proof.....	98
5.3.3	Need for Proof	99
5.4	Research Questions	100
5.5	Method.....	103
5.5.1	Sample and Procedure	103
5.5.2	Instruments	105
5.5.3	Statistical Analyses.....	106
5.6	Results	107

(RQ1) Knowledge About Proof Principles and Need for Proof in the Course of Secondary Education	107
(RQ2 & RQ3) Relations of Knowledge About Proof Principles, Need for Proof, and Self-Assessed Ability to Construct Proofs	108
5.7 Discussion	109
(RQ1) Knowledge About Proof Principles and Need for Proof in the Course of Secondary Education	110
(RQ2) Relations of Knowledge About Proof Principles and Need for Proof..	111
(RQ3) Self-Assessed Ability to Construct Proofs	113
5.8 Outlook	113
6 Studie 3: Förderung des Beweisverständnisses von Schülerinnen und Schülern	117
6.1 Intervention zur Förderung des Beweisverständnisses	117
[T1] Entwicklung der Leitfrage (90 min)	119
[T2] Erarbeitung I zur Beantwortung der Leitfrage (45 min)	123
[T3] Erarbeitung II zur Beantwortung der Leitfrage (45 min)	126
[T4] Beantwortung der Leitfrage (45 min)	128
6.2 Ergebnisse der Interventionsstudie	131
6.2.1 Introduction	131
6.2.2 Theoretical Background	132
6.2.3 Research Questions	134
6.2.4 Method	135
6.2.5 Results	137
6.2.6 Discussion & Outlook	138
7 Diskussion und Ausblick	141
7.1 Diskussion der Ergebnisse	141
7.2 Limitationen	150
7.3 Ausblick und Fazit	153
7.3.1 Implikation für die Forschung	153
7.3.2 Implikation für die Praxis	155
7.3.3 Fazit	156
Abbildungsverzeichnis	i
Tabellenverzeichnis	iv
Literaturverzeichnis	v
Eidesstattliche Erklärung	xix

1 Einleitung

Beweise sind für die Sicherung neuer Erkenntnisse und damit für die Generierung von Evidenz zentral im Fach Mathematik (Hanna & Jahnke, 1996). Mathematik wird daher in Abgrenzung zu anderen Disziplinen auch als beweisende Disziplin angesehen (Heintz, 2000). Entsprechend sind Beweise und damit assoziierte Aktivitäten wie die Konstruktion oder Validierung von Beweisen auch in der mathematischen Ausbildung relevant und in vielen Ländern curricular verankert (z. B. CCSSI, 2010; KMK, 2012; Mariotti, 2006). Den Herausforderungen bezüglich der Realisierung der Definition eines formalen mathematischen Beweises (z. B. Griffiths, 2000) kann in der mathematischen Praxis mithilfe praxisorientierter Definitionen eines mathematischen Beweises, die eher pragmatischen Charakterisierungen entsprechen (z. B. Stylianides, 2007), begegnet werden. Dadurch entsteht in der mathematischen Praxis allerdings ein Spielraum für die Akzeptanz einer mathematischen Argumentation als gültiger mathematischer Beweis, der sich nur schwer kriterienorientiert und allgemein festlegen lässt. Als Folge existieren in der mathematischen Praxis letztlich keine hinreichenden und allgemeingültigen Kriterien dafür, wann es sich bei einer Argumentation um einen gültigen mathematischen Beweis handelt (Aberdein, 2009). Die Frage nach der Akzeptanz eines mathematischen Beweises ist daher in Abhängigkeit vom jeweiligen mathematischen Diskursrahmen und der dort akzeptierten Argumentationsbasis zu beantworten (Manin, 2010; Stylianides, 2007; Stylianides et al., 2017). Dies wirkt sich auch darauf aus, wie Lernende mathematische Beweise verstehen. Begegnen Lernende mathematischen Beweisen im Rahmen ihrer mathematischen Ausbildung, so begegnen sie diesen unter dem Einfluss eines sozialen Diskursrahmens und entwickeln dabei ihre Fertigkeiten sowie ihr Wissen im Bereich mathematischer Beweise im Rahmen der dort gesetzten sozio-mathematischen Normen für mathematische Beweise (Dawkins & Weber, 2017; Hanna & De Villiers, 2012b; Yackel & Cobb, 1996).

In der bisherigen mathematikdidaktischen Forschung hat sich inhalts- sowie altersübergreifend wiederholt gezeigt, dass mathematische Beweise eine

Herausforderung für Lernende darstellen und sich zum Teil sowohl erhebliche Leistungsunterschiede als auch Schwierigkeiten im Bereich mathematischer Beweise zeigen (z. B. Healy & Hoyles, 1998; Heinze et al., 2005; Hoyles & Healy, 2007; Lin, 2000; Selden, 2012; Selden & Selden, 2008). Im Zusammenhang mit Untersuchungen von Fertigkeiten und Wissen der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise und der Suche nach möglichen Erklärungen für Leistungsunterschiede und Schwierigkeiten wird häufig von einem Beweisverständnis der Lernenden gesprochen (z. B. Hanna & Jahnke, 1996; Reiss et al., 2002; Stylianides, 2007). Dabei fällt auf, dass es bislang an einer Konzeptualisierung eines solchen individuellen Beweisverständnisses zu fehlen scheint, was die Vergleichbarkeit und Interpretierbarkeit der Ergebnisse bisheriger empirischer Forschung im Bereich mathematischer Beweise hinsichtlich eines Beweisverständnisses erschwert und darüber hinaus auch eine systematische Forschung diesbezüglich kaum möglich ist.

Dieser fehlenden Konzeptualisierung wird im Rahmen dieser Arbeit begegnet, indem ein **Rahmenmodell zur Konzeptualisierung eines Beweisverständnisses** theoretisch abgeleitet wird. Überlegungen zu einer solchen Konzeptualisierung machen schnell deutlich, dass der bereits erwähnte Spielraum für mathematische Beweise in der mathematischen Praxis und die damit einhergehenden sozio-mathematischen Normen im jeweiligen Diskursrahmen der mathematischen Ausbildung durch ihren Einfluss auf Fertigkeiten und Wissen von Lernenden im Bereich mathematischer Beweise bei der Beschreibung eines individuellen Beweisverständnisses Berücksichtigung finden müssen. Daher wird neben dem individuellen Beweisverständnis auch ein fachliches Beweisverständnis, das sich auf die sozio-mathematischen Normen in der Fachgemeinschaft bezieht, berücksichtigt.

Basierend auf dem entwickelten theoretischen Rahmenmodell zum Beweisverständnis erfolgt im **empirischen Teil** dieser Arbeit die Operationalisierung und Erfassung des individuellen Beweisverständnisses von Lernenden in der Sekundarstufe I und II sowie an der Hochschule. Die Ergebnisse der insgesamt drei Studien werden zunächst genutzt, um (i) theoretisch begründete Unterscheidungen im Rahmenmodell empirisch zu validieren und um zu überprüfen, ob das theoretische Rahmenmodell geeignet ist, ein individuelles Beweisverständnis empirisch zu untersuchen und dabei auch Unterschiede und Veränderungen sichtbar zu machen. Darüber hinaus werden die Ergebnisse genutzt, um (ii) das individuelle Beweisverständnis sowohl von Studierenden zu Beginn ihres Mathematikstudiums als auch von Schülerinnen und

Schülern im Verlauf der Klassenstufen 8 bis 11 zu beschreiben. Basierend auf dem theoretischen Rahmenmodell wird damit eine erste systematische Untersuchung des individuellen Beweisverständnisses präsentiert. Ein weiterer Teil der Betrachtung eines individuellen Beweisverständnisses im Rahmen dieser Arbeit fokussiert (iii) mögliche Erklärungsansätze für Unterschiede im Beweisverständnis von Lernenden und damit auf den Einfluss von Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen im Mathematikunterricht. Darüber hinaus wird untersucht, inwiefern eine gezielte Förderung eines individuellen Beweisverständnisses von Schülerinnen und Schülern der 9. Klassenstufe mithilfe einer Kurzintervention möglich ist und inwiefern ein individuelles Beweisverständnis mit dem Erfolg von Lernenden bei der Beweiskonstruktion zusammenhängt.

2 Theoretischer Hintergrund

Im Folgenden werden in den Abschnitten 2.1, 2.2 und 2.3 theoretische Grundlagen zusammengefasst, auf dessen Basis in Abschnitt 2.4 die Forschungsdesiderate und daraus die übergreifenden Forschungsfragen der Arbeit abgeleitet werden. Zunächst wird hierfür in Abschnitt 2.1 die Bedeutung mathematischer Beweise und damit verbundener Aktivitäten für das Fach Mathematik dargestellt. Darüber hinaus werden Herausforderungen diskutiert, die sich in der mathematischen Praxis zeigen. Hierfür wird auf die Bedeutung der Akzeptanz eines mathematischen Beweises in Abhängigkeit von einem Diskursrahmen und den Spielraum, der sich dadurch für eine praxisorientierte Definition eines mathematischen Beweises ergibt, eingegangen. In Abschnitt 2.2 werden Beweise und Beweisaktivitäten im Rahmen der mathematischen Ausbildung betrachtet. Dabei werden Beweise sowohl im schulischen als auch im universitären Kontext aufgegriffen und es werden Herausforderungen identifiziert, die sich für die Lernenden hinsichtlich des Enkulturationsprozesses in die wissenschaftliche Kultur der Mathematik ergeben. Leistungen und Schwierigkeiten von Lernenden im Bereich mathematischer Beweise werden in Abschnitt 2.3 zusammengetragen, indem unter anderem ausgewählte Erkenntnisse aus der mathematikdidaktischen Forschung zum Lehren und Lernen in diesem Kontext dargestellt werden.

2.1 Beweise aus fachlicher Perspektive

Beweise sind in der Mathematik zentral für die Generierung von Evidenz und damit für die Gewinnung und Sicherung neuer Erkenntnisse. Entsprechend sind Beweise als Objekte und somit auch das Beweisen als Prozess (vgl. Reid & Knipping, 2010) zentral in diesem Fach (s. Abschnitt 2.1.1). Obwohl es möglich ist, einen formalen mathematischen Beweis zu definieren (Griffiths, 2000), zeigt sich in der mathematischen Praxis, dass eine Formulierung von Beweisen gemäß der Definition kaum möglich bzw. nicht zweckmäßig ist (Thurston, 1995). Im Rahmen der Forschung

zu Beweispraktiken innerhalb der mathematischen Gemeinschaft wurde dieser Problematik mithilfe praxisnäherer Definitionen von mathematischen Beweisen begegnet, wobei es sich dabei um pragmatischere Charakterisierungen eines mathematischen Beweises handelt (z. B. Stylianides, 2007). Aus diesen Definitionen ergibt sich eine Abhängigkeit der Akzeptanz eines mathematischen Beweises vom Diskursrahmen, die den Umgang mit Beweisen in der mathematischen Praxis folglich beeinflussen kann (Dawkins & Weber, 2017; Heintz, 2000 - s. Abschnitt 2.1.2).

2.1.1 Beweis als Objekt und Beweisen als Prozess

Griffiths (2000, S. 2) definiert einen mathematischen Beweis als „a formal and logical line of reasoning that begins with a set of axioms and moves through logical steps to a conclusion“. Ein Axiomensystem bestimmt dabei eine Rahmentheorie, welche die Grundlage eines Beweises darstellt, sodass dadurch die Argumentationsbasis des Beweises festgelegt ist. Die im Beweis verwendeten Formeln und Sätze können vollständig auf die zugrunde gelegten Axiome zurückgeführt werden, wobei nur ein rein deduktives Schließen erlaubt ist (Dawkins & Weber, 2017; Hanna & Jahnke, 1993; Pedemonte, 2007).

Die Entstehung eines Beweises als Objekt wird durch das Beweisen als Prozess (vgl. Reid & Knipping, 2010) beschrieben, wobei damit die Konstruktion von Beweisen gemeint ist. Stein (1986, S. 268) beschreibt den Beweisprozess als die „Summe aller psychischen Vorgänge im Individuum und aller Handlungen des Individuums, die sich von der Formulierung des Satzes bis zur Fertigstellung des Beweises abspielen“. Im Vergleich mit dem fertigen Beweis als Objekt folgt der Prozess des Beweises im Allgemeinen weniger geradlinigen Denkprozessen und ist individuell unterschiedlich. Letztlich werden im fertigen Beweis (als Objekt) weder eine Vielzahl an alternativen Ansätzen und Modifikationen noch Irr- und Umwege abgebildet (Heintz, 2000; Reiss & Renkl, 2002). Zu den meist diskutierten Beschreibungen von Beweisprozessen gehört das Phasenmodell von Boero (1999), welches sich an dem Beweisprozess von Mathematikerinnen und Mathematikern und damit an einer stärker formalisierten Darstellung von Beweisen orientiert (Abb. 2.1).

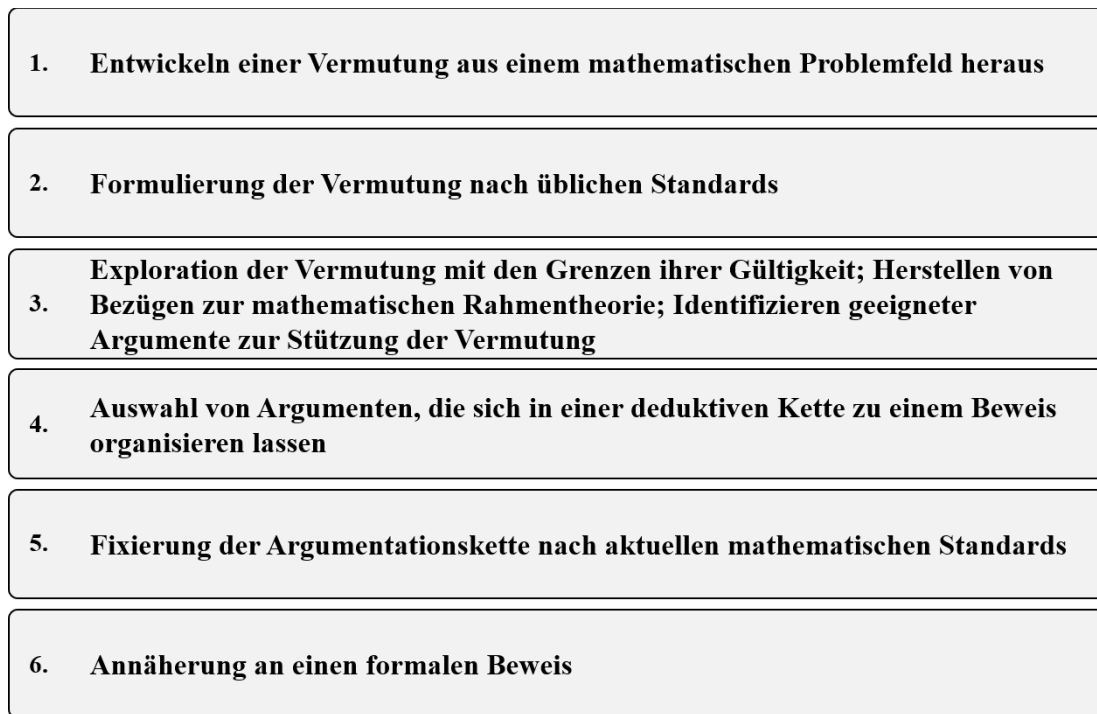


Abb. 2.1: Phasenmodell des Beweisens von Boero (1999) (nach Reiss und Ufer, 2009).

Neuere Ansätze zur Beschreibung von Phasen und Strukturen im Beweisprozess liefern beispielsweise Mejía-Ramos und Inglis (2009a), Hsieh et al. (2012) und Kirsten (2021). Kirsten (2021) fasst durch einen Vergleich verschiedener Beweisprozessmodelle vier Beweisschritte zusammen: Aufstellen einer Vermutung, Entwicklung einer formalen oder informalen Beweisidee, Ausarbeiten einer deduktiven Beweiskette und Formulieren eines Beweises entsprechend der jeweiligen Standards (siehe auch Boero et al., 2010; Stylianides, 2008).

In der Unterscheidung einer produkt- und prozessorientierten Perspektive wird deutlich, dass ein sorgfältig ausgearbeiteter Beweis keinen Einblick in den Beweisprozess ermöglicht, sondern auf eine Darstellung der mathematischen Zusammenhänge abzielt (Selden & Selden, 2013). Der Fachgemeinschaft werden durch Beweise letztlich Erkenntnisse auf eine sachliche und verständliche Art kommuniziert. Dabei ist jedoch nicht im Detail festgelegt, welche Merkmale einen mathematischen Beweis ausmachen und welche Argumentationsbasis in welchem Kontext zu nutzen ist (Fischer & Malle, 2004; Inglis et al., 2013; Jahnke & Ufer, 2015; Thurston, 1995).

2.1.2 Beweise in der mathematischen Praxis

Die oben zitierte Definition eines mathematischen Beweises von Griffiths (2000) liefert eine Definition, die vor allem formale Kriterien beschreibt und von vielen Mathematikerinnen und Mathematikern als Idealbild eines Beweises angesehen wird (Weber, 2003). In der mathematischen Praxis werden Beweise jedoch überwiegend in einer weniger streng formalen und damit praxisnäheren Form verwendet und letztlich auch als gültige Beweise akzeptiert (Bender & Jahnke, 1992; Heintz, 2000; Mariotti, 2006). Diese unterschiedlichen Repräsentationsformen werden mithilfe von **Beweispräsentationen** beschrieben. Unter anderem Aberdein (2009) betont, dass vor allem in der mathematischen Praxis kaum ein Beweis streng formal ist, sodass neben den formalen Beweisen werden daher auch semi-formale und präformale Beweise als Repräsentationsformen mathematischer Beweises betrachtet (z. B. Reid & Knipping, 2010). Durch diese Zugänge zum Beweisbegriff können beispielsweise auch inhaltliche Beweisschritte thematisiert werden, die nach der Definition eines formalen Beweises nicht zugelassen wären, aber für Beweise in der mathematischen Praxis relevant sein können (Hanna, 1989; Hersh, 1993; Kirsten, 2021). Auch wenn es in der mathematischen Praxis theoretisch möglich wäre, einen streng formalen Beweis im Sinne der Definition von Griffiths (2000) zu formulieren, wird in der Regel darauf verzichtet, da ein solcher Beweis viel zu umfangreich wäre. Vielmehr wird in der mathematischen Praxis ein mathematischer Beweis basierend auf einer akzeptierten Argumentationsbasis eines Diskursrahmens entwickelt, wobei das Ziel im Vordergrund steht, diesen Diskursrahmen von der Gültigkeit der mathematischen Aussage zu überzeugen (Heinze & Reiss, 2007). Der mathematische Beweis enthält letztlich genügend Details, um anzudeuten, wie ein vollständiger, streng formaler Beweis aussehen könnte (MacLane, 1981). In der Literatur werden insbesondere im Rahmen schulischer Beweiskonzepte operative bzw. inhaltlich-anschauliche Beweise genannt (Wittmann, 1985; Wittmann & Müller, 1988; Zaslavsky & Knuth, 2019). Diese finden vor allem auf enaktiver oder ikonischer Ebene statt, indem vom Beispiel ausgehend auf die allgemeingültige Regel geschlossen wird, die nicht primär formal dargestellt wird (Brunner, 2013). Demnach können in der mathematischen Praxis Unterschiede in der Beweispräsentation auftreten.

Entsprechend ist der Beweisbegriff in der mathematischen Praxis als relativer Begriff zu verstehen, der sich im Kontinuum zwischen formalen und präformalen Beweisen erstreckt und je nach Kontext verschiedene Realisierungen zulässt. Dabei ist nicht

umfassend festgelegt, welche Merkmale für eine Anerkennung als vollwertiger mathematischer Beweis hinreichend sind. Was in der mathematischen Praxis letztlich als gültiger Beweis anerkannt wird, hängt eng mit den im Diskursrahmen (ggf. implizit) vertretenen Normen zusammen (Dawkins & Weber, 2017). Einerseits gibt es zwar innerhalb der Mathematik einen Konsens über grundlegende Anforderungen an einen mathematischen Beweis, die sich in Form von Minimalkriterien als **Beweisprinzipien** zusammenfassen lassen und beispielsweise die Einhaltung einer Kette von Argumenten umfassen (Heinze & Reiss, 2003; Selden & Selden, 2003). Andererseits hat der Spielraum in den Anforderungen an einen mathematischen Beweis in der mathematischen Praxis zur Folge, dass der Diskursrahmen einen großen Einfluss bei der Antwort auf die Frage nach der Gültigkeit eines mathematischen Beweises hat (Inglis et al., 2013). Deutlich wird dies unter anderem in der Diskussion um adäquate Akzeptanzkriterien, die von bereichsspezifischen Abweichungen und kontextspezifischen Konkretisierungen geprägt ist (Inglis et al., 2013; Sommerhoff & Ufer, 2019; Weber, 2008). Diese Kriterien sind dabei nicht immer expliziert und können sich in den verschiedenen Bereichen der Fachmathematik unterschiedlich herausbilden (CadwalladerOlsker, 2011). Manin (2010, S. 48) beschreibt diese Situation als „A proof only becomes a proof after the social act of accepting it as a proof“.

Bei der Akzeptanz einer mathematischen Argumentation als gültiger mathematischer Beweis kann auch die **Beweisfunktion** eine Rolle spielen (Sommerhoff & Ufer, 2019). Neben der Generierung von Evidenz erfüllen Beweise im Fach Mathematik auch andere Zwecke. De Villiers (1990) beschreibt neben der Verifikationsfunktion, also der Feststellung der Gültigkeit einer Aussage, auch die Erklärungs-, Systematisierungs-, Entdeckungs-, Kommunikations- sowie Explorationsfunktion. Je nachdem, welches Ziel mit einem mathematischen Beweis verfolgt wird, können sich Unterschiede hinsichtlich (u.a. formaler) Anforderungen an diesen Beweis zeigen. Wird beispielsweise eine Argumentation zur Erklärung eines mathematischen Inhalts formuliert, so kann die Argumentation in dieser Form in einem Diskursrahmen möglicherweise als gültiger mathematischer Beweis akzeptiert werden, während sie gleichzeitig in einem anderen Diskursrahmen als ungeeignet zur Verifikation und damit nicht als valider mathematischer Beweis bewertet wird (vgl. bspw. Hanna, 1997; Hanna & Jahnke, 1993). So könnte beispielsweise eine Argumentation anhand eines generischen Beispiels, welche plausibel macht, dass eine mathematische Aussage gilt,

in manchen Kontexten bereits als sogenannter generischer Beweis akzeptiert werden, während in anderen Diskursrahmen eine noch spezifischere Argumentation notwendig wäre, warum das generische Beispiel auch auf alle anderen möglichen Fälle übertragbar ist. Hanna (1989) unterscheidet in diesem Zusammenhang zwischen „proofs that prove“ und „proofs that explain“.

In der mathematischen Praxis spielen darüber hinaus verschiedene **Beweismethoden** eine Rolle. Darunter werden Methoden zusammengefasst, die per se die Konstruktion eines akzeptablen mathematischen Beweises ermöglichen. Dazu gehören der direkte Beweis, der indirekte Beweis (zum Beispiel durch Kontraposition), die vollständige Induktion und je nach Kontext auch weitere Beweismethoden (z. B. Vito, 2020). Beweismethoden sind daher weniger von der sozialen Akzeptanz beeinflusst. Die klassischen Beweismethoden wurden allerdings in den letzten 50 Jahren durch die Computertechnologie erweitert und es besteht eine Debatte über die Akzeptanz von computer-assisted-proofs in der mathematischen Praxis (Dana-Picard, 2023).

Werden also Beweise in der mathematischen Praxis betrachtet, so ist die Frage nach der Gültigkeit letztlich stets eine Frage der Akzeptanz als gültiger mathematischer Beweis innerhalb des Diskursrahmens. Dabei werden die Einhaltung grundlegender Anforderungen (**Beweisprinzipien**), der fokussierte Zweck (**Beweisfunktion**) sowie die Anwendung einer geeigneten Methode (**Beweismethode**) in einer gewählten Repräsentationsform (**Beweispräsentation**) bewertet und auf dieser Basis letztlich über die Akzeptanz als mathematischen Beweis entschieden (Hersh, 1993; Sommerhoff & Ufer, 2019; Yackel & Cobb, 1996). Dass beispielsweise die fokussierte Beweisfunktion die Beweispräsentation beeinflusst oder Beweismethoden mit bestimmten Beweisprinzipien einhergehen und damit gewisse Abhängigkeiten bestehen, ist in diesem Kontext durchaus vorstellbar (Weber & Alcock, 2004). Aus fachlicher Perspektive und mit Fokus auf die mathematische Praxis sprechen Dawkins und Weber (2017) im Zusammenhang mit mathematischen Beweisen und deren Akzeptanz auch von „values of proof“, die durch bestimmte „norms of proof“ aufrechterhalten werden. Dabei repräsentieren die Werte mathematischer Beweise „a community’s shared orientations and goals that underlie shared activity“ (ebd., S. 125) und nehmen somit Einfluss auf die Akzeptanz mathematischer Beweise. Für das Phasenmodell nach Boero (1999) in Abb. 2.1 wird in der Literatur daher eine siebte Phase „Akzeptanz durch die mathematische Community“, die den Beweisprozess abschließt, vorgeschlagen (Heinze & Reiss, 2004; Reiss & Ufer, 2009).

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass es aufgrund des in der mathematischen Praxis bestehenden Spielraums für die Akzeptanz einer mathematischen Argumentation als gültiger mathematischer Beweis schwierig ist allgemeingültige Kriterien zu definieren, die unabhängig vom Kontext bestimmen, was unter einem gültigen mathematischen Beweis zu verstehen ist (Heintz, 2000). Dennoch liefern die genannten Aspekte Anhaltspunkte, hinsichtlich derer ein Beweisvorschlag in der Praxis zu betrachten ist. In einem Versuch, unterschiedliche Auffassungen über die Gültigkeit mathematischer Beweise umfassend zu vereinen, beschreibt Stylianides (2007) drei Aspekte zur Definition eines mathematischen Beweises unter Berücksichtigung der mathematischen Praxis (Abb. 2.2). Die drei Aspekte sind inhaltsleer und liefern nur eine Systematik und keine eindeutigen Kriterien für die Gültigkeit eines mathematischen Beweises. Sie sind konstitutiv, können aber unterschiedlich ausgeprägt sein, sodass sich ein Spielraum hinsichtlich der Auslegung der drei Aspekte ergibt.

1. Set of accepted statements

2. Modes of argumentation

3. Modes of argument representation

Abb. 2.2: Drei Aspekte zur praxisorientierten Definition eines mathematischen Beweises (Stylianides, 2007).

Neben der Betrachtung des Beweises als Objekt in der mathematischen Praxis, soll im Folgenden das Beweisen als Prozess fokussiert werden. Diesbezüglich zeigen sich in der mathematischen Praxis neben der im Fach zentralen Aktivität der Beweiskonstruktion weitere mit Beweisen assoziierte Aktivitäten, wie das Lesen oder Präsentieren von Beweisen (Giaquinto, 2005). Mejía-Ramos und Inglis (2009a) entwickeln ausgehend von Giaquintos Unterscheidung eine Rahmentheorie, in der bei der Aktivität des Lesens zwischen dem Verstehen und dem Evaluieren unterschieden wird. In einigen Konzeptualisierungen wird aufgrund unterschiedlicher Bewertungsschwerpunkte beim Evaluieren zwischen den Beweisaktivitäten Validieren und Evaluieren unterschieden (Pfeiffer, 2011; Selden & Selden, 2017). Bei der Validierung eines Beweises wird dessen Gültigkeit hinterfragt, während bei der

Evaluation eines Beweises beispielsweise seine Qualität und der Nutzen für den Diskursrahmen beurteilt wird (Pfeiffer, 2011). Beim Verstehen von Beweisen steht dagegen ein sinnentnehmendes und erkenntnisgeleitetes Lesen im Vordergrund (Mejía-Ramos & Inglis, 2009a; Neuhaus-Eckhardt, 2022). Die verschiedenen Aktivitäten werden weder definitorisch in der Theorie noch im Rahmen empirischer Forschung präzise und konsequent voneinander abgegrenzt. Beispielsweise werden Validierung und Konstruktion von Beweisen zwar als eigenständige Aktivitäten betrachtet, können sich aber in Form von Teilprozessen wechselseitig unterstützen, da beide Aktivitäten verknüpft sind: (i) bei der Beweiskonstruktion wird beispielsweise mental die Rolle eines externen Kritikers eingenommen, um die eigenen Akzeptanzkriterien zu hinterfragen (Pfeiffer, 2011; Selden & Selden, 2003) oder (ii) beim Lesen eines Beweises zum Validieren wird ein Teilbeweis (mental) konstruiert, um diesen zu prüfen (Weber, 2015).

2.2 Beweise in der mathematischen Ausbildung

Da Beweise in der Mathematik als beweisende Disziplin eine zentrale Rolle spielen, sind sie auch für die mathematische Ausbildung relevant (Hanna & De Villiers, 2012b; Hanna & Jahnke, 1996). Entsprechend stellen sie ein wichtiges Lernziel dar (Reiss & Ufer, 2009), was sich auch in der curricularen Verankerung widerspiegelt (z. B. CCSSI, 2010; KMK, 2012). Im Folgenden werden Beweise und Beweisaktivitäten daher im Kontext der mathematischen Ausbildung betrachtet. Hierfür werden verschiedene didaktische Beweiskonzepte sowie für die mathematische Ausbildung relevante Beweisaktivitäten beschrieben (s. Abschnitt 2.2.1). Da Lernende im Sinne des Spiralprinzips im Rahmen der mathematischen Ausbildung wiederholt mit argumentativen Herausforderungen, mathematischen Beweisen und damit verbundenen Aktivitäten konfrontiert werden (Stylianides, 2007), werden diese sowohl in einen schulischen als auch in einen universitären Kontext eingeordnet (s. Abschnitt 2.2.2). Dabei werden unter anderem verschiedene Lerngelegenheiten bezüglich mathematischer Beweise sowie die Bedeutung verschiedener mathematischer Themengebiete betrachtet. Da der Übergang von der Schule in die Hochschule einen besonderen Wechsel des Diskursrahmens im Verlauf der mathematischen Ausbildung und einen entscheidenden Schritt des Enkulturationsprozesses in die wissenschaftliche Kultur der Mathematik darstellt, wird dieser explizit thematisiert (s. Abschnitt 2.2.3).

2.2.1 Beweise und Beweisaktivitäten

Wie im vorherigen Abschnitt 2.1 dargestellt, hängt die Akzeptanz einer Argumentation als ein gültiger mathematischer Beweis in der mathematischen Praxis vom Diskursrahmen ab. Diese Zusammenhänge spielen auch in der mathematischen Praxis im Ausbildungskontext eine Rolle (Sommerhoff & Ufer, 2019; Ufer et al., 2009). Lernende setzen sich im Rahmen ihrer mathematischen Ausbildung innerhalb und unter Einfluss eines sozialen Diskursrahmens mit dem Konzept mathematischer Beweise (Beweis als Objekt und Beweisen als Prozess) auseinander (z. B. CCSSI, 2010). In einem Lernkontext muss somit (bspw. durch die Lehrperson vorgegeben) für die drei in der **praxisorientierten Definition** genannten Aspekte (Abb. 2.2) eine Orientierung bzw. Vorgabe für die Gültigkeit mathematischer Beweise gemacht werden. Im Diskurs zwischen Lehrenden und Lernenden ergeben sich damit **sozio-mathematischen Normen**, an denen sich die Lernenden orientieren und ihr Verständnis von mathematischen Beweisen sowie ihre Fertigkeiten im Umgang mit diesen entwickeln (Stylianou et al., 2009; Stylianou et al., 2015; Ufer et al., 2009; Yackel & Cobb, 1996). Dass sich bei verschiedenen sozialen Diskursrahmen Unterschiede hinsichtlich solcher sozio-mathematischen Normen identifizieren lassen, haben beispielsweise Sommerhoff und Ufer (2019) in ihrer Untersuchung zu Akzeptanzkriterien gezeigt.

Durch den Ansatz der praxisorientierten Definition mathematischer Beweise können Lehrende und Lernende dem Konzept mathematischer Beweise mit mehr Spielraum begegnen und didaktisch aufbereitete, aber trotzdem fachlich **anschlussfähige Beweiskonzepte** zum Lernen nutzen (Tall & Mejia-Ramos, 2010). Das Konzept des operativen bzw. inhaltlich-anschaulichen Beweises und das Konzept des generischen Beweises sind Beispiele für die in der Literatur genannten didaktischen Beweiskonzepte, die sich für einen Zugang zum Konzept mathematischer Beweise im Rahmen der mathematischen Ausbildung eignen. Einen guten Überblick über die verschiedenen Ansätze geben Biehler und Kempen (2016), Reid und Knipping (2010) und auch Stein (1985). Es können verschiedene Beweisfunktionen genutzt werden, um die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit und damit das Bild von mathematischen Beweisen als Objekt und deren Rolle für das Fach zu stärken (Jahnke & Ufer, 2015; Kuntze, 2005).

Aus fachlicher Perspektive wurde das Beweisen als Prozess und damit verschiedene **Beweisaktivitäten** als zentral beschrieben (vgl. Abschnitt 2.1). So ist es Teil der mathematischen Ausbildung, dass Lernende mit mathematischen Beweisen umgehen können, wobei diesem Umgang Aktivitäten wie das Konstruieren, Verstehen, Validieren oder Evaluieren von Beweisen zugeordnet werden können (z. B. KMK, 2012). Lernende werden daher mit dem Konzept mathematischer Beweise in Form verschiedener mit Beweisen assoziierten Aktivitäten konfrontiert und müssen entsprechende Herausforderungen bewältigen (Pfeiffer, 2011).

2.2.2 Beweise in Schule und Hochschule

Mithilfe fachlich anschlussfähiger Beweiskonzepte können Beweise und Beweisaktivitäten bereits in der Schule thematisiert werden (z. B. Biehler & Kempen, 2016; Reid & Knipping, 2010). So ist es bereits in der Primarstufe mithilfe von Mustern und Strukturen möglich, einen operativen bzw. inhaltlich-anschaulichen Beweis (auf enaktiver Ebene) in den Unterricht einzubinden (Kaput et al., 2017; Steinweg, 2013). Dass Beweise sowohl in verschiedenen Phasen der mathematischen Ausbildung als auch für verschiedene mathematische Inhalte thematisiert werden können, zeigt beispielsweise der von der NCTM (2000, S. 342) für alle Klassen gesetzte Standard „Reasoning and proof“:

„Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to:

- Recognize reasoning and proof as fundamental aspects of mathematics
- Make and investigate mathematical conjectures
- Develop and evaluate mathematical arguments and proofs
- Select and use various types of reasoning and methods of proof.”

In Deutschland zeigt sich durch die Verankerung mathematischer Beweise im Rahmen der prozessbezogenen Kompetenz „Mathematisch argumentieren“ (KMK, 2012, S. 14; 2022, S. 9), dass dieses Thema im Laufe der schulmathematischen Ausbildung im Rahmen verschiedener Themengebiete zu adressieren ist. Explizit sind Beweise beispielsweise für den *Satz des Thales* und den *Satz des Pythagoras* vorgesehen (KMK, 2022). Es zeigt sich, dass Beweise in der Schule häufig im Bereich der Geometrie (Balacheff, 2010) und vor allem ab der Klassenstufe 7 oder 8 adressiert werden (Tebaartz & Lengnink, 2015).

Dabei geht es nicht nur darum, dass Lernende mathematische Inhalte im Sinne eines „arguing to learn“ (Andriessen, 2006) erarbeiten oder vertiefen (teilweise überlappend mit der Entdeckungsfunktion von Beweisen) oder darlegen, dass und warum eine mathematische Aussage gültig ist (Validierungs- und Erklärungsfunktion von Beweisen). Durch mathematische Beweise und damit verbundenen Aktivitäten lernen sie – im Sinne eines „learning to argue“ (Osborne, 2009) und darüber hinaus – auch die Rolle von Beweisen für die Mathematik als Wissenschaft kennen und erfahren die Mathematik als deduktives System (De Villiers, 1990; Jahnke & Ufer, 2015; Kuntze, 2005; Winter, 1983, 1995). Lernende sollen schrittweise die mit den Denk- und Arbeitsweisen von Mathematikerinnen und Mathematikern verbundenen Normen und Werte für Beweise erlernen (Dawkins & Weber, 2017; Kirsten, 2021). Die im Lernkontext mit der Lehrperson ausgehandelten sozio-mathematischen Normen, die für die Akzeptanz einer mathematischen Argumentation als gültiger mathematischer Beweis und damit für den Enkulturationsprozess in die Argumentationskultur relevant sind, sollten sich daher an den „values and norms of proof“ orientieren (Jahnke & Ufer, 2015).

Sowohl in der Schule als auch in der Hochschule sind **Lerngelegenheiten** bezüglich mathematischer Beweise häufig mit Beweisaktivitäten wie dem Konstruieren, Verstehen oder Validieren von Beweisen verbunden. Dabei werden Beweise und Beweisaktivitäten im Kontext verschiedener mathematischer Inhalte eingebunden (KMK, 2012). Im Rahmen einer Lerngelegenheit zum Beweisen ergibt sich dadurch letztlich nicht nur die Möglichkeit, i) den mathematischen Inhalt kennenzulernen oder zu erschließen, sondern auch ii) Beweise konstruieren oder verstehen zu lernen. Darüber hinaus können Lernende in diesem Rahmen iii) Beweismethoden kennenlernen oder iv) die Rolle von Beweisen (Beweisfunktionen) in der Mathematik besprechen, v) grundlegende Regeln für mathematische Beweise (Beweisprinzipien) lernen und vi) verschiedene Formen von Beweisen (Beweispräsentation) diskutieren. Die Herausforderung besteht somit darin, dass Lernende im Rahmen der Lerngelegenheiten bezüglich mathematischer Beweise sowohl den mathematischen Inhalt erfassen, die Fertigkeiten hinsichtlich der Beweisaktivität ausbilden und fachliche Aspekte zum Konzept des mathematischen Beweises kennenlernen (Heinze & Reiss, 2004).

In der **Hochschule** rücken Beweise und Beweisaktivitäten stärker in den Fokus (Kempen, 2019; Tall, 2008). Studierende sind insbesondere im Mathematikstudium

sowohl mit der Konstruktion von Beweisen in Übungsaufgaben und Klausuren als auch mit dem Verstehen und Validieren von Beweisen in den Vorlesungen konfrontiert (Neuhaus-Eckhardt, 2022; Sommerhoff et al., 2016). Wie auch in der Schule lernen die Studierenden das mathematische Beweisen immer unter Einfluss des jeweiligen Diskursrahmens. Da die Normen für Beweise oft nicht expliziert oder gar schriftlich festgehalten werden, mangelt es häufig an Transparenz, sodass die Normen im Sinne der Lerntheorie „Lernen am Modell“ (Bandura, 1976) durch Nachahmung erlernt werden müssen (Dawkins & Weber, 2017; Neuhaus-Eckhardt, 2022; Yackel & Cobb, 1996). Dies kann zu Schwierigkeiten der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise führen (s. Abschnitt 2.3).

2.2.3 Übergang Schule – Hochschule

Beim Übergang von der Schulmathematik in die Hochschulmathematik zeigt sich eine besondere Veränderung des sozialen Diskursrahmens (Tall, 2008). Dieser Übergang stellt einen zentralen und herausfordernden Schritt im Enkulturationsprozess in die wissenschaftliche Kultur der Mathematik dar. Das Schulfach Mathematik entwickelt sich zu einer wissenschaftlichen Disziplin und mathematische Beweise werden zentral (Dreyfus, 1999; Hanna & Barbeau, 2010; Hemmi, 2008; Yackel et al., 2000).

Auch wenn Beweise mithilfe anschlussfähiger Beweiskonzepte bereits in der Schule behandelt wurden, haben Studienanfängerinnen und Studienanfänger häufig Schwierigkeiten, einen Zugang zu den formal-deduktiven Beweisen zu finden (De Guzmán et al., 1998; Moore, 1994; Selden & Selden, 2008). Grundsätzlich zeigen Lernende, die sich für ein Mathematikstudium entscheiden, im Vergleich höhere Leistungen im Fach Mathematik (Oepke & Eberle, 2016) und es kann angenommen werden, dass sie sich darüber hinaus bereits mit dem Fach als beweisende Disziplin beschäftigt haben (z. B. Kosiol et al., 2019). Dennoch zeigt sich die Schwierigkeit des mathematischen Beweisens beim Übergang von der Schule in die Hochschule wiederholt als ein möglicher Grund für einen Studienabbruch oder Studienfachwechsel (Fischer et al., 2009; Gueudet, 2008; Heublein et al., 2010). Dass Beweise in der Schule weniger im Fokus stehen und das Fach eher einen anwendungsorientierten Charakter hat, könnte außerdem das Bild vom Fach Mathematik beeinflussen (Vollstedt et al., 2014). So wird als eine weitere Erklärung für die hohen Studienabbruchzahlen diskutiert, dass Lernende möglicherweise aufgrund ihrer schulischen Vorerfahrungen unzureichende Vorstellungen von einem

Mathematikstudium haben (Di Martino & Gregorio, 2019; Geisler et al., 2023; Geisler & Rolka, 2021; Hirst et al., 2004; Rach & Heinze, 2017).

2.3 Mathematikdidaktische Forschung zum Beweisen

Zahlreiche empirische Studien haben gezeigt, dass sowohl das Lernen als auch das Lehren im Bereich mathematischer Beweise große Herausforderungen darstellen können, die sich (sowohl inhalts- als auch altersübergreifend) in Leistungsunterschieden zwischen den Lernenden sowie in konkreten Schwierigkeiten der Lernenden hinsichtlich ihrer Fertigkeiten und ihres Wissens im Bereich mathematischer Beweise manifestieren (s. Abschnitt 2.3.1). Mit Blick auf die Bildungsziele bzw. der Rolle von Beweisen in der mathematischen Ausbildung (s. Abschnitt 2.2) ist es für die Forschung von Interesse, Erklärungsansätze für die Schwierigkeiten der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise zu finden und Maßnahmen zur Förderung zu entwickeln. Daher wurden neben Fertigkeiten und Wissen im Bereich mathematischer Beweise auch affektiv-motivationale Merkmale der Lernenden betrachtet und mögliche Zusammenhänge zwischen diesen und den Leistungen und Schwierigkeiten der Lernenden diskutiert (s. Abschnitt 2.3.2). Da verschiedene Lernangebote sowie die Lehrpersonen einen Einfluss auf die Ausbildung kognitiver und affektiv-motivationaler Merkmale der Lernenden haben, wird darüber hinaus die Lernumgebung für den Bereich mathematischer Beweise und im Verlauf der mathematischen Ausbildung betrachtet (s. Abschnitt 2.3.3). Um den Schwierigkeiten der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise zu begegnen, wurden bereits erste Ideen zur Förderung abgeleitet (s. Abschnitt 2.3.4).

2.3.1 Leistungen und Schwierigkeiten von Lernenden

Verschiedene empirische Studien haben gezeigt, dass mathematische Beweise eine Herausforderung für Lernende unterschiedlichen Alters darstellen, was sich in unterschiedlichen Leistungen in diesem Bereich zeigt (z. B. Healy & Hoyles, 1998; Heinze et al., 2005; Hoyles & Healy, 2007; Lin, 2000; Selden, 2012; Selden & Selden, 2008; Stylianides et al., 2016). Schwierigkeiten zeigen sich dabei in verschiedenen Phasen der mathematischen Ausbildung (sowohl in der Schule als auch in der Hochschule) sowie im Rahmen verschiedener mathematischer Themengebiete (z. B. Geometrie (Heinze, 2004), Algebra (Healy & Hoyles, 2000) oder Kombinatorik (Lockwood et al., 2020)). In der bisherigen Forschung finden sich sowohl

Untersuchungen der Lernenden hinsichtlich ihrer **Fertigkeiten** im Rahmen unterschiedlicher Beweisaktivitäten wie beispielsweise die Konstruktion von Beweisen (Healy & Hoyles, 2000) oder die Validierung von Beweisen (Sommerhoff et al., 2016), als auch hinsichtlich ihres **Wissen** über verschiedene Aspekte wie Beweisprinzipien (Heinze & Reiss, 2003) oder Beweisfunktionen (Andersen, 2018; Kuntze, 2005). Aufgrund der zuvor diskutierten Bedeutung sozio-mathematischer Normen für die Akzeptanz einer mathematischen Argumentation als gültiger mathematischer Beweis (vgl. Abschnitt 2.1.2) ist bei der Bewertung von Fertigkeiten und Wissen stets zu berücksichtigen, in welchem sozialen Diskursrahmen sich die Lernenden befinden. Im Folgenden werden ausgewählte Ergebnisse präsentiert.

Verschiedene Studien zeigen, dass es vielen Gymnasiastinnen und Gymnasiasten in den Klassenstufen 7 bis 13 schwerfällt, mathematische Beweise elementargeometrischer Aussagen zu konstruieren (Healy & Hoyles, 1998; Heinze, 2004; Reiss et al., 2006). Dabei zeigen sich altersübergreifend typische Fehler wie beispielsweise die Verwendung von Prämissen, die aus der Anschauung entnommen wurden, empirisch-induktive Argumentationen oder Zirkelschlüsse (Reiss et al., 2006). Bereits Senk (1985) und Usiskin (1987) konnten für die USA zeigen, dass weniger als ein Drittel der befragten Schülerinnen und Schüler der High-School in der Lage waren einen mathematischen Beweis im Bereich der Geometrie zu konstruieren. Auch bei Studierenden zeigen empirische Studien wiederholt, dass sie Schwierigkeiten bei der Beweiskonstruktion haben (Hemmi, 2006; Moore, 1994; Weber, 2001). Aber nicht nur bei der Konstruktion von Beweisen zeigten sich Leistungsunterschiede zwischen den Lernenden. Hinsichtlich des Validierens mathematischer Beweise zeigen Healy und Hoyles (2000), dass selbst Schülerinnen und Schüler auf hohem Leistungsniveau Schwierigkeiten haben. In einer Untersuchung von Studierenden zeigen Selden und Selden (2003), dass lediglich 46 % der Bewertungen algebraischer Beweise durch die Probandinnen und Probanden eine korrekte Einschätzung darstellen. Vergleichbar moderate Leistungen sowohl inhalts- als auch altersübergreifend zeigen beispielsweise die Studien von Inglis und Alcock (2012), Ko und Knuth (2013) sowie Sommerhoff und Ufer (2019).

Als mögliche Erklärung für diese Schwierigkeiten der Lernenden bei verschiedenen Beweisaktivitäten wird häufig unter anderem ein unzureichendes Wissen über Beweise genannt (Azrou, 2017; Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 2000; Heinze, 2004; Reiss et al., 2001; Selden & Selden, 2008). Heinze und Reiss (2003)

beschreiben und untersuchen ein beweisspezifisches Methodenwissen, wobei sie damit ein Wissen über den Aufbau eines mathematischen Beweises mithilfe der drei Aspekte Beweisschema, Beweisstruktur und Beweiskette skizzieren. Sie charakterisieren damit gewisse Minimalkriterien, die (auch über verschiedene Fachgebiete hinweg) als notwendige Voraussetzung dafür angesehen werden, dass es sich um einen gültigen mathematischen Beweis handeln kann. Diese Kriterien werden im Rahmen dieser Arbeit als Beweisprinzipien bezeichnet (vgl. Abschnitt 2.1.2) (siehe auch Heintz, 2000; Kirsten, 2021; Manin, 2010; Selden & Selden, 2003). In ihren Untersuchungen haben Heinze und Reiss (2003) gezeigt, dass Lernende der 8. Klasse ein unzureichendes Wissen über Beweisprinzipien haben, was unter anderem in der Akzeptanz empirischer Argumentationen der Lernenden sichtbar wird. Diese Ergebnisse stützen die Ergebnisse einer Studie mit 81 Schülerinnen und Schülern am Ende der Sekundarstufe (Reiss et al., 2001) sowie die Ergebnisse der Studie von Harel und Sowder (1998). Neben einem solchen Wissen über Beweisprinzipien kann beispielsweise auch Wissen über Beweisfunktionen betrachtet werden. Das von Kuntze (2005) auf Grundlage verschiedener Ansätze (Bell, 1976; De Villiers, 1990; Hanna, 2000; Healy & Hoyles, 1998) entwickelte Kategoriensystem für Funktionen von Beweisen macht deutlich, wie unterschiedlich ein solches Wissen bei Lernenden altersübergreifend sein kann. Ergebnisse von Studien in Japan zeigen, dass mehr als 60 % der befragten Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Sekundarstufe nicht verstehen, wozu mathematische Beweise benötigt werden (Fujita & Jones, 2003; Kunimune et al., 2008). Auch Healy und Hoyles (2000) können in ihrer Studie mit 14 und 15 Jahre alten leistungsstarken Schülerinnen und Schülern zeigen, dass mehr als 25 % von ihnen nicht beschreiben können, wofür mathematische Beweise notwendig sind. In der Stichprobe von Healy und Hoyles (1998) zeigte sich beispielsweise, dass die Schülerinnen und Schüler zwar teilweise ein adäquates Wissen über Beweisprinzipien haben, diese Kriterien aber in Abhängigkeit von der Beweisfunktion unterschiedlich berücksichtigen.

Hinsichtlich des Wissens über mathematische Beweise werden vor allem im Kontext der Beweisvalidierung Unterschiede in den Akzeptanzkriterien der Lernenden diskutiert. So zeigt sich das Wissen über Beweise von Individuen bzgl. der genannten Beweisprinzipien und den Beweisfunktionen auch darin, in welchen Fällen die Lernenden einen Beweis als valide bewerten, d. h. als gültigen mathematischen Beweis akzeptieren: Wird eine empirisch-induktive Argumentation als gültiger

mathematischer Beweis bewertet und akzeptiert, ist das Wissen über Beweisprinzipien vermutlich unzureichend. Als eine Ursache für die Schwierigkeiten der Lernenden beim Validieren von Beweisen werden daher die Orientierung an inadäquaten Akzeptanzkriterien oder Schwierigkeiten, einen Beweis anhand solcher Kriterien zu überprüfen, diskutiert (Heinze, 2010; Sommerhoff & Ufer, 2019).

Dass das Wissen über Beweisprinzipien sogar als Prädiktor für den Erfolg im Umgang mit mathematischen Beweisen angesehen werden kann, zeigen unter anderem die Studien von Ufer et al. (2008), Chinnappan et al. (2012) und Reiss et al. (2001). Reiss et al. (2001) betonen, dass ein adäquates Wissen über Beweisprinzipien nicht nur eine Voraussetzung für die Beweisvalidierung ist, sondern auch die Beweiskonstruktion beeinflusst, indem dadurch Kriterien für die Überprüfung selbst konstruierter Beweise vorliegen (Heinze & Reiss, 2009; Selden & Selden, 2003). Neben mathematischem Basiswissen oder Problemlösestrategien, die unter anderem als prädiktiv für den Erfolg im Umgang mit Beweisen diskutiert werden (Reiss & Ufer, 2009; Ufer et al., 2008), wird unzureichendes Wissen über Beweismethoden als eine Erklärung für die Schwierigkeiten der Lernenden im Umgang mit mathematischen Beweisen diskutiert, da fehlendes Wissen bezüglich geeigneter Methoden die Festlegung der Gesamtstruktur eines Beweises erschweren können (Bittinger, 1968; Selden & Selden, 1995).

Letztlich ist das dargestellte unzureichende Wissen im Bereich mathematischer Beweise aber nicht nur eine mögliche Erklärung für die Schwierigkeiten, die Lernende im Rahmen der Beweisaktivitäten haben, sondern ist darüber hinaus auch für sich genommen als problematisch einzustufen. Da Lernende die Mathematik als deduktives System verstehen sollen und damit erfahren sollen, wie Mathematik als beweisende Disziplin funktioniert und neue Erkenntnisse gewonnen werden (Winter, 1995), sollten sie auch unabhängig von dessen Einfluss auf den Erfolg im Rahmen der Beweisaktivitäten ein adäquates Wissen über Beweise haben. Einzelne Autorinnen und Autoren weisen daher unter anderem auf die deklarative Form des Wissens über Beweisprinzipien hin (A. J. Stylianides & G. J. Stylianides, 2009; Vinner, 1997).

2.3.2 Affektiv-motivationale Merkmale von Lernenden

In der bisherigen Forschung wurden neben den Leistungen und Schwierigkeiten der Lernenden durch die Untersuchung von Fertigkeiten und Wissen im Bereich mathematischer Beweise auch affektiv-motivationale Merkmale, wie **Einstellungen**

gegenüber Beweisen, subjektive Überzeugung von Beweisen, subjektive Überzeugung durch Beweise, ein subjektives Beweisbedürfnis oder eine Lernmotivation bezüglich Beweisen betrachtet. Diese sind insbesondere vor dem Hintergrund möglicher Erklärungsansätze für Schwierigkeiten der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise (vgl. Abschnitt 2.3.1) von Forschungsinteresse (Schukajlow et al., 2017; Sommerhoff, 2017). Durch die Untersuchung und Beschreibung solcher affektiver Merkmale von Lernenden in verschiedenen Phasen der mathematischen Ausbildung (in Ergänzung zu kognitiven Merkmalen) können noch differenziertere Eindrücke von den Lernenden und ihren Herausforderungen im Bereich mathematischer Beweise während ihrer mathematischen Ausbildung gewonnen werden (Raman, 2001). Auch wenn es bisher nur wenige Studien gibt, die einen Zusammenhang zwischen affektiv-motivationalen Merkmalen und den Leistungen von Lernenden im Bereich mathematischer Beweise empirisch untersuchen (Sommerhoff, 2017), sollen im Folgenden einzelne Merkmale sowie in der bisherigen Forschung als möglich diskutierte Zusammenhänge mit den Leistungen und Schwierigkeiten von Lernenden im Bereich mathematischer Beweise dargestellt werden.

Ein Aspekt, der im Zusammenhang mit affektiv-motivationalen Merkmalen der Lernenden genannt wird, sind **Einstellungen gegenüber Beweisen**, die als individuelle soziomathematische Normen darüber definiert werden, was für Beweise relevant ist, und die sich bei den Lernenden durch die Auseinandersetzung mit Beweisen im Rahmen der mathematischen Ausbildung herausbilden. Auch wenn in der bisherigen mathematikdidaktischen Forschung keine einheitliche Definition von Einstellungen gegenüber Beweisen existiert (Leder et al., 2002; Törner, 2003) und diskutiert wird, dass neben affektiven auch kognitive Merkmale wirksam werden (Sommerhoff, 2017), geben die vorhandenen Studien erste Hinweise darauf, dass ungünstige Einstellungen gegenüber Beweisen das effektive Lehren und Lernen in diesem Kontext beeinflussen können (Grundey, 2015; Stylianou et al., 2015; Weber & Mejía-Ramos, 2014). So können positive Einstellungen beispielsweise begünstigen, dass Lernende sich regelmäßig mit mathematischen Beweisen auseinandersetzen und so letztlich ihre Kenntnisse und Fertigkeiten verbessern (Roesken et al., 2011).

Darüber hinaus werden auch subjektive Überzeugungen der Lernenden bezüglich mathematischer Beweise diskutiert, wobei zwischen einer i) **subjektiven Überzeugung von Beweisen** und einer ii) **subjektive Überzeugung durch Beweise**

unterschieden werden kann (z. B. Bieda & Lepak, 2014; Dawkins & Weber, 2017; Hersh, 1993; Zaslavsky, 2018). **Zu i):** Die subjektive Überzeugung von Beweisen wird definiert als die Überzeugung einer Person zu den Kriterien für die Akzeptanz einer mathematischen Argumentation als gültiger mathematischer Beweis. Während Untersuchungen zu kognitiven Aspekten im Bereich mathematischer Beweise und dessen Gültigkeit Informationen darüber liefern, was Lernende über mathematische Beweise wissen (kognitive Aspekte; vgl. Abschnitt 2.3.1), ist es ein weiterer Schritt, dass Lernende auch von solchen Aspekten mathematischer Beweise überzeugt sind. Eine Person kann zum Beispiel generell wissen, dass ein Beweis zeigt, dass eine Aussage allgemein gültig ist (Wissen über Verifikationsfunktion von Beweisen). Sie kann aber gleichzeitig von einem konkreten, von ihr akzeptierten Beweis für eine Aussage nicht ausreichend überzeugt sein und möchte die Aussage zunächst anhand von Beispielen prüfen, um sich der Gültigkeit der Aussage zu vergewissern (Fischbein, 1982). Dawkins und Weber (2017) argumentieren beispielsweise, dass Lernende, die die Bedeutung mathematischer Beweise für das Fach Mathematik nicht wahrnehmen oder akzeptieren, Beweise verwirrend und problematisch finden. **Zu ii):** Die subjektive Überzeugung durch Beweise meint, dass ein mathematischer Beweis eine Person von der Gültigkeit einer mathematischen Aussage im Sinne der Überzeugungskfunktion von Beweisen überzeugt (Bieda & Lepak, 2014; Weber & Mejía-Ramos, 2015). De Villiers (1990) hat in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, dass die Überzeugung von der Gültigkeit eines Satzes bereits vor der Konstruktion eines Beweises besteht oder auch nicht und dann sogar als Motivation für die Konstruktion eines Beweises dient. Insbesondere Schülerinnen und Schüler, aber auch Studierende sind oft schon von einer Behauptung überzeugt, wenn sie von einer Lehr- oder anderen Autoritätsperson vorgetragen wird (z. B. Harel & Sowder, 2007).

Neben den Einstellungen und subjektiven Überzeugungen im Kontext mathematischer Beweise kann auch die **Lernmotivation bezüglich Beweisen** als Einflussfaktor auf den Lernerfolg im Bereich mathematischer Beweise diskutiert werden. Damit ist die Motivation der Lernenden gemeint, mehr über Beweise zu lernen, sodass sie sich auf einen unmittelbaren zeitlichen Abschnitt sowie eine spezifische Situation bezieht (Buff et al., 2010; Hemmi, 2006). Weniger im Zusammenhang mathematischer Beweise, aber für den Mathematikunterricht im Allgemeinen gibt es einige empirische Untersuchungen zum Einfluss der Lernmotivation. So kommen unter anderem Waldis et al. (2010) zu dem Schluss, dass nicht nur der Unterricht auf die Lernmotivation

wirkt, sondern Lernende mit einer höheren Lernmotivation Lerngelegenheiten besser nutzen und so eher von diesen profitieren. Eine hohe Lernmotivation bezüglich mathematischer Beweise sollte somit positiv mit dem Lernerfolg der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise zusammenhängen.

Ein Aspekt, der in der bisherigen Forschung immer wieder als relevant für die Motivation der Lernenden, einen Beweis zu konstruieren, und damit für das Lernen im Bereich mathematischer Beweise hervorgehoben wurde, ist das **subjektive Beweisbedürfnis**. Damit ist das subjektive Bedürfnis einer Person gemeint, sich mit mathematischen Beweisen auseinanderzusetzen, d. h. einen Beweis (beispielsweise) zu konstruieren oder zu validieren (Winter, 1983). Untersuchungen von Zaslavsky et al. (2012) haben gezeigt, dass ein vorhandenes subjektives Beweisbedürfnis positiv beeinflussen kann, wie sich Lernende mit mathematischen Beweisen auseinandersetzen. Somit kann es sich positiv auf den Lernerfolg und die Leistungen im Bereich mathematischer Beweise auswirken (Dreyfus et al., 2012). Fehlendes subjektives Beweisbedürfnis kann hingegen auf fehlendes Wissen über Beweisfunktionen und damit unzureichendes Wissen über Beweise hindeuten (Zaslavsky et al., 2012).

Insgesamt wird in der bisherigen Forschung zu affektiv-motivationalen Merkmalen von Lernenden im Bereich mathematischer Beweise einerseits diskutiert, welchen Einfluss diese auf den (weiteren) Lernerfolg und damit auf die Leistungen der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise haben können. Andererseits ist auch zu diskutieren, inwiefern affektiv-motivationale Merkmale ihrerseits durch die Leistungen der Lernenden beeinflusst werden. Auch wenn es zu solchen kausalen Zusammenhängen bisher kaum empirische Untersuchungen gibt, scheint die Betrachtung affektiv-motivationaler Merkmale von Lernenden lohnenswert zu sein, um einen differenzierteren Eindruck der Lernenden im Kontext mathematischer Beweise zu erhalten (Balacheff, 1991; Raman, 2001).

2.3.3 Einfluss der Lernumgebung

Da sich die kognitiven sowie affektiv-motivationalen Merkmale der Lernenden im Rahmen der mathematischen Ausbildung unter Einfluss des sozialen Diskursrahmens und den darin präsenten sozio-mathematischen Normen herausbilden, sind auch die **Lernumgebungen** und damit verschiedene Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen sowie die Lehrpersonen ein Fokus der mathematikdidaktischen Forschung

(z. B. Heinze & Reiss, 2004; Knuth, 2002; Stylianou et al., 2009). Es zeigen sich nicht nur auf der Ebene verschiedener nationaler Bildungssysteme oder Schulformen (Knipping, 2002) Unterschiede in der schulischen Argumentationskultur, sondern auch auf der Ebene der Lerngruppen. Das zeigen beispielsweise Sommerhoff und Ufer (2019) im Rahmen ihrer Untersuchungen zu Unterschieden in den Akzeptanzkriterien. Damit lassen sich Unterschiede in den Leistungen der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise und die Schwierigkeiten, die sie in diesem Kontext haben, auch durch den Einfluss unterschiedlicher sozio-mathematischer Normen erklären. Reiss et al. (2002) merken an, dass Leistungsunterschiede der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise maßgeblich durch die Klassenzugehörigkeit erklärt werden können.

Einen konkreten Einfluss auf die kognitiven sowie affektiv-motivationalen Merkmale der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise nehmen die sozio-mathematischen Normen im Rahmen verschiedener **Lerngelegenheiten zum Beweisen**. Je nach Qualität und Quantität der Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen sind die Lernenden besser oder schlechter mit gewissen Normen für mathematische Beweise vertraut. Nach Grundey (2015) werden mathematische Beweise im Rahmen der mathematischen Ausbildung entweder auf einer Metaebene (und dabei häufig ohne Anknüpfung an Erfahrungen oder Vorwissen der Lernenden) angesprochen oder implizit behandelt. Im zweiten Fall liegt der Fokus dann oft auf dem mathematischen Inhalt. Bezüglich des Wissens über Beweisprinzipien halten Ufer et al. (2009) hierzu fest, dass Lernende im Mathematikunterricht der Schule im Regelfall die drei Aspekte Beweisschema, Beweisstruktur und Beweiskette entweder explizit oder implizit über informelle Aushandlungsprozesse kennenlernen sollten (Brunner, 2013). Da empirische Studien zeigen, dass entsprechende Fertigkeiten im Bereich mathematischer Beweise nur eingeschränkt über die eigenständige Auseinandersetzung mit entsprechenden Aufgaben erworben werden können, ist eine gezielte Unterstützung notwendig (Hmelo-Silver et al., 2007). Darüber hinaus ist es schwierig, die Notwendigkeit und Funktionen von Beweisen zu erkennen oder ein subjektives Beweisbedürfnis zu entwickeln, wenn gewisse Aspekte implizit und damit „unsichtbar“ bleiben. Daher fordert Hemmi (2006, 2008) eine explizite Thematisierung mathematischer Beweise. Dabei können Möglichkeiten zur Reflektion und Diskussion über Beweise im Fach Mathematik unterstützend wirken (z. B. Davis, 2000). So sollen die Lernenden Funktionen mathematischer Beweise und damit die

Rolle für die Mathematik erkennen sowie die spezifische Art der Evidenzgenerierung im Fach erfahren (Hanna & Jahnke, 1996; Jahnke, 2009). Einblicke in einzelne Schritte des Beweisprozesses können die Entwicklung der Fertigkeiten der Lernenden im Bereich der mathematischen Beweise unterstützen (Kuntze, 2005; Reiss et al., 2006; Reiss & Renkl, 2002). Hadas et al. (2000, S. 130) haben darüber hinaus beispielsweise gezeigt, dass das Beweisbedürfnis von Lernenden zunimmt, wenn diese unter Zuhilfenahme einer dynamischen Geometriesoftware mit „situations of contradiction followed by surprise or by uncertainty“ konfrontiert werden.

Da insbesondere die **Lehrperson** maßgeblich für die Aushandlung der sozio-mathematischen Normen und damit auch für die Gestaltung der Lerngelegenheiten verantwortlich ist, ist auch diese (als Teil der Lernumgebung) genauer zu betrachten (Stylianou et al., 2009; Zaslavsky et al., 2012). Dass die Entscheidungen für einen gültigen mathematischen Beweis stark davon abhängen, was die Lehrperson den Lernenden vorgeben, zeigen beispielsweise die Ergebnisse von Balacheff (1988) oder Healy und Hoyles (1998). Zwar ist es stets die Aufgabe der Lehrpersonen, die sozio-mathematischen Normen innerhalb des Diskursrahmens und die damit verbundenen Akzeptanzkriterien für die Gültigkeit eines mathematischen Beweises an die der Mathematik zu orientieren (Brunner, 2013; Dawkins & Weber, 2017; Reutersward & Hemmi, 2011), doch bleibt dabei durch die praxisorientierte Definition eines mathematischen Beweises ein gewisser Spielraum, der eine Erklärung für Unterschiede aber auch Schwierigkeiten hinsichtlich der Leistungen von Lernenden verschiedener Lerngruppen bzw. Phasen der mathematischen Ausbildung sein kann (Jahnke & Ufer, 2015; Lai & Baldinger, 2021; Stylianides, 2007; Yackel & Cobb, 1996). So diskutieren beispielsweise Heinze und Reiss (2004) im Rahmen ihrer Videostudie zum Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, dass Schwierigkeiten der Lernenden durch die „proof instruction“ der Lehrkraft erklärt werden können. Bei diesem Aushandlungsprozess spielen einerseits Wissen, Fertigkeiten sowie affektiv-motivationalen Merkmale der Lehrperson hinsichtlich mathematischer Beweise eine Rolle (Knuth, 2002). Andererseits ist aber auch das dahingehende fachdidaktische Wissen sowie Überzeugungen zum Beweisen im Mathematikunterricht ein einflussnehmender Faktor (z. B. Brunner, 2013; Hemmi et al., 2010; Tabach et al., 2010). Insgesamt gilt das Beweisen im Fach Mathematik als hard-to-teach (Stylianides et al., 2017). Kotelawala (2009) zeigt, dass unter 78 amerikanischen Lehrpersonen der Sekundarstufe über die Hälfte davon ausgeht, dass

Beweise die Lernenden überfordern würden. Das zeigte sich unter anderem darin, dass 43 % der befragten Lehrpersonen Beweisen in der 8. Klasse keine zentrale Rolle zuschreiben würden. Im Rahmen des Mathematikstudiums vermuten viele Dozierende, dass Studierende durch das Lesen mathematischer Beweise sowohl die Inhalte aber auch das Beweisen lernen (Neuhaus-Eckhardt, 2022; Weber & Mejía-Ramos, 2014).

Der Lernerfolg ist aber nicht allein von der Ausgestaltung der Lerngelegenheiten und der Lehrperson abhängig. Darüber hinaus ist relevant, inwiefern die **Lernenden das Lernangebot nutzen** (z. B. Helmke, 2017; Seidel, 2014). So ist zwar vor allem zu Beginn des Mathematikstudiums das Lesen von mathematischen Beweisen eine zentrale Aufgabe für die Studierenden und wird daher als wichtige Lerngelegenheit angesehen (Neuhaus-Eckhardt, 2022), jedoch zeigen empirische Studien, dass die Lernenden dieses Lernangebot nicht angemessen nutzen (Weber & Mejía-Ramos, 2014).

2.3.4 Maßnahmen zur Förderung

Die Schwierigkeiten, die Lernende in Bezug auf ihr Wissen und ihre Fertigkeiten im Bereich mathematischer Beweise zeigen, liefern Hinweise für die Entwicklung entsprechender Fördermaßnahmen. Gleichzeitig gibt es vergleichsweise wenig Studien, in denen effektive Interventionsmaßnahmen entwickelt wurden, um diese Schwierigkeiten zu adressieren (Stylianides et al., 2017). Im Rahmen eines special issues präsentieren G. J. Stylianides und A. J. Stylianides (2017) verschiedene Interventionsmöglichkeiten im Kontext mathematischer Beweise. Bisher entwickelte Maßnahmen zur Förderung der Fertigkeiten von Lernenden im Bereich mathematischer Beweise (und damit hinsichtlich der Beweisaktivitäten) adressieren oftmals verschiedene Wissensfacetten, wie ein mathematisch-strategisches Wissen (Weber, 2006) oder das Wissen über Beweisprinzipien (Kuntze, 2008; A. J. Stylianides & G. J. Stylianides, 2009; G. J. Stylianides & A. J. Stylianides, 2009). Zur Förderung dieses Wissens kann beispielsweise der Ansatz der knowledge integration gewählt werden (Linn, 2000; Linn et al., 2013). Die Ergebnisse der Studie von G. J. Stylianides und A. J. Stylianides (2009) liefern erste Hinweise dafür, dass eine Förderung des Wissens im Bereich der Beweisprinzipien möglich ist. Jahnke und Ufer (2015, S. 350) schlagen vor, dass eine Förderung des Wissens im Bereich der Beweisfunktionen das subjektive Beweisbedürfnis von Lernenden stärken und auch

den Erwerb eines Verständnisses „für die Beweis- und Argumentationskultur der wissenschaftlichen Mathematik“ erleichtern könnte. Letzteres könnte vor allem für die Studieneingangsphase relevant sein und damit möglicherweise den Übergang von der Schule in die Hochschule unterstützen. Letztlich ist jedoch fraglich, inwiefern die Fertigkeiten im Bereich mathematischer Beweise tatsächlich an ein Wissen über Beweise gebunden sind (vgl. Kirsten, 2021).

2.4 Forschungsdesiderate und übergreifende Forschungsfragen

Zusammenfassend sind mathematische Beweise als zentrales Element des Fachs (vgl. Abschnitt 2.1) auch Teil der mathematischen Ausbildung und damit sowohl in der Schule als auch in der Hochschule relevant (vgl. Abschnitt 2.2). In verschiedenen empirischen Studien wurden wiederholt erhebliche Leistungsunterschiede sowie Schwierigkeiten der Lernenden in diesem Bereich festgestellt, und zwar sowohl in verschiedenen Phasen der mathematischen Ausbildung als auch in verschiedenen mathematischen Themengebieten (vgl. Abschnitt 2.3). Im Folgenden werden die Forschungsdesiderate abgeleitet und die übergreifenden Forschungsfragen¹ der Arbeit dargestellt. Dabei lassen sich drei Abschnitte unterscheiden.

I) Theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis

Im Rahmen der bisherigen mathematikdidaktischen Forschung wurde bereits häufig in allgemeiner Form ein Verständnis vom mathematischen Beweisen bzw. von mathematischen Beweisen thematisiert, wobei damit allgemein ein Verständnis vom Konzept mathematischer Beweise und der damit verbundenen Aktivitäten gemeint ist (z. B. Hanna & Jahnke, 1996; Heinze & Kwak, 2002; Reiss et al., 2002; Reiss et al., 2001). Dabei werden häufig Individuen verschiedener Altersgruppen hinsichtlich ihrer kognitiven oder affektiv-motivationalen Merkmale im Bereich mathematischer Beweise in verschiedenen Themengebieten betrachtet. Ein **individuelles Beweisverständnis** umfasst somit alle individuellen Dispositionen, wie Wissen, Einstellungen aber auch affektiv-motivationale Merkmale, die dazu beitragen, dass eine Person ein adäquates Bild des Konzepts Beweis und damit assoziierten

¹ Es handelt sich hierbei um übergreifende Forschungsfragen, die im Rahmen der einzelnen Studien spezifiziert werden (s. Abschnitte 3.2, 3.3 und 3.4).

Tätigkeiten (z. B. Konstruieren, Verstehen oder Validieren) hat, d. h. insbesondere auch von Evidenz(-generierung) in der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin.

Wie die folgenden Beispiele zeigen, lassen sich die in den Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 vorgestellten empirischen Untersuchungen in den Gesamtkontext eines individuellen Beweisverständnisses von Lernenden einordnen, was auch in einzelnen Beiträgen bereits thematisiert wurde (z. B. Heinze & Kwak, 2002; Reiss et al., 2001).

- Ergebnisse in Bezug auf das Wissen der Lernenden über Beweise können als Ausdruck ihres Verständnisses von Beweisen verstanden werden (z. B. Harel & Sowder, 1998; Heinze & Reiss, 2003): Wer nicht weiß, dass eine Argumentation mit nur drei Beispielen nicht als vollständiger Beweis ausreicht, hat vermutlich kein adäquates Beweisverständnis.
- Das Verständnis von Beweisen bei Lernenden spiegelt sich auch in den Fertigkeiten bei der Beweisvalidierung wider (z. B. Sommerhoff et al., 2016): Wer beim Validieren eines Beweisversuches nicht erkennt, dass dieser einen Zirkelschluss enthält und damit Mängel im Wissen über die Beweisstruktur aufweist, hat vermutlich kein adäquates Beweisverständnis.
- Das subjektive Beweisbedürfnis der Lernenden kann Hinweise auf ihr Verständnis von Beweisen geben (Zaslavsky et al., 2012): Wer ein unzureichendes Beweisbedürfnis hat, dem fehlt vermutlich die Einsicht in die Notwendigkeit mathematischer Beweise und damit ein adäquates Beweisverständnis.

Insgesamt fällt auf, dass es bislang keine einheitliche theoretische Konzeptualisierung für ein solches individuelles Beweisverständnis zu geben scheint. Das erschwert nicht nur die Interpretation der Ergebnisse bisheriger Studien hinsichtlich des Konstrukts, sondern erschwert auch die Vergleichbarkeit sowie das in Beziehung-Setzen von einzelnen Ergebnissen in einem Gesamtkontext des individuellen Beweisverständnisses. Darüber hinaus werden eine fehlende Systematik und Schwierigkeiten im Kontext der Operationalisierung deutlich. So merkt beispielsweise Sommerhoff (2017) an, dass es bisher keine geeignete Möglichkeit gibt, das Wissen über Beweisprinzipien zu erfassen, ohne es mit dem Validieren oder Konstruieren zu konfundieren.

Um Diskussionen und Interpretationen in diesem Kontext zu erleichtern, bisherige Forschung zu systematisieren und auch um zukünftige Forschung in diesem Bereich

strukturierter zu ermöglichen, bedarf es einer Konzeptualisierung und damit eines theoretischen Rahmenmodells zum individuellen Beweisverständnis, das die bereits in der bisherigen Forschung betrachteten kognitiven und affektiv-motivationalen Aspekte (vgl. Abschnitte 2.3.1 und 2.3.2) umfasst, die einem individuellen Beweisverständnis zugeordnet werden können. Da Kriterien und Normen für die Akzeptanz einer mathematischen Argumentation als gültiger mathematischer Beweis in verschiedenen Diskursrahmen unterschiedlich sein können, ist neben dem individuellen Beweisverständnis zusätzlich ein **fachliches Beweisverständnis** zu betrachten und schließlich in ein übergreifendes theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis zu integrieren. Ein solches fachliches Beweisverständnis umfasst in der Forschung diskutierte Aspekte mathematischer Beweise, hinsichtlich derer aus fachlicher Sicht eine Entscheidung für die Beantwortung der Frage nach der Gültigkeit eines mathematischen Beweises im Diskursrahmen erfolgen kann (vgl. Abschnitt 2.1: Beweisprinzipien, Beweismethoden, Beweisfunktionen, Beweispräsentationen).

Unterschiede bezüglich der Normen und Werte für mathematische Beweise zwischen verschiedenen Diskursrahmen können sich sowohl fachlich als auch individuell in Unterschieden des Beweisverständnisses zeigen. Unter anderem durch Veränderungen der sozio-mathematischen Normen sind im Verlauf Veränderungen des individuellen Beweisverständnisses zu erwarten. Um Unterschiede und Veränderungen auf der Basis eines solchen Rahmenmodells untersuchen zu können, werden für die Veränderung relevante Aspekte im Modell berücksichtigt (z. B. mathematische Teilgebiete für Unterschiede oder Lernmotivation gegenüber Beweisen für Veränderungen im Verlauf).

Für eine solche theoretische Konzeptualisierung des Beweisverständnisses bedarf es letztlich einer empirischen Validierung. Insgesamt ergeben sich damit die folgenden drei übergreifenden Forschungsfragen in Abb. 2.3 in Bezug auf das theoretische Rahmenmodell zum Beweisverständnis als Konzeptualisierung auf Basis bisheriger Forschung.

Übergreifende Forschungsfragen 1 Theoretisches Rahmenmodell – Beweisverständnis	
Wie lässt sich basierend auf bisherigen Forschungsergebnissen ein theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis darstellen?	1.1
Inwiefern lassen sich zentrale Unterscheidungen im theoretischen Rahmenmodell zum Beweisverständnis empirisch stützen?	1.2
Wie gut ist das theoretische Rahmenmodell zum Beweisverständnis geeignet, um Unterschiede und Veränderungen des Beweisverständnisses aufzuzeigen?	1.3

Abb. 2.3: Übergreifende Forschungsfragen zum theoretischen Rahmenmodell zum Beweisverständnis.

II) Empirische Untersuchungen zum Beweisverständnis von Lernenden

Dass Lernende im Rahmen ihrer mathematischen Ausbildung ein adäquates Beweisverständnis aufbauen sollen, ist zum einen im Sinne der Winterschen Grunderfahrung wichtig, da Lernende die Mathematik als deduktives System verstehen sollen (Winter, 1995). So erhalten Lernende ein adäquates Bild vom Fach Mathematik (Jahnke & Ufer, 2015; Kuntze, 2005). Darüber hinaus hat die bisherige Forschung gezeigt, dass einzelne Aspekte eines individuellen Beweisverständnisses prädiktiv für den Erfolg im Rahmen von Beweisaktivitäten sein können, sodass auch in diesem Sinne ein adäquates Beweisverständnis erstrebenswert ist (z. B. Chinnappan et al., 2012; Reiss et al., 2001; Ufer et al., 2009; Ufer et al., 2008).

Betrachtet man die Ergebnisse der mathematikdidaktischen Forschung (vgl. Abschnitte 2.3.1 und 2.3.2) vor dem Hintergrund eines Beweisverständnisses von Lernenden, so können die in der bisherigen Forschung hinsichtlich einzelner Aspekte (Wissen über Beweise, Einstellungen gegenüber Beweisen, subjektives Beweisbedürfnis, etc.) gezeigten Schwierigkeiten, auf ein inadäquates Beweisverständnis hindeuten. Diese Untersuchungen einzelner Aspekte erfolgten bisher allerdings wenig systematisch und ohne Einbettung in einen übergeordneten theoretischen Rahmen zum Beweisverständnis. Systematische Untersuchungen zum Beweisverständnis von Lernenden, die auf einem theoretischen Rahmenmodell basieren, ermöglichen jedoch eine differenziertere Beschreibung des individuellen Beweisverständnisses und liefern Informationen zu Zusammenhängen einzelner Aspekte. Die Einsicht in Zusammenhänge einzelner Aspekte des individuellen

Beweisverständnisses könnte darüber hinaus Hinweise für die Gestaltung von Lernangeboten zu mathematischen Beweisen geben.

Im Verlauf ihrer mathematischen Ausbildung werden Lernende immer wieder mit mathematischen Beweisen konfrontiert, und zwar in unterschiedlichen sozialen Diskursrahmen einschließlich der dort gegebenen sozio-mathematischen Normen. Folglich ist zu erwarten, dass Lernende ein Verständnis von Beweisen im Fach Mathematik entwickeln, das sich intraindividuell unterscheidet und sich im Verlauf der mathematischen Ausbildung und in Abhängigkeit von den – in den verschiedenen Phasen der mathematischen Ausbildung – gegebenen Normen verändert. Insbesondere sind Erkenntnisse darüber, inwieweit sich ein Beweisverständnis von Lernenden im Verlauf der mathematischen Ausbildung verändert und wie sich einzelne Aspekte dabei verhalten, im Hinblick auf mögliche Fördermaßnahmen von Interesse (Harel & Sowder, 2007). Damit ergeben sich die zwei folgenden übergreifenden Forschungsfragen zum Beweisverständnis von Lernenden in Abb. 2.4.

Übergreifende Forschungsfragen 2 Beweisverständnis – Lernende	
Wie lässt sich das individuelle Beweisverständnis von Lernenden in unterschiedlichen Phasen (im Verlauf) der mathematischen Ausbildung (basierend auf einem theoretischen Rahmenmodell) beschreiben?	2.1
Inwiefern zeigen sich Zusammenhänge einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses von Lernenden in unterschiedlichen Phasen (im Verlauf) der mathematischen Ausbildung?	2.2

Abb. 2.4: Übergreifende Forschungsfragen zum Beweisverständnis von Lernenden.

III) Individuelles Beweisverständnis im Kontext von Lerngelegenheiten und Prädiktivität

Die Qualität von Lerngelegenheiten ist ein zentraler Einflussfaktor für das Lernen im Bereich mathematischer Beweise (vgl. Abschnitt 2.3). Es ist daher anzunehmen, dass Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen auch einen Einfluss auf das individuelle Beweisverständnis von Lernenden haben. Inwiefern sich ein solcher Einfluss empirisch nachweisen lässt, ist bislang allerdings offen. Erkenntnisse hierüber

könnten mögliche Ansatzpunkte für die Gestaltung von Lernumgebungen liefern, um Lernende in ihrem individuellen Beweisverständnis bestmöglich zu unterstützen.

Da in der bisherigen Forschung Schwierigkeiten bei Lernenden hinsichtlich einzelner Aspekte im Bereich mathematischer Beweise festgestellt wurden (vgl. Abschnitt 2.3.1), erscheint eine Förderung lohnenswert und es wurden bereits Fördermaßnahmen in diesem Bereich entwickelt (vgl. Abschnitt 2.3.4). Inwieweit eine gezielte Förderung einzelner Aspekte des Beweisverständnisses möglich ist, bleibt jedoch offen. Aus den Ergebnissen der übergreifenden Forschungsfragen 2.1 und 2.2 könnten Hinweise für die Entwicklung von Fördermaterialien abgeleitet werden – eine hinreichende Validierung stellt dies jedoch noch nicht dar.

Anknüpfend an Untersuchungen aus der bisherigen Forschung zur Prädiktivität einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses für den Erfolg im Bereich von Beweisaktivitäten (vgl. Abschnitt 2.3.1) ist es weiterführend interessant zu untersuchen, inwiefern ein individuelles Beweisverständnis mit dem Erfolg im Bereich von Beweisaktivitäten zusammenhängt. Damit ergeben sich die folgenden übergreifenden Forschungsfragen zum individuellen Beweisverständnis im Kontext von Lernumgebungen und Fertigkeiten in Abb. 2.5.

Übergreifende Forschungsfragen 3 Individuelles Beweisverständnis im Kontext von Lerngelegenheiten und Prädiktivität	
Inwiefern hängt ein individuelles Beweisverständnis von Lernenden mit den Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen zusammen?	3.1
Wie effektiv ist eine gezielte Förderung einzelner Aspekte eines individuellen Beweisverständnisses von Lernenden mit Kurzinterventionen?	3.2
<i>[Explorative Fragestellung]</i> Inwiefern hängt ein individuelles Beweisverständnis von Lernenden (ggf. nach einer Förderung mithilfe von Kurzinterventionen) mit ihrem (selbst eingeschätzten) Erfolg im Bereich der Beweisaktivitäten (Beweiskonstruktion) zusammen?	3.3

Abb. 2.5: Übergreifende Forschungsfragen zum individuellen Beweisverständnis im Kontext von Lerngelegenheiten und Prädiktivität.

3 Theoretisches Rahmenmodell und die drei empirischen Studien

Aufgrund der zentralen Rolle des theoretischen Rahmenmodells zum Beweisverständnis für die gesamte Arbeit und zur besseren Einordnung der drei empirischen Studien erfolgt in Abschnitt 3.1 zunächst eine ausführliche Beantwortung der übergreifenden Forschungsfrage 1.1. Dieser Teil der Arbeit ist zusätzlich in den ersten Artikel, der im Rahmen dieser Arbeit angefertigt wurde, eingebunden (s. Kapitel 4). Die weiteren übergreifenden Forschungsfragen werden im Rahmen von drei empirischen Studien adressiert, wobei die Operationalisierung des Beweisverständnisses auf Basis des theoretischen Rahmenmodells erfolgt. Abb. 3.1 gibt einen Überblick, wie die übergreifenden Forschungsfragen im Rahmen der drei empirischen Studien adressiert werden.

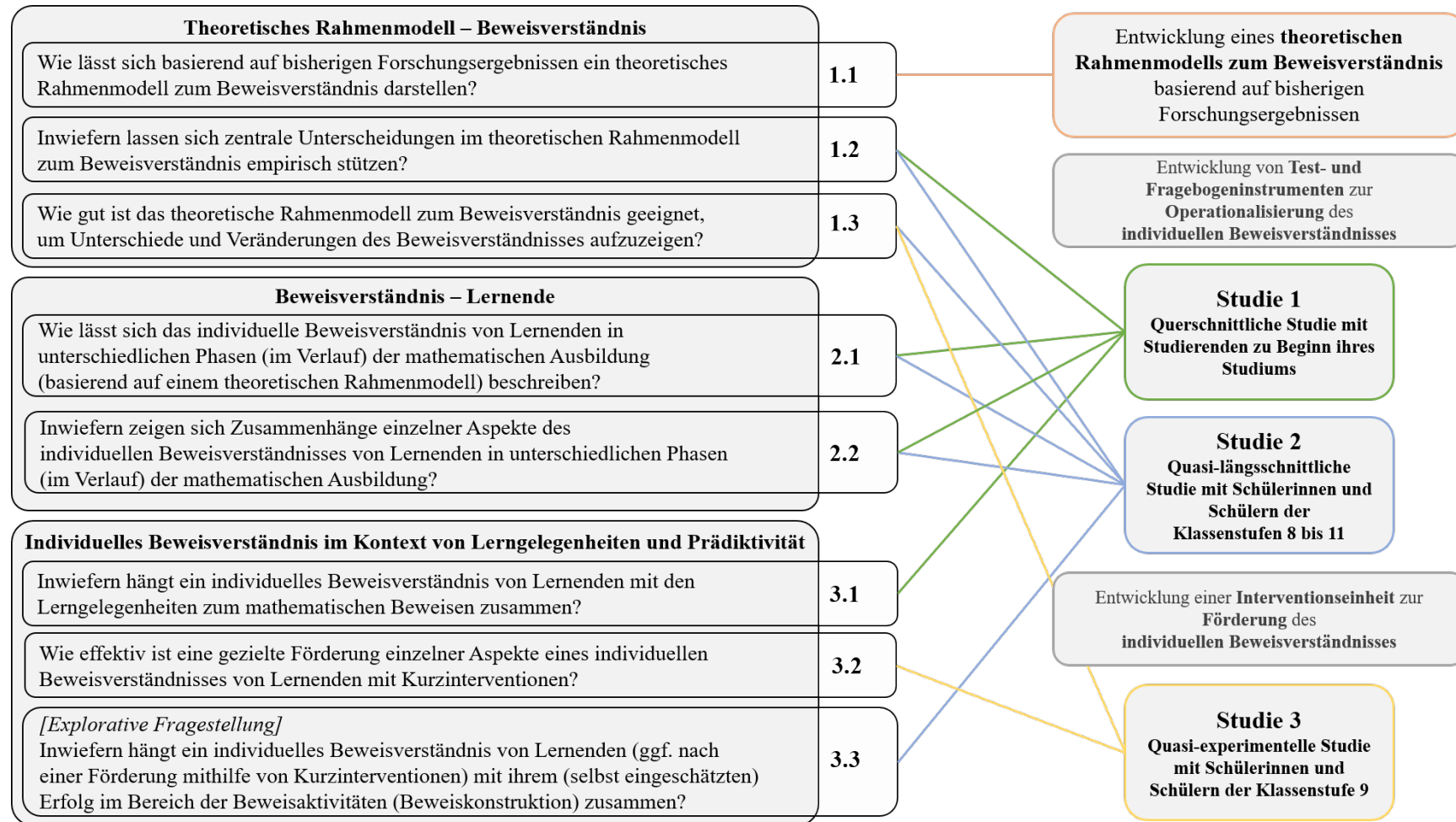


Abb. 3.1: Übersicht der übergreifenden Forschungsfragen der Arbeit und wie diese mithilfe der empirischen Studien dieser Arbeit adressiert werden.

In den Abschnitten 3.2, 3.3 und 3.4 werden die drei empirischen Studien der Arbeit überblicksartig vorgestellt, indem das Vorgehen zur Beantwortung der jeweiligen übergreifenden Forschungsfragen dargestellt wird². Die empirischen Ergebnisse werden in diesen Abschnitten jeweils kurz dargestellt – eine ausführliche Darstellung und Diskussion erfolgt im Rahmen der drei in diese Arbeit integrierte teils angenommenen und teils eingereichten Artikel (s. Kapitel 4, 5 und 6.2).

3.1 Ein theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis

In Abschnitt 2.4 wurde bereits deutlich, dass eine systematische Betrachtung eines individuellen Beweisverständnisses mit Fokus auf Zusammenhänge und Veränderungen im Verlauf der mathematischen Ausbildung bei Lernenden sinnvoll ist. Gleichzeitig zeigte sich, dass die bisherige Forschung bereits im Diskurs zu einzelnen Aspekten des individuellen Beweisverständnisses ist, jedoch ohne sich dabei auf eine systematische Grundlage zu beziehen. Das erschwert die Interpretierbarkeit und auch die Vergleichbarkeit der einzelnen Ergebnisse, wenn es um die Betrachtung eines Beweisverständnisses geht. Daher muss ein zentrales Ziel sein, eine theoretisch fundierte Konzeptualisierung in Form eines theoretischen Rahmenmodells zum Beweisverständnis zu erarbeiten (vgl. übergreifende Forschungsfrage 1.1). Abb. 3.2 zeigt ein solches Modell, das im Rahmen dieser Arbeit vorgeschlagen wird. Es wird im Folgenden vorgestellt, wobei jeweils kurz erläutert wird, inwiefern die bisherige Forschung Berücksichtigung findet³.

² Dass sich die hier dargestellten Forschungsfragen von denen der Artikel unterscheiden, hat zum einen Übersetzungsbedingte Gründe. Zum anderen erleichtert die hier vorgenommene Ausdifferenzierung der Forschungsfragen aus den Artikeln die Einordnung in den Gesamtrahmen der Arbeit.

³ Da dieses theoretische Rahmenmodell in englischer Sprache Teil des ersten Artikels dieser Arbeit ist (s. Kapitel 4), wird in dieser Vorstellung des Rahmenmodells auch jeweils auf die englischen Begriffe hingewiesen.

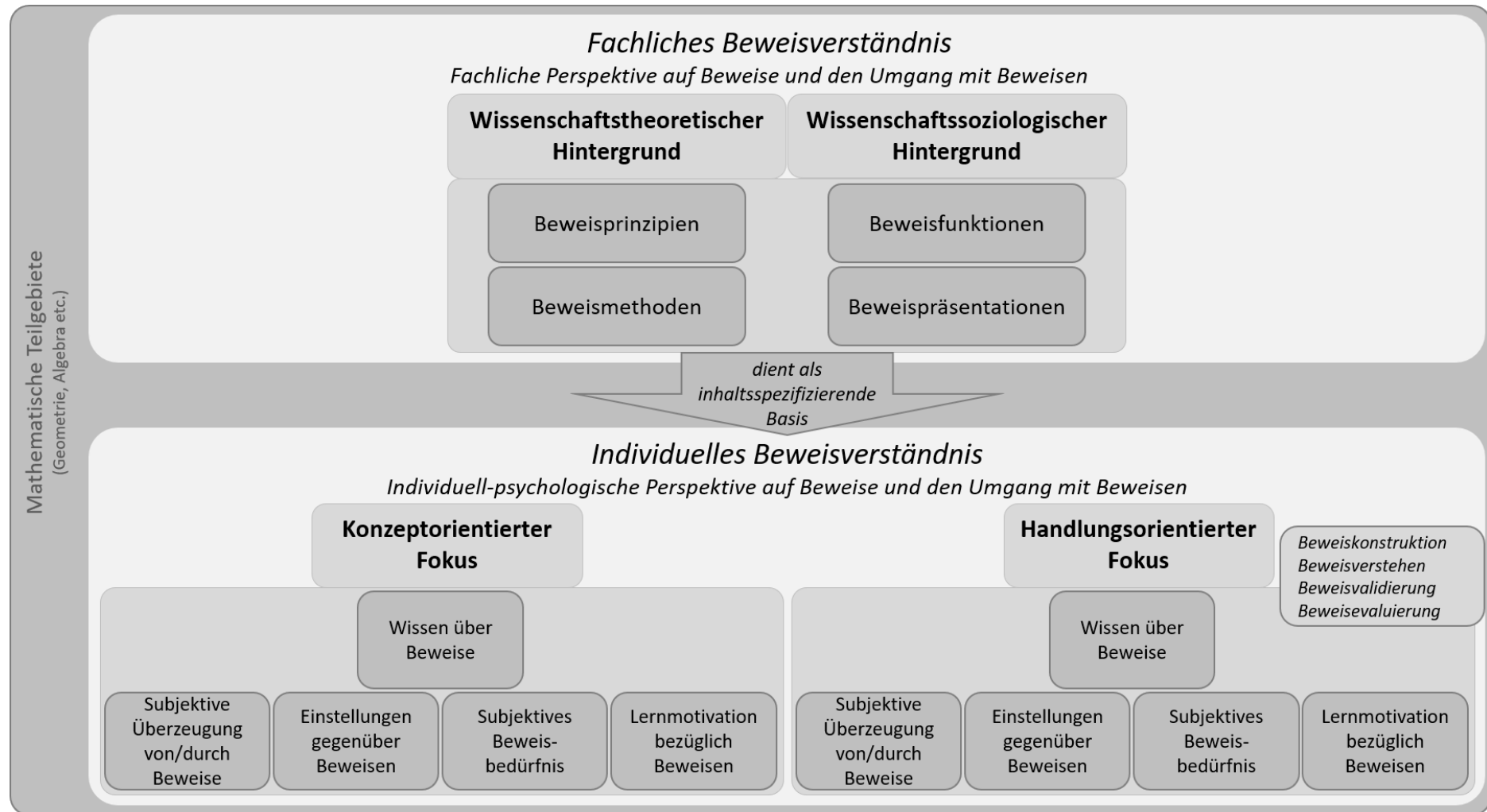


Abb. 3.2: Theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis (englischsprachige Version s. Kapitel 4).

Aufgrund der Ausführungen in Kapitel 2 ist es sinnvoll, zwischen einer (i) fachlichen Perspektive auf Beweise und den Umgang mit Beweisen⁴ und einer (ii) individuell-psychologischen Perspektive auf Beweise und den Umgang mit Beweisen⁵ zu unterscheiden. Diese Unterscheidung ist zentral im theoretischen Rahmenmodell, wobei beide Perspektiven in den Kontext mathematischer Teilgebiete (bspw. Geometrie oder Algebra)⁶ gestellt werden. So bildet ein **(i) fachliches Beweisverständnis**⁷ zusammen mit einem **(ii) individuellen Beweisverständnis**⁸ unter der Berücksichtigung der mathematischen Teilgebiete das gesamte theoretische Rahmenmodell zum Beweisverständnis (Abb. 3.2). Das fachliche Beweisverständnis (oberer Teil des Rahmenmodells) umfasst vier zentrale Aspekte, hinsichtlich derer aus fachlicher Sicht eine Entscheidung für die Beantwortung der Frage nach der Gültigkeit eines mathematischen Beweises im Diskursrahmen getroffen werden kann. Das individuelle Beweisverständnis (unterer Teil des Rahmenmodells) umfasst individuelle Dispositionen, wie Wissen, Einstellungen aber auch affektiv-motivationale Charakteristika, die Hinweise darauf geben, inwiefern eine Person ein adäquates Bild des Konzepts Beweis und damit assoziierten Tätigkeiten (bspw. Konstruktion oder Validierung), das heißt insbesondere von Evidenz(-generierung) in der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin, hat. Da sich das individuelle Beweisverständnis hinsichtlich der vier fachlichen Aspekte des fachlichen Beweisverständnisses differenzieren lässt, kann das fachliche Beweisverständnis als inhaltsspezifizierende Basis für das individuelle Beweisverständnis beschrieben werden. Die Berücksichtigung und Einordnung in den gesamten Rahmen der mathematischen Teilgebiete liegt darin begründet, dass sich sowohl das fachliche als auch das individuelle Beweisverständnis hinsichtlich verschiedener fachlicher Inhalte unterscheiden können (z. B. Dawkins & Weber, 2017; Pinto & Karsenty, 2020).

Im Folgenden werden die beiden Perspektiven auf Beweise und den Umgang mit Beweisen sowie deren Verbindung näher beschrieben. Die Unterscheidung zwischen *Beweise* und *Umgang mit Beweisen* adressiert den Unterschied zwischen Beweis als Objekt und Beweisen als Prozess (vgl. Abschnitt 2.1.1 - Reid & Knipping, 2010). In

⁴ *Disciplinary perspective on proof and handling proof*

⁵ *Individual-psychological perspective on proof and handling proof*

⁶ *Mathematical branches – Proof and handling proof in geometry, algebra, etc.*

⁷ *Disciplinary understanding of proof*

⁸ *Individual's understanding of proof*

Abschnitt (ii) zum individuellen Beweisverständnis wird deutlich, dass diesbezüglich auch ein Unterschied bei der Operationalisierung zu berücksichtigen ist.

(i) **Fachliche Perspektive auf Beweise und den Umgang mit Beweisen**

Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, können Akzeptanzkriterien für mathematische Beweise – und damit das fachliche Beweisverständnis – in der mathematischen Praxis auf sozio-mathematische Normen in dem jeweiligen Diskursrahmen zurückgeführt werden. Wesentlich für die Akzeptanzkriterien sind dabei verschiedene Aspekte bezogen auf Beweise und den Umgang mit Beweisen, die im jeweiligen Diskursrahmen als bedeutsam angesehen werden. Als zentrale Aspekte werden für das Rahmenmodell **Beweisprinzipien, Beweismethoden, Beweisfunktionen und Beweispräsentationen**⁹ betrachtet. Hinsichtlich dieser Aspekte ist zu berücksichtigen, dass Beweise in der mathematischen Praxis einerseits mit einer theoretisch-normativen Perspektive und damit vor einem wissenschaftstheoretischen Hintergrund¹⁰ und andererseits mit einer soziologischen Perspektive innerhalb der fachmathematischen Praxis und damit vor einem wissenschaftssoziologischen Hintergrund¹¹ betrachtet werden können (Hamami & Morris, 2020). Die vier Aspekte können somit jeweils sowohl vor einem wissenschaftstheoretischen als auch vor einem wissenschaftssoziologischen Hintergrund betrachtet werden, wobei die soziale Akzeptanz in der mathematischen Praxis eher von der fokussierten Beweisfunktion sowie der gewählten Beweispräsentation abhängt und hinsichtlich der Beweisprinzipien sowie der Beweismethoden eher ein Konsens besteht (vgl. Abschnitt 2.1.2). Mögliche Abhängigkeiten der vier Aspekte der fachlichen Perspektive werden in diesem theoretischen Rahmenmodell zum Beweisverständnis nicht dargestellt.

In einem konkreten Diskursrahmen wird das fachliche Beweisverständnis hinsichtlich dieser Aspekte (in der Regel implizit) festgelegt und hängt dabei vom mathematischen Teilgebiet oder der gegebenen Phase der mathematischen Ausbildung ab (Pinto & Karsenty, 2020). Beispielsweise ist es möglich, dass eine Argumentation, die zum Ende des Mathematikstudiums als gültiger mathematischer Beweis akzeptiert wird, zu Beginn des Studiums nicht als gültig akzeptiert wird, da Unterschiede in der Argumentationsbasis vorliegen.

⁹ *Proof principles, proof methods, proof functions and proof presentations*

¹⁰ *Philoscientific background*

¹¹ *Socioscientific background*

(ii) **Individuell-psychologische Perspektive auf Beweise und den Umgang mit Beweisen**

Vor dem Hintergrund eines fachlichen Beweisverständnisses innerhalb eines Diskursrahmens bildet ein Individuum ein individuelles Beweisverständnis aus, das sich in Form von individuellen Dispositionen mit Bezug zu mathematischen Beweisen zeigt. Das individuelle Beweisverständnis spiegelt sich nicht nur in kognitiven, sondern auch in affektiv-motivationalen Merkmalen wider. Da diese in dieser Arbeit vor allem im Zusammenspiel einzelner Merkmale und für die Betrachtung einer Entwicklung bzw. Veränderung des individuellen Beweisverständnisses von Interesse sind, lassen sich aus der bisherigen Forschung die folgenden Aspekte einem individuellen Beweisverständnis zuordnen: **Wissen über Beweise, subjektive Überzeugung von und durch Beweise, Einstellungen gegenüber Beweisen, subjektives Beweisbedürfnis** sowie **Lernmotivation bezüglich Beweisen**¹² (vgl. Abschnitte 2.3.1 und 2.3.2).

Bei der Betrachtung der bisherigen Forschung zu einzelnen Aspekten lassen sich Unterschiede in der Operationalisierung dieser Aspekte identifizieren. Im Rahmen des Modells wird dies durch die Unterscheidung in einen **konzeptorientierten Fokus**¹³ und einen **handlungsorientierten Fokus**¹⁴ berücksichtigt.

Ein individuelles Beweisverständnis mit einem **handlungsorientierten Fokus** wurde in vielen Studien untersucht (e.g., Healy & Hoyles, 1998; Heinze & Reiss, 2003; Sommerhoff & Ufer, 2019). Die Operationalisierung erfolgte in diesen Fällen in Verbindung mit einem konkreten Argumentationsbeispiel und damit in Kombination mit einer Beweisaktivität (**Beweiskonstruktion, Beweisverstehen, Beweisvalidierung oder Beweisevaluierung**¹⁵). Im Rahmen dieser Handlungssituation an einem konkreten Beweis(-versuch) wurde dann beispielsweise das Wissen über Beweise oder das subjektive Beweisbedürfnis von Personen erhoben. Als ein Beispiel für die Erfassung eines handlungsorientierten Wissens über Beweise ist die Studie von Ufer et al. (2009) zu nennen. In dieser wurden Schülerinnen und

¹² *Knowledge about proof, subjective conviction of/by proof, beliefs about proof, need for proof, learning orientation about proof*

¹³ *Concept-oriented focus*

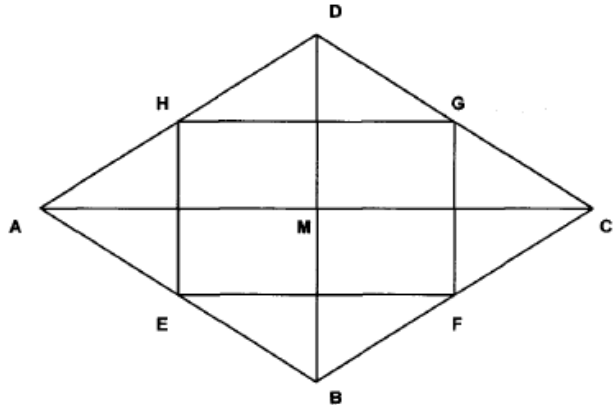
¹⁴ *Action-oriented focus*

¹⁵ *Proof construction, Proof comprehension, Proof validation, Proof evaluation*

Schülern der 8. Klassenstufe vier Argumentationsbeispiele fiktiver Personen präsentiert. Abb. 3.3 zeigt ein solches Beispiel.

Rechteck in der Raute

Verbindet man die vier Seitenmitten einer Raute, so entsteht ein Rechteck.



Achims Antwort:

Ich habe drei Rauten gezeichnet: eine mit genau 7 cm Seitenlänge, eine mit 4,9 cm Seitenlänge und eine mit 2,75 cm Seitenlänge. Jedes Mal habe ich die Seitenmitten eingezeichnet und verbunden. Dann habe ich die Innenwinkel dieser Vierecke EFGH gemessen: sie waren immer genau 90° groß.

Also sind die Vierecke EFGH immer Rechtecke.

Die Behauptung ist wahr!

Abb. 3.3: Beispiel einer handlungsorientierten Operationalisierung aus Ufer et al. (2009).

Bei jedem der vier Lösungsbeispiele sollten die Schülerinnen und Schüler angeben, ob es sich ihrer Meinung nach um einen korrekten mathematischen Beweis handelte. Im Falle einer Ablehnung wurde nach einer Begründung gefragt.

Im Vergleich dazu gibt es Studien, die bei der Operationalisierung einen **konzeptorientierten Fokus** auf ein individuelles Beweisverständnis legen (z. B. Andersen, 2018; Sommerhoff & Ufer, 2019). Dabei werden einzelne Aspekte des individuellen Beweisverständnisses adressiert, ohne dass die befragten Personen mit einem konkreten Argumentationsbeispiel konfrontiert werden. Ein Beispiel für die Untersuchung eines konzeptorientierten Wissens über Beweise ist die im Rahmen der Interviewstudie von Andersen (2018) gestellte Frage „What counts as an error or shortcoming in a proof?“. Es wird ein Wissen über Beweise ohne Bezug zu einem konkreten mathematischen Beweis(-versuch) bzw. einer damit verbundenen

Beweisaktivität adressiert. Auch wenn der Unterschied als marginal angesehen werden kann, hat die umformulierte Aussage „What counts as an error when proving?“ einen anderen Fokus: Im Gegensatz zum Original, das sich auf den Beweis als Objekt fokussiert, bezieht sich diese Version auf das Beweisen als Prozess (vgl. Abschnitt 2.1.1). Die geringfügige Änderung der Formulierung würde also zu einem Item führen, das konzeptorientiertes Wissen über den Umgang mit Beweisen anspricht. Diese für die Operationalisierung möglicherweise relevante Differenzierung wird durch die Unterscheidung in *Beweise* und *Umgang mit Beweisen* im Rahmen der beiden Perspektiven berücksichtigt.

Auch wenn die Unterscheidung der beiden Fokusse aus theoretischer Sicht sinnvoll ist und auch auf die Notwendigkeit einer Differenzierung hingewiesen wird (vgl. Abschnitt 2.3.1 - z. B. A. J. Stylianides & G. J. Stylianides, 2009; Vinner, 1997), findet diese Unterscheidung in der bisherigen Forschung kaum Berücksichtigung. Wird beispielsweise das Wissen über Beweise in einer Studie handlungsorientiert operationalisiert, so bleibt offen, inwiefern diese Form der Operationalisierung bei der Interpretation der Ergebnisse zu berücksichtigen ist. Darüber hinaus wird in Studien angemerkt, dass es schwierig zu sein scheint, eine Untersuchung von Wissen oder Einstellungen hinsichtlich mathematischer Beweise ohne den direkten Bezug zu einer Beweisaktivität zu realisieren (Kirsten, 2021; Sommerhoff, 2017). Eine Trennung in Beweise und den Umgang mit Beweisen ist damit in der methodischen Umsetzung anspruchsvoll. Die Systematisierung durch die hier vorgenommene Konzeptualisierung des Beweisverständnisses kann wenigstens zukünftige Forschung für diese Unterscheidung sensibilisieren und so auf die Notwendigkeit innovativer methodischer Zugänge hinweisen.

Bezüglich (der Operationalisierung) des individuellen Beweisverständnisses ist darauf hinzuweisen, dass sich die Aspekte des individuellen Beweisverständnisses (Wissen über Beweise, Einstellungen gegenüber Beweisen, etc.) auf die verschiedenen Aspekte des fachlichen Beweisverständnisses (Beweisprinzipien, Beweismethoden, etc.) beziehen können. So kann die fachliche Perspektive auf Beweise und den Umgang mit Beweisen als **inhaltsspezifizierende Basis**¹⁶ für die individuell-psychologische Perspektive auf Beweise und den Umgang mit Beweisen beschrieben und im Rahmenmodell durch den Pfeil angedeutet werden. Damit kann beispielsweise ein

¹⁶ *Content-wise specified basis*

Wissen sowohl über Beweisprinzipien aber auch über Beweisfunktionen, Beweispräsentationen oder Beweismethoden betrachtet werden (z. B. Healy & Hoyles, 1998). In diesen Fällen handelt es sich um inhaltlich-spezifizierte Aspekte des individuellen Beweisverständnisses, die die Aspekte des fachlichen Beweisverständnisses mit denen des individuellen Beweisverständnisses verbinden. So kann beispielsweise ein konzeptorientiertes Wissen über Beweisprinzipien oder ein handlungsorientiertes Wissen über Beweismethoden betrachtet werden, wobei eine solche Differenzierung, wenn sie im Rahmen der Operationalisierung berücksichtigt wird, zwar aufwendig ist, aber eine strukturiertere Forschung und gegebenenfalls eine Abgrenzung entsprechender Ergebnisse zu einzelnen fachlichen Aspekten ermöglicht.

Insgesamt wird mit diesem theoretischen Rahmenmodell ein Beweisverständnis konzeptualisiert, das auf der bisherigen Forschung basiert und damit die übergreifende **Forschungsfrage 1.1 beantwortet**¹⁷. Auf dieser Grundlage können Forschungsergebnisse eingeordnet sowie zukünftige Forschung systematisiert durchgeführt werden. Letztlich wird dadurch die Vergleichbarkeit und Interpretierbarkeit gestärkt und es werden differenziertere Aussagen zum Beweisverständnis möglich, was beispielsweise Leistungen und Schwierigkeiten von Lernenden in diesem Bereich besser verstehbar machen. Inwiefern sich theoretisch begründete Unterscheidungen in diesem Rahmenmodell auch empirisch stützen lassen (vgl. übergreifende FF 1.2) und ob Operationalisierungen des individuellen Beweisverständnisses, die auf dem Rahmenmodell basieren, geeignet sind, Unterschiede und Veränderungen des individuellen Beweisverständnisses aufzuzeigen (vgl. übergreifende FF 1.3), wird anhand der empirischen Ergebnisse der Studien 1, 2 und 3 dieser Arbeit untersucht.

Im Folgenden werden die drei empirischen Studien dieser Arbeit mit jeweiligen Fragestellungen und methodischem Vorgehen dargestellt. Die empirischen Ergebnisse werden nicht nur genutzt, um das Modell zu validieren und empirisch abzusichern, sondern auch zur Beantwortung der weiteren übergreifenden Forschungsfragen (vgl. Abb. 3.1). Wird das individuelle Beweisverständnis auf Grundlage dieses Rahmenmodells operationalisiert, so ist an dieser Stelle anzumerken, dass bei der

¹⁷ Die Beantwortung dieser Forschungsfrage findet sich außerdem im ersten Artikel dieser Arbeit (s. Kapitel 4).

Bewertung des individuellen Beweisverständnisses stets der Kontext des sozialen Diskursrahmens zu beachten ist.

3.2 Studie 1

Im Rahmen der ersten Studie dieser Arbeit wurden $N = 234$ Studierende zu Beginn ihres Mathematikstudiums mithilfe eines Online-Fragebogens unter anderem zu ihrem individuellen Beweisverständnis sowie zu ihren Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen während ihrer Schulzeit befragt. Anhand dieser querschnittlichen Studie erfolgte (1) eine empirische Absicherung zentraler Unterscheidungen innerhalb des theoretischen Rahmenmodells zum individuellen Beweisverständnis (übergreifende FF 1.2). Es wurde (2) ein Einblick in das individuelle Beweisverständnis von Studierenden zu Beginn ihres Studiums (übergreifende FF 2.1) und (3) ein Einblick in die Zusammenhänge einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses von Studierenden gegeben (übergreifende FF 2.2). Darüber hinaus wurde (4) untersucht, inwiefern ein Zusammenhang zwischen den Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen während ihrer Schulzeit – und damit den schulischen Vorerfahrungen zum mathematischen Beweisen – und dem Beweisverständnis von Studierenden besteht (übergreifende FF 3.1) (vgl. Abb. 3.1).

An dieser Stelle ist mit Blick auf die übergreifenden Forschungsfragen und die weiteren Studien der Arbeit eine kurze Anmerkung zur Wahl der Stichprobe in dieser Studie 1 zu machen: Die Schwierigkeiten, die Lernende im Bereich mathematischer Beweise haben (vgl. Abschnitt 2.3.1), werden in vergleichbarer Art auch im Rahmen der Untersuchung eines individuellen Beweisverständnisses von Lernenden erwartet. Um herauszufinden, ob es grundsätzlich möglich ist, ein individuelles Beweisverständnis von Lernenden basierend auf dem theoretischen Rahmenmodell zu untersuchen, wurden für diese erste Studie Mathematikstudierende betrachtet. Von diesen wurde erwartet, dass sie zu den im Fach Mathematik leistungsstärkeren Lernenden gehören (vgl. Abschnitt 2.2.3 - Kosiol et al., 2019).

Für die Untersuchungen bedurfte es zunächst einer Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses und damit einer Entwicklung von Test- und Fragebogeninstrumenten. Da die Erhebungszeit bei der Studie stark limitiert war, war es nicht möglich, alle Aspekte des individuellen Beweisverständnisses zu berücksichtigen. Darüber hinaus sollten die im Rahmen dieser Studie entwickelten

Testinstrumente auch für die weiteren Studien und damit auch für Lernende in früheren Phasen der mathematischen Ausbildung genutzt werden. Dies war bei der Entwicklung der Testinstrumente zu berücksichtigen, z. B. bei der Wortwahl oder den zugrunde liegenden Fachinhalten. Die Grundlage für diese Operationalisierung lieferte das theoretische Rahmenmodell. Abb. 3.4 zeigt, welche Aspekte des individuellen Beweisverständnisses im Rahmen dieser Studie 1 fokussiert wurden.

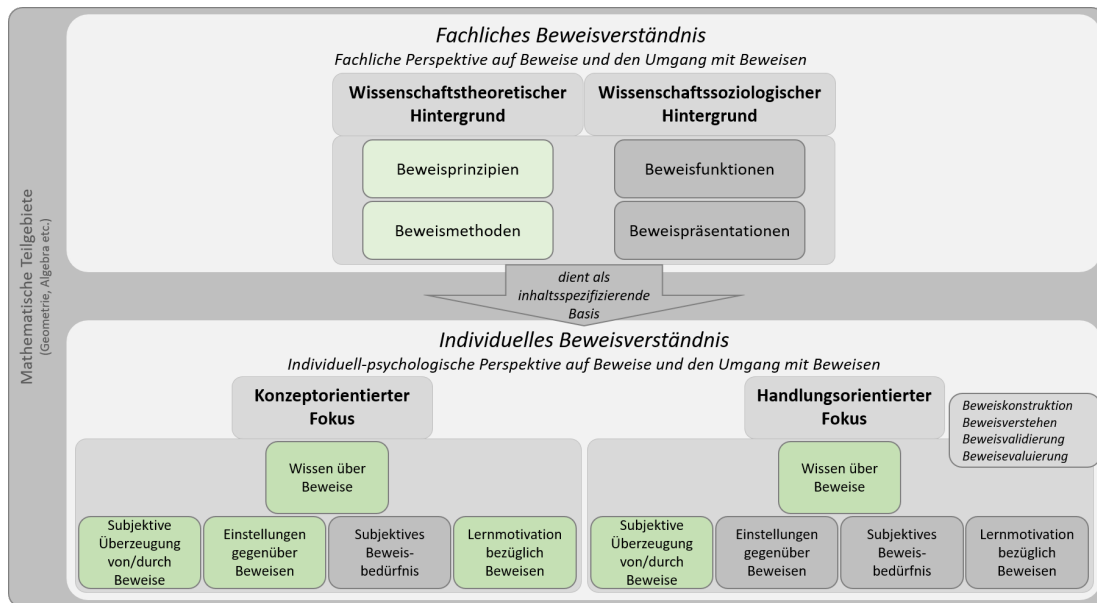


Abb. 3.4: Die grün markierten Aspekte des individuellen Beweisverständnisses sind diejenigen, die im Rahmen der Studie 1 fokussiert und in dieser Arbeit betrachtet wurden. Die hellgrünen Markierungen im fachlichen Beweisverständnis machen deutlich, dass die fokussierten Aspekte des individuellen Beweisverständnisses inhaltlich auf Beweisprinzipien und Beweismethoden spezifiziert wurden.

Um die Bewertung des Wissens über Beweisprinzipien bzw. -methoden zu erleichtern, wurde darauf geachtet, dass solche Inhalte ausgewählt wurden, hinsichtlich derer in der (hoch-)schulmathematischen Community ein Konsens angenommen werden kann (vgl. Abschnitt 2.3.1 - z. B.: Nicht bewiesene Aussagen dürfen nicht als Argument genutzt werden).

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass sich die Darstellung in dieser Arbeit auf die für den ersten Artikel der Arbeit relevanten Aspekte fokussiert. Weitere Daten, die im Rahmen der Studie 1 erhoben wurden (Informationen über ein individuelles Beweisverständnis der Studierenden zu weiteren Messzeitpunkten), wurden noch nicht ausgewertet, sind jedoch für weiterführende Analysen und Veröffentlichungen außerhalb des Promotionsvorhabens vorgesehen.

Da in dieser Studie Studierende zu Beginn ihres Mathematikstudiums betrachtet wurden und das individuelle Beweisverständnis anhand der in Abb. 3.4 dargestellten Aspekte operationalisiert wurde, lassen sich die übergreifenden Forschungsfragen dieser Arbeit in Abb. 3.5 spezifizieren.

Studie 1		
Theoretisches Rahmenmodell – Beweisverständnis		
FF1	Inwiefern lassen sich zentrale Unterscheidungen in konzept- und handlungsorientierte Aspekte des individuellen Beweisverständnisses* empirisch stützen?	1.2
Beweisverständnis – Lernende		
FF2	Wie lässt sich das individuelle Beweisverständnis* von Mathematikstudierenden zu Beginn ihres Studiums beschreiben?	2.1
FF3	Inwiefern zeigen sich Zusammenhänge einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses* von Mathematikstudierenden zu Beginn ihres Studiums?	2.2
Individuelles Beweisverständnis im Kontext von Lerngelegenheiten und Prädiktivität		
FF4	Inwiefern hängt ein individuelles Beweisverständnis* von Mathematikstudierenden zu Beginn ihres Studiums mit ihren Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen während ihrer Schulzeit zusammen?	3.1

Abb. 3.5: Die vier in Studie 1 fokussierten Forschungsfragen, die als Spezifizierung der übergreifenden Forschungsfragen dieser Arbeit zu verstehen sind (vgl. Abb. 3.1). Die Kennzeichnung (*) weist darauf hin, dass die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses in dieser Studie die in Abb. 3.4 markierten Aspekte umfasst. Der grundsätzliche Gedanke der übergreifenden Forschungsfrage bleibt bei der Spezifizierung erhalten.

Als ein Ergebnis dieser Studie 1 zeigte sich zunächst, dass eine Operationalisierung eines individuellen Beweisverständnisses mit einer inhaltlichen Spezifizierung auf Beweisprinzipien mithilfe der entwickelten Testinstrumente möglich und hinreichend reliabel ist. Diese Testinstrumente können also für die Studien 2 und 3 genutzt werden. Bezüglich der inhaltlichen Spezifizierung auf Beweismethoden bedarf es wegen unzureichender Reliabilitäten der Skalen einer Anpassung der Testinstrumente. Beispielitems zu den Testinstrumenten sind in Kapitel 4 dargestellt.

(FF1) Die Ergebnisse liefern unter anderem eine empirische Stützung der theoretisch begründeten Unterscheidungen innerhalb des individuellen Beweisverständnisses im theoretischen Rahmenmodell. Es zeigte sich, dass eine Unterscheidung zwischen einem konzept- und einem handlungsorientierten Fokus bei der Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses auch empirisch begründet werden kann. Darüber hinaus konnte auch die Unterscheidung der einzelnen Aspekte innerhalb eines Fokus empirisch abgesichert werden. (FF2) Das individuelle Beweisverständnis war

bei den Studierenden zu Beginn ihres Mathematikstudiums unterschiedlich ausgeprägt. Bei allen betrachteten Aspekten des individuellen Beweisverständnisses lag der Mittelwert über dem theoretischen Skalenmittelwert von 3,5 und unter Berücksichtigung der Standardabweichungen erreichten die meisten Studienanfängerinnen und Studienanfänger Werte über 3,5. Somit kann das individuelle Beweisverständnis der Studierenden zu Beginn ihres Studiums als moderat bis gut beschrieben werden. (FF3) Zwischen den einzelnen Aspekten des individuellen Beweisverständnisses der Studierenden konnten Zusammenhänge beobachtet werden. Beispielsweise zeigte sich eine signifikant positive Korrelation zwischen dem Wissen über Beweisprinzipien und der subjektiven Überzeugung von/durch Beweisprinzipien, sowohl mit einem konzeptorientierten Fokus ($r = .59$, $p < .001$) als auch mit einem handlungsorientierten Fokus ($r = .66$, $p < .001$). (FF4) Für diese Varianz im individuellen Beweisverständnis der Studierenden scheint nicht die Quantität der schulischen Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen verantwortlich zu sein, welche die Studierenden als selbstberichtete schulische Vorerfahrungen berichteten: Es zeigte sich kein signifikanter Zusammenhang zwischen der Anzahl der Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen in der Schule und dem individuellen Beweisverständnis der Studierenden.

3.3 Studie 2

Aufbauend auf den Befunden von Studie 1 erfolgte in Studie 2 eine Fokussierung auf das individuelle Beweisverständnis von Lernenden im Verlauf der Sekundarstufe. Dafür wurde das individuelle Beweisverständnis von $N = 456$ Schülerinnen und Schülern der Klassenstufen 8 bis 11 mithilfe eines Online-Fragebogens betrachtet. Die Ergebnisse dieser quasi-längsschnittlichen Studie wurden genutzt, um (i) ein individuelles Beweisverständnis von Lernenden im Verlauf der mathematischen Ausbildung zu beschreiben (übergreifende FF 2.1) und um (ii) Zusammenhänge einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses im Verlauf der mathematischen Ausbildung zu untersuchen (übergreifende FF 2.2). Darüber hinaus wurden die Ergebnisse genutzt, um (iii) zu untersuchen, inwieweit die auf dem theoretischen Rahmenmodell basierende Operationalisierung des Beweisverständnisses geeignet ist, Unterschiede und Veränderungen des Beweisverständnisses festzuhalten (übergreifende FF 1.3). In Ergänzung zu Studie 1

lieferten die Ergebnisse (iv) weitere Erkenntnisse bezüglich der theoretisch angenommenen Unterscheidungen des individuellen Beweisverständnisses im Rahmenmodell (übergreifende FF 1.2). Außerdem wird im Rahmen dieser Studie ein erster Eindruck von der Relevanz eines individuellen Beweisverständnisses für die Leistungen und den Erfolg der Lernenden im Bereich mathematischer Beweisaktivitäten gewonnen (explorative übergreifende FF 3.3) (vgl. Abb. 3.1).

Die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses erfolgte ähnlich wie in Studie 1 basierend auf dem theoretischen Rahmenmodell zum Beweisverständnis. Abb. 3.6 zeigt, welche Aspekte im Rahmen dieser Studie 2 für die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses betrachtet wurden.

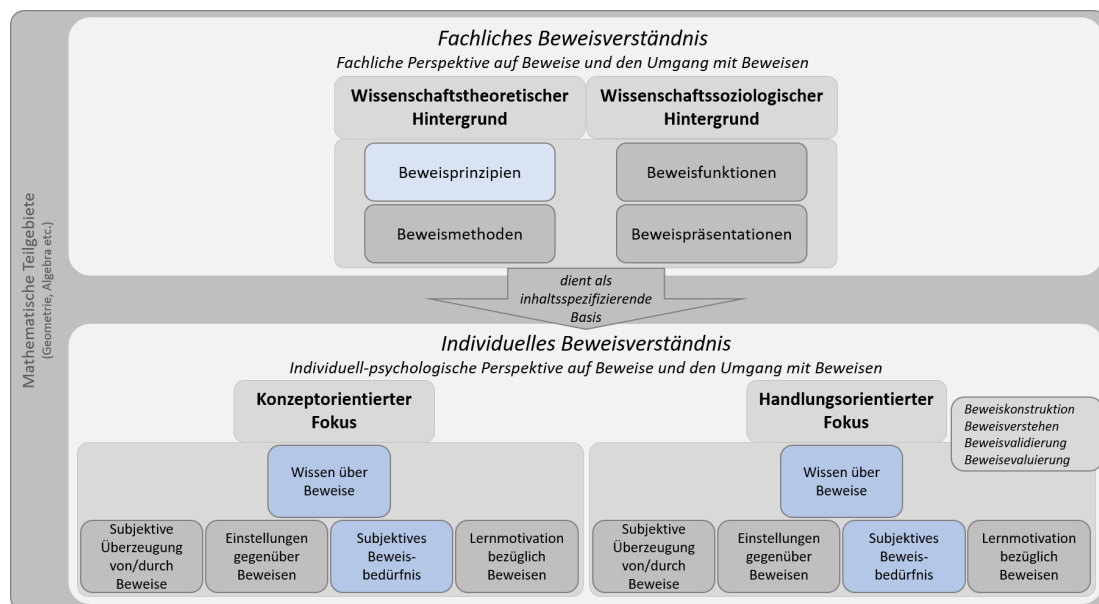


Abb. 3.6: Die blau markierten Aspekte des individuellen Beweisverständnisses sind diejenigen, die im Rahmen der Studie 2 fokussiert und in dieser Arbeit betrachtet wurden. Die hellblaue Markierung im fachlichen Beweisverständnis macht deutlich, dass die fokussierten Aspekte des individuellen Beweisverständnisses inhaltlich auf Beweisprinzipien spezifiziert wurden.

Da die Testinstrumente bereits im Rahmen der ersten Studie so konzipiert wurden, dass sie auch für die Schule geeignet sind, konnten die Testinstrumente zum Wissen über Beweisprinzipien auch für die Studie 2 übernommen werden. Für die Beantwortung der explorativen übergreifenden FF 3.3, die auf den Zusammenhang zwischen einem individuellen Beweisverständnis und dem Erfolg im Bereich von

Beweisaktivitäten fokussiert, wurden die Schülerinnen und Schüler gebeten, Selbsteinschätzungen zu ihren Fähigkeiten zur Beweiskonstruktion abzugeben.

Wie bei Studie 1 sei darauf hingewiesen, dass sich die Darstellung in dieser Arbeit auf die für den zweiten Artikel relevanten Aspekte fokussiert. Weitere Daten, die im Rahmen der Studie 2 erhoben wurden (Informationen zu weiteren Aspekten des individuellen Beweisverständnisses der Schülerinnen und Schüler und Angaben der Lehrkräfte zum Beweisen im Mathematikunterricht in den Lerngruppen), werden an dieser Stelle nicht systematisch dargestellt, sind jedoch für weiterführende Analysen und Veröffentlichungen außerhalb des Promotionsvorhabens vorgesehen.

Auch für die Studie 2 lassen sich spezifizierte Forschungsfragen formulieren, die in Abb. 3.7 dargestellt sind.

Studie 2		
Theoretisches Rahmenmodell – Beweisverständnis		
FF1	Inwiefern sich zentrale Unterscheidungen in konzept- und handlungsorientierte Aspekte des individuellen Beweisverständnisses* empirisch stützen?	1.2
FF2	Inwiefern ist das theoretische Rahmenmodell zum Beweisverständnis geeignet, um Unterschiede und Veränderungen des individuellen Beweisverständnisses* empirisch zu zeigen?	1.3
Beweisverständnis – Lernende		
FF3	Wie lässt sich das individuelle Beweisverständnis* von Schülerinnen und Schülern im Verlauf der Klassenstufen 8 bis 11 beschreiben?	2.1
FF4	Inwiefern zeigen sich Zusammenhänge einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses* von Schülerinnen und Schülern im Verlauf der Klassenstufen 8 bis 11?	2.2
Individuelles Beweisverständnis im Kontext von Lerngelegenheiten und Prädiktivität		
FF5	Inwiefern hängt ein individuelles Beweisverständnis* von Schülerinnen und Schülern der Klassenstufen 8 bis 11 mit ihrem selbsteingeschätzten Erfolg bezüglich Beweiskonstruktion zusammen?	3.3

Abb. 3.7: Die fünf in Studie 2 fokussierten Forschungsfragen, die als Spezifizierung der übergreifenden Forschungsfragen dieser Arbeit zu verstehen sind (vgl. Abb. 3.1). Die Kennzeichnung (*) weist darauf hin, dass die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses in dieser Studie die in Abb. 3.6 markierten Aspekte umfasst. Der grundsätzliche Gedanke der übergreifenden Forschungsfrage bleibt bei der Spezifizierung erhalten.

Als ein Ergebnis zeigte sich zunächst, dass die Testinstrumente auch in Studie 2 reliabel sind und eine Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses wie geplant auch für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe genutzt werden kann.

(FF1) Wie bereits bei den Studierenden ist eine empirische Absicherung der theoretisch begründeten Unterscheidungen innerhalb des individuellen Beweisverständnisses im theoretischen Rahmenmodell durch die Ergebnisse des Beweisverständnisses der Schülerinnen und Schüler möglich. Auch hier zeigte sich, dass eine Unterscheidung zwischen einem konzept- und einem handlungsorientierten Fokus bei der Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses empirisch begründet werden kann. Darüber hinaus konnte die theoretisch fundierte Unterscheidung zwischen den Aspekten Wissen über Beweise und subjektives Beweisbedürfnis empirisch abgesichert werden. (FF2) Aufgrund der festgestellten Unterschiede zwischen den Schülerinnen und Schülern der betrachteten Schulklassen und Jahrgänge, kann die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses auf Basis des theoretischen Rahmenmodells als geeignet angesehen werden, um Unterschiede im individuellen Beweisverständnis von Schülerinnen und Schülern aufzuzeigen. Da sich über die Klassenstufen hinweg jedoch keine deutliche Veränderung im individuellen Beweisverständnis der Schülerinnen und Schüler abzeichnete, kann basierend auf den Ergebnissen dieser quasi-längsschnittlichen Studie keine Aussage bezüglich der Veränderungssensitivität der Testinstrumente erfolgen. (FF3) Die Mittelwerte und Standardabweichungen der einzelnen Aspekte, lassen das individuelle Beweisverständnis von Schülerinnen und Schülern der Klassenstufen 8 bis 11 als schwach bis moderat beschreiben. Von Klassenstufe 8 bis Klassenstufe 11 zeigte sich eine positive Veränderung des Wissens über Beweisprinzipien, allerdings kann ein Zuwachs von weniger als einer Standardabweichung in vier Schuljahren kaum als deutlicher Effekt des Unterrichts gewertet werden. Es zeigte sich kein positiver Effekt der Klassenstufe auf das subjektive Beweisbedürfnis. (FF4) Die Ergebnisse der Korrelationsberechnungen zwischen den Aspekten des individuellen Beweisverständnisses zeigten kein eindeutiges Muster in den untersuchten Klassenstufen, sodass kein Zusammenhang zwischen dem Wissen über Beweisprinzipien und dem subjektiven Beweisbedürfnis zu bestehen scheint. (FF5) Da das Wissen über Beweisprinzipien als moderat beschrieben werden kann – den Schülerinnen und Schülern also Wissen über Beweise fehlt – und sich kein Zusammenhang zwischen diesem Wissen und den von den Schülerinnen und Schülern selbst eingeschätzten Fähigkeiten zur Konstruktion von Beweisen zeigte, lieferten die Ergebnisse erste Hinweise darauf, dass sich die Schülerinnen und Schülern ihres Mangels an Wissen über Beweisprinzipien nicht

bewusst zu sein scheinen und ihre Fähigkeiten zur Konstruktion von Beweisen daher überschätzen. Gleichzeitig gibt es einen positiven signifikanten Zusammenhang zwischen dem subjektiven Beweisbedürfnis der Schülerinnen und Schüler und ihren selbsteingeschätzten Fähigkeiten, was durch häufiger genutzte Lernangebote (durch ein höheres subjektives Beweisbedürfnis) erklärt werden könnte.

3.4 Studie 3

In Studie 3 wurde eine Förderung des individuellen Beweisverständnisses fokussiert, wobei zunächst noch offen war, ob eine gezielte Förderung einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses möglich ist. Da sich in Studie 2 – übereinstimmend mit der internationalen Forschungslage (Healy & Hoyles, 1998; Heinze, 2004) – zeigte, dass das Wissen über Beweisprinzipien bei den Lernenden der Sekundarstufe schwach bis moderat ausgeprägt ist und sich bei den Schülerinnen und Schülern Klassenstufen 8 bis 11 kaum ein Unterschied im Wissen über Beweisprinzipien zeigte, wurden Lernangebote entwickelt, die gezielt das Wissen über Beweisprinzipien adressierten. Eine detaillierte Beschreibung des Interventionsmaterials, welches für die 9. Klassenstufe geeignet ist, findet sich in Abschnitt 6.1.

Im Rahmen einer quasi-experimentellen Studie in einem 9. Jahrgang mit $N_{Int} = 30$ Schülerinnen und Schülern der Interventionsgruppe und $N_{Con} = 31$ Schülerinnen und Schülern der Kontrollgruppe aus jeweils zwei unterschiedlichen Klassen erfolgte die Evaluation des Interventionsmaterials. Alle Schülerinnen und Schüler wurden vor Beginn der Intervention mithilfe eines Online-Tests zu ihrem Beweisverständnis befragt (Prä-Test). Die Interventionsgruppe erhielt verteilt über das zweite Schulhalbjahr der 9. Klassenstufe im Rahmen des regulären Mathematikunterrichts insgesamt fünf von der Lehrkraft durchgeführte Interventionsstunden (45 Minuten pro Interventionsstunde). Am Ende des Schulhalbjahres wurden erneut alle Schülerinnen und Schüler mithilfe eines Online-Fragebogens zu ihrem individuellen Beweisverständnis befragt (Post-Test) (vgl. Abb. 3.8).

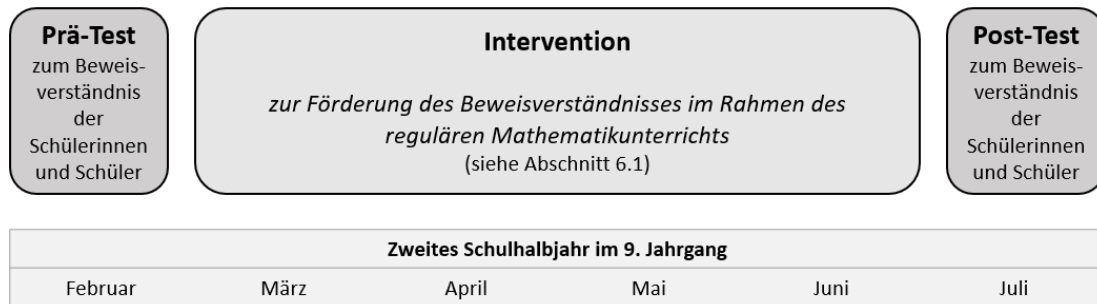


Abb. 3.8: Ablauf der quasi-experimentellen Studie.

Die Ergebnisse aus Prä- und Post-Test zum individuellen Beweisverständnis wurden genutzt, um (1) zu überprüfen, ob das theoretische Rahmenmodell zum Beweisverständnis geeignet ist, Veränderungen des individuellen Beweisverständnisses aufzuzeigen (übergreifende FF 1.3). Die Ergebnisse wurden darüber hinaus genutzt, um (2) zu untersuchen, ob eine gezielte Förderung des Wissens über Beweisprinzipien, und damit einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses, von Schülerinnen und Schülern der 9. Klassenstufe mithilfe einer Kurzintervention möglich ist (übergreifende FF 3.2) (vgl. Abb. 3.1).

Abb. 3.9 veranschaulicht, dass in dieser Studie 3 bei der Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses für den Prä- und Post-Test auf das Wissen über Beweisprinzipien fokussiert wurde.

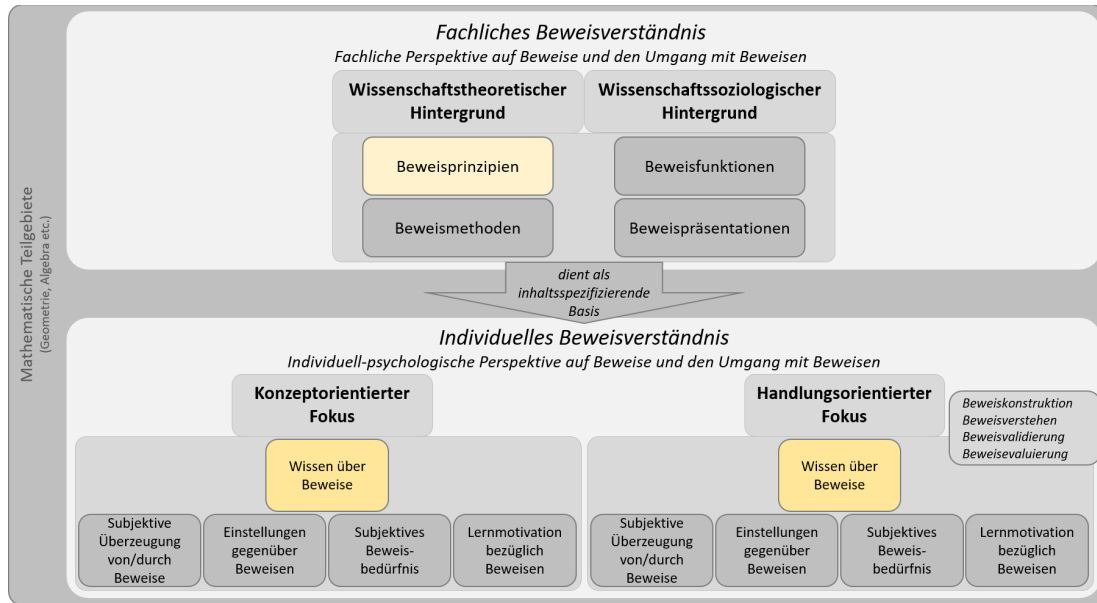


Abb. 3.9: Die gelb markierten Aspekte des individuellen Beweisverständnisses sind diejenigen, die im Rahmen der Studie 3 fokussiert und in dieser Arbeit betrachtet wurden. Die hellgelbe Markierung im fachlichen Beweisverständnis macht deutlich, dass die fokussierten Aspekte des individuellen Beweisverständnisses inhaltlich spezifiziert wurden.

Auch in dieser Studie wurden die Testinstrumente zur Erfassung des Wissens über Beweisprinzipien genutzt, die bereits in den Studien 1 und 2 eingesetzt wurden.

Wie bei Studie 1 und 2 sei darauf hingewiesen, dass sich die Darstellung in dieser Arbeit auf die für den dritten Artikel relevanten Aspekte fokussiert. Weitere Daten, die im Rahmen der Studie 3 erhoben wurden (Informationen zu weiteren Aspekten des individuellen Beweisverständnisses der Schülerinnen und Schüler sowie zu ihren Fertigkeiten bei der Beweiskonstruktion und Informationen der Lehrkräfte zum Beweisen im Mathematikunterricht in den Lerngruppen), werden an dieser Stelle nicht systematisch dargestellt, sind jedoch für weiterführende Analysen und Veröffentlichungen außerhalb des Promotionsvorhabens vorgesehen.

Es ergeben sich die folgenden spezifizierten Forschungsfragen für Studie 3, die in Abb. 3.10 dargestellt sind.

Studie 3		
Theoretisches Rahmenmodell – Beweisverständnis		
FF1	Ist das theoretische Rahmenmodell zum Beweisverständnis geeignet, um Veränderungen des individuellen Beweisverständnisses* empirisch zu zeigen?	3.1
Individuelles Beweisverständnis im Kontext von Lerngelegenheiten und Prädiktivität		
FF2	Ist eine gezielte Förderung einzelner Aspekte eines individuellen Beweisverständnisses* von Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 9 mithilfe einer Kurzintervention zum mathematischen Beweisen möglich?	3.2

Abb. 3.10: Die zwei Forschungsfragen, die in Studie 3 fokussiert wurden und als Spezifizierung der übergreifenden Forschungsfragen dieser Arbeit zu sehen sind (vgl. Abb. 3.1). Die Kennzeichnung (*) weist darauf hin, dass die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses in dieser Studie die in Abb. 3.9 markierten Aspekte umfasst. Der grundsätzliche Gedanke der übergreifenden Forschungsfrage bleibt bei der Spezifizierung erhalten.

Die Ergebnisse der Studie 3 sprechen zwar dafür, dass das individuelle Beweisverständnis der Lernenden auch nach der Kurzintervention noch gering war, jedoch zeigte sich zumindest beim handlungsorientierten Wissen über Beweisprinzipien ein signifikanter Unterschied zwischen der Interventions- und der Kontrollgruppe und somit ein signifikanter positiver Effekt der Kurzintervention. (FF1) Die in dieser Arbeit genutzte Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses auf Basis des theoretischen Rahmenmodells scheint demnach geeignet zu sein, Veränderungen des individuellen Beweisverständnisses der Schülerinnen und Schüler in der Klassenstufe 9 aufzuzeigen. (FF2) Darüber hinaus scheint eine gezielte Förderung des Wissens über Beweisprinzipien, und damit einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses, von Schülerinnen und Schülern der 9. Klassenstufe mithilfe einer Kurzintervention möglich zu sein. Obwohl das Wissen über Beweisprinzipien im Rahmen der Kurzintervention explizit adressiert wurde, bleibt unklar, warum sich beim konzeptorientierten Wissen über Beweisprinzipien kein signifikanter Unterschied zwischen den beiden Gruppen zeigt.

4 Studie 1: Beweisverständnis – Theoretisches Rahmenmodell und empirische Evidenz

Der folgende Beitrag wurde am 5. Januar 2023 bei einer internationalen Fachzeitschrift eingereicht und befindet sich im Begutachtungsverfahren. Einzelne Teile der in diesem Beitrag vorgestellten Ergebnisse der Studie 1 (vgl. Abschnitt 3.2) wurden bereits im Rahmen der **44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (2021)** begutachtet und in den Proceedings veröffentlicht (vgl. Sporn et al., 2021).

Describing Students' Understanding of Proof – A Holistic, Theory-based Framework and First Empirical Evidence on its Key Aspects

Femke Sporn, Daniel Sommerhoff, Aiso Heinze

Abstract

Proofs are of central importance in mathematics. Problems students have shown regarding proofs can be explained by a number of so-far disconnected aspects, each of which can be seen as part of an individual's understanding of proof. As a framework systematizing these aspects is currently missing, we present a first approach of a framework to characterize understanding of proof. While the focus of the framework is on individual's understanding of proof, it situates this within a disciplinary perspective on proof, which allows to describe development and enculturation processes. The framework further allows distinguishing key aspects of understanding of proof and can be used to systematize previous as well as future research in this field. Adding to this theoretical achievement, we present a study examining the understanding of proof of $N = 234$ beginning university students. The empirical data reflects key distinctions of the conceptual framework and underlines its structural validity.

4.1 Introduction

Proofs play a central role in mathematics as a proving discipline (Mariotti, 2006). Thus, learning the concept of proof and how to deal with proof in different situations are part of mathematics education in school and university (e.g., CCSSI, 2010; Hanna & Jahnke, 1996; KMK, 2012; NCTM, 2000). In this respect, activities such as constructing, comprehending, validating, and evaluating proofs are central (Selden & Selden, 2017). Consequently, one expects learners to build an understanding of the concept of mathematical proof and handling proof during their education, for example including knowledge about the criteria for accepting mathematical proofs, beliefs about the role proofs play in mathematics, or other aspects requiring consideration in the context of proof. While multiple studies address various such aspects of what could be considered as an understanding of mathematical proof and handling proof, currently neither an umbrella term for this understanding exists, nor a theory-based framework describing different aspects of this understanding and their structural relation. To denote this understanding of the concept of mathematical proof and of handling proof, we suggest the term **individual's understanding of proof** (cf. Sporn et al., 2021), which one can consider essential for the successful learning and dealing with mathematical proofs over and above the influence of mathematical content knowledge and other individual prerequisites such as problem solving skills (e.g., Chinnappan et al., 2012; Ufer et al., 2008).

While an **individual's understanding of proof** refers to an **individual-psychological perspective on proof and handling proof**, it becomes clear that deciding what is an adequate or sufficient understanding of proof (e.g., correct knowledge or favorable beliefs) does not depend on a single person but on a shared definition of mathematical proof. Namely, an individual's understanding of proof depends on what is considered as a proof within the social context (i.e. course, research community of a mathematical subarea) and thus a **disciplinary perspective on proof and handling proof**. This perspective allows to describe a **disciplinary understanding of proof** including aspects used to describe and characterize proof and handling proof (e.g., principles or methods for mathematical proofs).

Against the background of this disciplinary perspective on proof and handling proof and despite a lacking universal basis for the description of acceptable mathematical proofs, one presumes learners build an individual understanding of proof during their

mathematical education. One expects, for example, that the quantity and quality of learning opportunities regarding proof and handling proof as well as their utilization by learners should impact students' understanding of proof and lead to interindividual differences in their understanding of proof, for example regarding their knowledge about different acceptance criteria for proof (Sommerhoff & Ufer, 2019). Knowing about such interindividual differences and their origins is particularly relevant at the beginning of university studies, as beginning university students start their studies with very different experiences of mathematical proofs due to differences in their prior mathematics education (Selden, 2012). The sociomathematical norms regarding the acceptance of proofs in school differ compared to those in university, as proof and handling proof in school is "focussing typically [on] understanding and explanation as underlying functions" (Hanna, 2000). Students in school thus gain an initial insight into the concept of proof, provided the teacher sufficiently represents the disciplinary perspective, so that this disciplinary perspective affects the lesson and the individual perspective. Gueudet (2008) summarized in her literature review that "[s]udies considering proof in many different countries have shown that only a minority of students are able to build consistent proofs at the end of high school." This issue becomes especially apparent during the transition from high school to university. Unlike in school, at university, proofs and dealing proofs come to the foreground and change their character as tools of evidence generation. Thus, individuals' understanding of proof becomes more important at university. For learners, the transition to higher education thus represents another major step of the enculturation process into mathematics as a proving discipline (Nickerson & Rasmussen, 2009).

The present paper first outlines, how an individual's and disciplinary understanding of proof can be conceptualized to create a coherent, theory-based and holistic conceptual framework for understanding of proof by using and systematizing previous research approaches and findings. Therefore, a description of a disciplinary understanding of proof as well as a description of an individual's understanding of proof will be presented and contrasted. Subsequently, the paper presents results of an empirical study with beginning mathematics university students, describing their understanding of proof. The corresponding data is used to validate core distinctions of the framework for understanding of proof. Finally, this data is adjoint by an evaluation of the relation of students' prior learning opportunities regarding proof and handling

proof and their individual understanding of proof, thus focusing on the development and individual differences in participants' individual understanding of proof.

4.2 Proof and Handling Proof

Proof and *proving* are terms often related to *argument* and *arguing* as well as *reason* and *reasoning*, each which leave some space for interpretation (e.g., Reid & Knipping, 2010). The definitions of the terms and possible distinctions between them are widely discussed (e.g., Aberdein, 2009; Balacheff, 2008; Manin, 2010).

Proofs (as objects – cf. Reid & Knipping, 2010) are considered as *the* source of evidence in mathematics, since new findings are only accepted as part of scientific mathematical knowledge with a correspondingly constructed proof (Hanna & Barbeau, 2010; Heintz, 2000). Based on an deductive view of mathematics (cf. Hilbert, 1931) a mathematical proof corresponds to a mathematical argument that is solely based on axioms, definitions, and already proven propositions and that uses deductive reasoning to show a desired assertion (Azzouni, 2004; Hilbert, 1931). Thus, a mathematical proof is associated with the goal of showing a proposition true given certain axioms (Hilbert et al., 2008). However, a generally accepted definition of “proof” does not exist in mathematical practice (Stylianides et al., 2017). Consequently, some leeway exists in mathematical practice regarding the required features of a proof, for example regarding the degree of formal strictness and completeness. Manin (2010, p. 48) emphasized “A proof becomes a proof after the social act of accepting it as a proof”. Thus, the acceptance of a concrete proof at least partially depends on the social community that reviews it (Hersh, 1993). It is thus difficult to establish criteria to decide in which cases a proof is complete and acceptable (Ko & Rose, 2022; Sommerhoff & Ufer, 2019). Associated sociomathematical norms and rules that make a proof acceptable or influence the acceptance of a mathematical proof are usually not codified or explicitly communicated. The learning of these sociomathematical norms is rather described as an enculturation process, e.g., through imitation and trial and error (Thurston, 1995). Stylianides (2007, p. 291) has explicitly integrated this aspect into his definition of proof by outlining three central aspects of evidence (*set of accepted statements, modes of argumentation, modes of argument representation*), each of which is socially influenced and not generally determined.

However, proofs as central elements of mathematics are not mere objects. Activities and corresponding situations that require handling proof are inevitably associated with them. **Handling proof** includes multiple different activities, most prominently proving (as a process - cf. Reid & Knipping, 2010) that is constructing a proof. Other associated activities are, for example, understanding, validating, or evaluating proofs (Mejía-Ramos & Inglis, 2009b; Selden & Selden, 2017).

4.3 Mathematics Education Research on Proof and Handling Proof

Proof – and argumentation in general – are included in curricula worldwide (e.g., CCSSI, 2010). They play an important role in mathematical education in schools and universities. Based on this “exposure” to argumentation and proof throughout education, enculturation processes take place, introducing learners to proofs. For example, criteria for accepting a proof are introduced and negotiated in class (even if often implicitly), so that learners form their individual norms for proof and handling proof. During this enculturation process, the teacher takes a mediating role as a representative of the mathematical community to ensure that the acceptance criteria negotiated in class are based on those of mathematics as a discipline (Yackel & Cobb, 1996). Since learners are repeatedly confronted with argumentative challenges (and thus also with proofs and dealing with proofs) in school, they can be expected to form an **individual understanding of proof**¹⁸ in the course of mathematics education. This understanding is oriented, through the influence of teacher-initiated learning opportunities in class, towards the **disciplinary understanding of proof**. Still, Selden (2012) points out that students’ individual understanding of proof can be considered as inadequate and thus identified as a problem area.

Prior research focused on different aspects of importance when examining an individuals’ understanding of proof at different grade levels and in different contexts, often highlighting students’ difficulties (Healy & Hoyles, 1998; Heinze et al., 2005; Lin, 2000; Reiss et al., 2001; Selden, 2012). The following sections summarize results of previous research. These allow conclusions on different **aspects of individual’s**

¹⁸ Based on the distinction between proof (as object) and handling proof (as process), it would be – strictly speaking – necessary to use the terms *disciplinary/individual’s understanding of proof and handling proof*. However, for reasons of readability, we will only use the term *proof* in the following, implicitly always also including handling proof. How this has been considered in the operationalization of this study can be seen in the instruments.

understanding of proof, which are then integrated into a conceptual framework for an individual's understanding of proof.

4.3.1 Learners' Differences and Difficulties Regarding Their Understanding of Proof

In the UK, Healy and Hoyles (2000) showed that students have problems correctly validating proofs. The surveyed rather high-achieving students showed difficulties in constructing and validating proofs and inadequate views of the role of proof within mathematics. For example, the surveyed students preferred the empirical verification of statements. The study also revealed that students accepted ways of proof presentation even if they are unacceptable from a disciplinary perspective. The fact that even incorrect "proofs" were preferred indicates that students often use surface characteristics to judge the correctness or value of proofs. The (partial) acceptance of such (actually unacceptable) forms of proof presentation indicates that the students differ in terms to their **knowledge about proof**.

In prior research on an individuals' understanding of proof, the focus was most often on their knowledge about proof. Heinze und Reiss (2003), for example, described learners' methodological knowledge and identified problems students have in this context. This methodological knowledge is considered part of students' meta-mathematical knowledge which includes three aspects: the proof scheme (a proof requires deductive inferences), the proof structure (a proof is structured in a way that it proves the assertion based only on premises and prior knowledge), and the chain of conclusions (all steps within a proof sufficiently follow prior steps). Research on **acceptance criteria for validating mathematical proof** (Sommerhoff & Ufer, 2019) or the aforementioned study of Healy und Hoyles (2000) provide implicit information about individuals' knowledge about proof and thus give insights to an individuals' understanding of proof, also showing differences and problems. Further, there has been research on the relevance of knowledge about proof for learners' success in dealing with proof (Chinnappan et al., 2012; Moore, 1994; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2008). Reiss et al. (2001), for example, could show this in the context of their research on upper secondary school students' methodological knowledge as a prerequisite for the proof understanding in geometry classes.

Harel und Sowder (1998) describe different **proof schemes** learners have towards the end of schooling: "A persons' proof schemes consists of what constitutes ascertaining

and persuading for that person” (Harel & Sowder, 1998, S. 244). They distinguish three classes of proof schemes (external, empirical, and analytic) which again allow evaluating the knowledge about proof implicitly. It appears that learners’ conceptions of the nature and function of mathematical proofs (Stein, 1988) and of the nature of valid mathematical argumentation do not necessarily coincide with those of the scientific mathematic community. This illustrates the necessity to distinguish between a disciplinary and individual-psychological perspectives on proof, and shows that there are differences between individuals with respect to their understanding of proof. Students’ conceptions of the nature and function of mathematical proofs provide information about their individual understanding of proof and may also be reflected in their subjective convictions. **Subjective conviction of proof** can be described as a different kind of quality than knowledge about proof: While one might know about the concept of proof and, for example, different functions of proof, it is still another step to be convinced of these. For example, a person may know that a proof shows that a statement is generally valid, but is still not sufficiently convinced of an acceptable proof and wants to see additional examples to be sure about the generality (Fischbein, 1982). Dawkins und Weber (2017), for example, argue that students’ who do not perceive or accept mathematical values regarding proof will find proof confusing and problematic. Besides subjective conviction of proof, conviction about the validity of a proposition in the sense of the conviction function of proof (**subjective conviction by proof**) have to be considered (Bieda & Lepak, 2014; Weber & Mejía-Ramos, 2015). In this regard, De Villiers (1990) pointed out that the conviction of a proposition’s validity exists before the construction of a proof and often even serves as a motivation to construct a proof. In particular, school students, but also university students, are often already convinced of an assertion as long as it is given by a lecturer or other authority figure (e.g., Harel & Sowder, 2007).

Based on this short review of proof-related research, it becomes clear that the investigation of an individual’s understanding of proof is possible from different points of view. These diverse results indicate that an individual’s understanding of proof is formed in the course of mathematical education and is influenced by various aspects, which in turn allow insights in individuals’ understanding of proof.

4.3.2 Individuals' Understanding of Proof in the Course of Mathematical Education

Learners are repeatedly confronted with argumentation and proof in the course of their mathematical education (CCSSI, 2010). The developmental formation of an individual's understanding of proof taking place in this context can be considered as a complex process involving multiple dependencies and developments of the aspects of an individual's understanding of proof mentioned before. However, especially for the development also other aspects may play a role, such as affective-motivational aspects regarding proof, so that research focusing on these aspects can give additional insights into individuals' understanding of proof (A. J. Stylianides & G. J. Stylianides, 2022).

In addition to the knowledge about proof formed in the course of mathematical education, learners also develop **beliefs about proof** that can serve as an indication of individual's understanding of proof (Stylianou et al., 2015). Disadvantageous beliefs about proof are suggested to hinder effective mathematics teaching and learning (e.g., Stylianou et al., 2015; Weber & Mejía-Ramos, 2014). Individual's beliefs about proof seem to play an important role regarding individual's understanding of proof in general, how it is formed in the course of mathematical education and, further, regarding successful learning and dealing with proof. (Weber & Mejía-Ramos, 2014). Another aspect repeatedly highlighted in prior research as relevant regarding students' motivation to construct a proof, and thus in learning or dealing with proofs, is learners' **need for proof**. It is defined as the subjective need a person experiences to, for example, construct or validate a mathematical proof (Winter, 1983). It can positively and constructively influence whether and how learners engage with mathematical proofs and thus positively influence their learning or dealing with mathematical proof (Dreyfus et al., 2012; Zaslavsky et al., 2012). Moreover, students' **learning orientation about proof** refer to the learners' motivation to learn more about proof and can also contribute to students' successful learning regarding mathematical proofs (Hemmi, 2006). Both students' need for proof and their learning orientation about proof can give insights to and be expressions of their understanding of proof. In particular, both can be supporting or impeding the further development of student's understanding of proof.

Further, the formation of individual's understanding of proof in the course of mathematical education can be affected by external factors – such as **learning opportunities regarding proof** (provided by the teacher or other sources). The fact

that these learning opportunities may vary from teacher to teacher, class to class, school to school and between school and university and may also be used differently by learners, can lead to differences in learner's understanding of proof (Cabassut et al., 2012). Even though proof is only one of many contents in school mathematics, from the university's point of view it is all the more important that students already build up an adequate understanding of mathematics as a proving discipline in school mathematics lessons. Thereby, difficulties arising in connection with proofs can already be avoided in school and it also facilitates the transition to mathematics studies.

Summarizing the research above, it becomes clear that (i) a distinction between disciplinary and individual's understanding of proof is needed, (ii) different aspects connected to a person's understanding of proof can be identified and some empirical research has already been conducted on these aspects (regarding proof), (iii) difficulties and differences among learners (both at school and at university) with respect to these aspects (and thus with respect to their understanding of proof) become apparent and can be linked to different learning opportunities, and (iv) this individuals' understanding of proof can further explain problems or successes for learning and dealing with mathematical proofs. Thus, it is evidentially worthwhile to investigate learners' understanding of proof both cross-sectionally and regarding its longitudinal effects in future research. However, the success of such research is contingent to a unified framework for understanding of proof, bringing together, bridging, and systematizing previous research.

4.4 Understanding of Proof – A Conceptual Framework

In the absence of a unifying framework for understanding of proof that systematizes previous research and can be used as basis for research on individual understanding of proof, both cross-sectionally and longitudinally, we propose the following **conceptual framework for understanding of proof** (Fig. 4.1) as a starting point for future research. It includes many important aspects covered by prior research and introduces central distinctions to systematize these for future research, allowing a more systematic and reflected approach to understanding of proof.

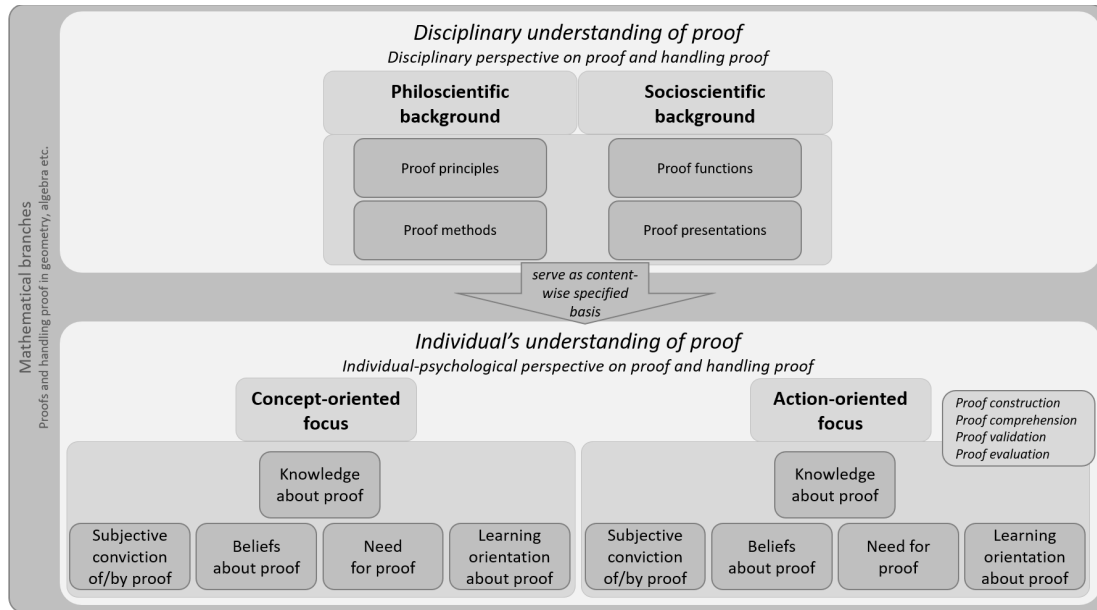


Fig. 4.1: Conceptual framework for understanding of proof.

Mirroring the discussion in the previous sections, a central feature of the framework is the distinction of an **(i) individual-psychological perspective on proof and handling proof**, which characterizes individual's understanding of proof, and a **(ii) disciplinary perspective on proof and handling proof**, which focuses on normative and social aspects of proof (Sporn et al., 2021). The necessity of considering the latter perspective when thinking about the prior has already been highlighted above, as an increasing alignment of an individuals' understanding of proof with the disciplinary perspective on proof can generally be assumed desired by mathematics education. Both perspectives need to be considered keeping in mind the different mathematical branches (geometry, algebra etc.), as they may naturally impact the notion of proof.

4.4.1 Disciplinary Perspective on Proof and Handling Proof

The upper part of Fig. 4.1 presents central aspects of the disciplinary perspective on proof, as described in prior literature (Dawkins & Weber, 2017; De Villiers, 1990; Nelsen, 1993). It represents what is considered a proof against a **philoscientific background**, which characterizes proofs within mathematics with a theoretical normative perspective, and a **socioscientific background**, which characterizes proofs within scientific-mathematical practice from a sociological perspective (Hamami & Morris, 2020). Although both backgrounds are clearly different, they are obviously interrelated: scientific practice is oriented along theoretical justified values and norms which may differ in different mathematical branches. Conversely, the characteristics

of theoretical norms for mathematical proofs can also be influenced by scientific practice (at least in the long run), as for example highlighted in different notation systems or the acceptance of specific types of proofs (e.g., constructive vs. non-constructive proofs, computer-based proofs) in mathematical history (e.g., Kleiner, 1991).

Research literature on proof include (at least) four central aspects of interest regarding a disciplinary understanding of proof: **proof principles**, **proof methods**, **proof functions**, and **proof presentations**.

Proof principles include generally necessary conditions describing what is (in-)valid for a mathematical proof independently of a specific type of proof. Proof principles, for example focus on proof steps und how these proof steps are linked and arranged to a proof, thus for example, the adherence to a chain of conclusion in a proof or the agreement on accepted and non-accepted types of arguments for a valid mathematical proof (Hanna & De Villiers, 2012a; Hanna & Jahnke, 1993; Hanna & Knipping, 2020; Knuth et al., 2019). In contrast, **proof methods** outline general proof construction methods, which per se allow the construction of an acceptable proof. These include, for example, direct proof, indirect proof (e.g., by examples or contradiction), and complete induction, but also other methods of proof, depending on the context (e.g., Vito, 2020). While less important against a philoscientific background, **proof functions** and **proof presentations** are of high relevance within the mathematical community, that is against a socioscientific background. For example, different proof functions have been proposed in the past, including not only the verification function, but also conviction, explanation, communication, systematization, and discovery (De Villiers, 1990). Proof presentations, relating the *degree of formalization* (generic, operational, and formal proof) and *proof representation* (for example paradigmatic, algebraic, drawing, content, iterative proof approaches, Leiß & Blum, 2006), are relevant from a social perspective. For example, in some social settings or communities and branches an operational proof or a drawing proof approach is accepted as a valid mathematical proof.

Overall, it is clear that the characterization of an “acceptable” mathematical proof is a deep mathematical question that is mostly answered normatively against a philoscientific background, but is modulated within mathematical communities based on a socioscientific background, and can to a great extend be described based on the

four aspects mentioned above. Although differences may be subtle, this still leads to non-neglectable differences in the evaluation of proofs (see Inglis et al., 2013; Sommerhoff & Ufer, 2019) leading to possibly different individual's understanding of proof.

4.4.2 Individual-Psychological Perspective on Proof and Handling Proof

While a disciplinary perspective on proof is necessary to examine normative and social aspects of proof, an individual's understanding of proof is often relevant, for example when trying to explain that individual's success in constructing proofs. Thus, understanding of proof also needs to be considered following an **individual-psychological perspective on proof and handling proof**, represented in the lower part of Fig. 4.1.

As pointed, multiple aspects examined regarding mathematical proofs in prior research can be assigned to an individual's understanding of proof: **knowledge about proof, subjective conviction of/by proof, beliefs about proof, need for proof, and learning orientation about proof** (e.g., Harel & Sowder, 1998; Healy & Hoyles, 2000; Stylianou et al., 2015). However, when reviewing prior research, it becomes clear that these aspects have been examined – while not systematically distinguished so far – using two different foci. Several studies have investigated aspects of individual's understanding of proof with an **action-oriented focus** (e.g., Healy & Hoyles, 1998; Heinze & Reiss, 2003). These studies focus on specific mathematical action situations regarding proof, for example, the construction or validation of a specific proof. A person's understanding of proof is then inferred by analyzing how the person is coping with this action situation (Fig. 4.2 shows such an action-oriented item used by Healy & Hoyles, 1998, focusing on proof validation).

Arthur, Bonnie, Ceri, Duncan and Eric were trying to prove whether the following statement is true or false: When you add any 2 even numbers, your answer is always even.			
Ceri's answer: Even numbers are numbers that can be divided by 2. When you add numbers with a common factor, 2 in this case, the answer will have the same common factor. So Ceri says it's true.			
Circle whether you agree, don't know or disagree. Ceri's answer:			
	Agree	Don't know	Disagree
Has a mistake in it.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Shows that the statement is always true.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Only shows that the statement is true for some even numbers.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Shows you why the statement is true.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Is an easy way to explain to someone in your class who is unsure.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

Fig. 4.2: Action-oriented item used by Healy & Hoyles (1998) focusing on validation of Ceri's purported proof (presentation of the item adjusted by authors).

This action-oriented focus can be distinguished from a **concept-oriented focus** which does not refer to a specific proof-related action situation but focuses, for example, on conditions for the acceptability of mathematical proof in general. An example for an investigation of an individual's understanding of proof with a concept-oriented focus are the interviews by Andersen (2018), for example including the question "What counts as an error or shortcoming in a proof?", or the test item from Sommerhoff et al. (2019), which asked students what is required for a proof to be acceptable.

The distinction between both foci relates primarily to the operationalization of the aspects. Thus, for example *action-oriented knowledge about proof* and *concept-oriented knowledge about proof* could be measured as two different foci on the same aspect. Moreover, each of the aforementioned aspects (i.e., knowledge about proof, subjective conviction of/by proof, beliefs about proof, need for proof, and learning orientation about proof) can be related to the four aspects of the disciplinary perspective on proof (i.e., proof principles, proof methods, proof functions, and proof presentation). These can be regarded as **content-wise specified aspects of individual's understanding of proof**, which combine the aspects from individual-

psychological perspective with the aspects from the disciplinary perspective – for example *beliefs about proof presentation*.

Finally, the two foci (content- and action-oriented) and the different content-wise specified aspects can be combined – for example *concept-oriented knowledge about proof methods* (e.g., “What steps are needed in induction proof?”) or *action-oriented learning orientation about proof presentations* (e.g., “I want to find out if this formal proof of the Pythagorean Theorem from our textbook can be visualized to make it easier to understand.”)

Given the structure of the framework for understanding of proof with its foci and (content-wise specified) aspects, the single aspects will be described in more detail in the following and each will be illustrated based on a concept- and action-oriented focus.

Knowledge about proof represents the cognitive part of individual’s understanding of proof and refers to any knowledge about mathematical proofs, for example regarding associated principles, methods, functions, and presentations. An illustrating (action-oriented) item is shown in Fig. 4.2. For example, action-oriented knowledge about proof principles was focused by Heinze and Reiss (2003). Students were asked to validate purported proofs (proof activity: proof validation), and these proofs showed errors regarding the proof principles (proof scheme, structure, chain of proof). Concept-oriented knowledge about proof principles is addressed in Andersen’s interview study (2018), for example, through the question “What counts as an error or shortcoming in a proof?”¹⁹.

Subjective conviction regarding proof as a further aspect of an individual’s understanding of proof includes a person’s *subjective conviction of and by proof*. *Subjective conviction of proof* refers to the conviction of when a mathematical proof is valid. A person may know, for example, that a proof has to include deductive arguments, but is not convinced that the deductive arguments are really sufficient to show a claim generally and still wants to see examples as additional evidence. For example, concept-oriented subjective conviction of proof principles can be measured

¹⁹ Even though the difference could be considered marginal, this statement can be rephrased as “What counts as an error when proving?”. In contrast to the original, which focuses on proof, this version focuses on proving as a process and thus on handling proof. The slight change in wording would thus lead to an item addressing concept-oriented knowledge about handling proof principles.

by evaluating the statement “I am convinced that a mathematical proof can only be valid if the proof steps logically succeed each other.” Action-oriented subjective conviction of proof principles, for example when validating Ceri’s purported proof (see Fig. 4.2), can for example be measured by evaluating the statement “I am convinced that this purported proof can only be valid if the proof steps logically succeed each other”. In comparison, *subjective conviction by proof* means that a specific proof convinces a person of the validity of a proof of a mathematical statement in the sense of the conviction function of proofs (De Villiers, 1990; Weber & Mejía-Ramos, 2015). With a concept-oriented focus, it could be evaluated using the statement “A proof convinces me only if it proves the assertion of a proposition completely (i.e., down to the smallest detail)”, whereas action-oriented subjective conviction by proof can be surveyed, for example when validating the Ceri’s purported proof (see Fig. 4.2), by rating the statement “This purported proof convinces me that the sum of two even numbers is always even”.

While **beliefs about proof** are generally acknowledged as an important aspect of what we term an individual’s understanding of proof, thus far no final consensus in the mathematics education literature exists regarding the definition of beliefs itself (Leder et al., 2002). We define beliefs about proof as individual sociomathematical norms of what is relevant for proof. In various studies, individuals were interviewed under the same term “belief”, however varying in the conceptualization, for example focusing on the concept of proof, the functions of proof, and its relevance for school mathematics education, as well as their personal prior experience with proof and their affinity for proving (e.g., Stylianou et al., 2015; Weber & Mejía-Ramos, 2014). While it is not possible to classify beliefs as (in)correct, it is possible to determine if a person’s beliefs differ from the disciplinary perspective and might therefore be disadvantageous (Schoenfeld, 2016). Similar to the operationalization of knowledge shown in Fig. 4.2, concept-oriented beliefs about proof function can be examined by evaluating the statement “A proof of a mathematical statement can help to understand the statement more fully.” Action-oriented beliefs about proof can be assessed by rating the statement “Validation from this purported proof helps to understand the statement more fully.” in the context of validating Ceri’s purported proof in Fig. 4.2.

As mentioned above beliefs about proof as well as need for proof and learning orientation about proof can be particularly relevant for the formation of an individual’s understanding of proof and thus provide further information on an individual’s

understanding of proof. We conceptualize **need for proof** as the subjective need a person experiences to, for example, construct or validate a mathematical proof (Winter, 1983). As such, it is a specific, subjective belief for verification and certainty. It can be examined concept-oriented (evaluation of the statement “When I see a proof of a mathematical statement, I feel the need to understand it.”) as well as action-oriented (evaluation of the statement “How strong is your need to construct a proof to the statement *The sum of three consecutive natural numbers is divisible by 3?*”). Need for proof thus relates to a subjective need for proof, rather than an objective need for proof, i.e. the fact that mathematical theorems or assertions in general require a proof.

Learning orientation about proof refer to the learners’ motivation to learn more about proof (Hemmi, 2006) and is thus by definition relevant for developmental perspectives on understanding of proof. Concept-oriented learning orientation about proof can be examined by evaluating statements like “I would like to be better at proof construction.” Taking a look at Ceri’s purported proof again (Fig. 4.2), by rating the statement “The specific way this proof was constructed motivates me to learn more about it.”, action-oriented learning orientation is addressed.

4.5 Research Questions

Prior research on the teaching and learning regarding mathematical proof has addressed various aspects that can be regarded as part of an individual’s understanding of proof. Pursuing the goal of describing students’ understanding of proof and its development, the presented framework (see Fig. 4.1) systematically integrates several of the most discussed aspects. In particular, it includes central perspectives used in prior research (disciplinary vs. individual-psychological perspective; concept- vs. action-oriented) as well as central constructs (knowledge about proof, beliefs about proof, etc.) to create a systematic description of the construct, which at the same time is instrumental for the assessment of an individual’s understanding of proof.

To go beyond the theoretical description of the framework for understanding of proof, we used this framework to analyze beginning university students’ understanding of proof. The overall goal of this empirical study was to examine whether the framework can be adequately operationalized by questionnaire and test items to satisfactorily characterize beginning university students’ understanding of proof and to examine

whether empirical data mirrors central distinctions within the framework. Here, mainly the part of the framework covering the individual-psychological perspective on proof is relevant. Due to the complexity of the framework and the large number of combinations of different foci and (content-wise specified) aspects, we restricted the study to some key features, which provide first evidence on the framework's utility. We aimed to characterize beginning university students' understanding of proof and to analyze empirically central distinctions asserted in the framework regarding these key features (RQ1).

RQ1.1 How can beginning university students' understanding of proof be characterized?

Hypothesis:

H1.1 Based on multiple prior research results, which document university students' difficulties with proof (e.g., Sommerhoff, 2017; Stylianou et al., 2015), we expected that beginning university students' understanding of proof would be moderate to low.

RQ1.2 How can key distinctions and relations *within* and *between* concept- and action-oriented aspects of the conceptual framework for understanding of proof be empirically confirmed?

Hypothesis:

H1.2 We expected that concept-oriented and action-oriented foci can be empirically distinguished.

More specifically, for beginning university students, we expected that

- (i) the correlations *between* corresponding concept-oriented and action-oriented aspects of students' understanding of proof would be moderate.

- (ii) the correlations of aspects *within* the concept-oriented focus of students' understanding of proof would tend to be higher than those *within* the action-oriented focus.

Beginning university students are reported to differ in their individual's understanding of proof, since they begin their studies with different prior experiences based on different individual schooling histories (e.g., Hemmi, 2006; Weber & Mejía-Ramos, 2014). However, there is no substantial evidence on the relation between learning opportunities in secondary education and individuals' understanding of proof. Thus, the relation between learning opportunities in school regarding proof and individual's understanding of proof was examined (RQ2) to verify to what extent differences in students' individual understanding of proof can be captured.

RQ2 To what extent are differences in students' understanding of proof revealed by different learning opportunities regarding proof in school?

Hypothesis:

- H2 Based on prior research, which shows differences in beginning university students' understanding of proof (e.g., Hemmi, 2006; Weber & Mejía-Ramos, 2014), we expected a positive correlation between learning opportunities regarding proof and their understanding of proof. Yet, we expected a rather weak correlation, due to the high number of other, possibly confounding variables.

4.6 Method

4.6.1 Sample and Procedure

To answer the research questions, $N = 234$ (59.0 % m, 39.7 % f, 0.9 % div, 0.4 % NA) beginning students from two German universities enrolled in a degree program with a focus on mathematics (i.e., mathematics, computer science) were surveyed in an online study. Participants were surveyed prior to participating in any university courses. All students were asked to provide **demographic data** and details regarding their **learning**

opportunities regarding proof. All other instruments focused on their **understanding of proof**. Due to time constraints, two alternate questionnaires were used to measure participants' understanding of proof (see Fig. 4.3). Both included the aspects **beliefs about proof** and **learning orientation about proof** with a **concept-oriented focus**. One questionnaire included the content-wise specified aspects **knowledge about proof principles** and **subjective conviction of/by proof principles** ($N = 116$; * in Fig. 4.3), while the other included the content-wise specified aspects **knowledge about proof methods** and **subjective conviction of/by proof methods** ($N = 118$; ** in Fig. 4.3). In both questionnaires, the aspects were measured taking a concept-oriented and an action-oriented focus. Action-oriented items focused on proof validation. Data collection took a total of 35 minutes.

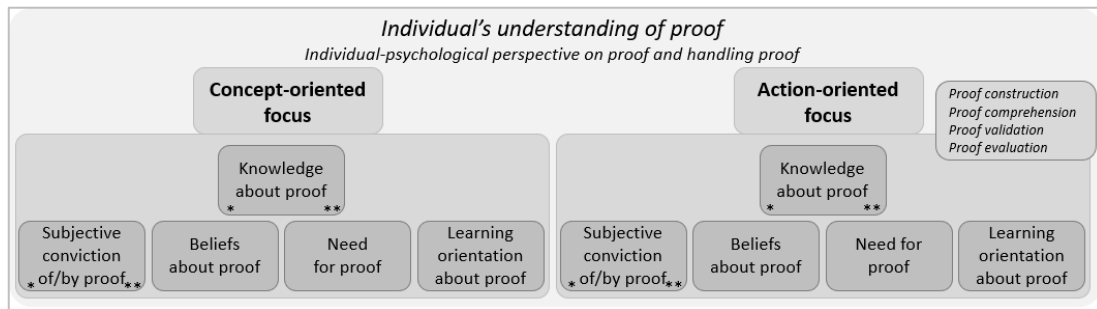


Fig. 4.3: (Content-wise specified) aspects of the conceptual framework for understanding of proof surveyed with the two questionnaires.
 *: concerning proof principles for one part of the participants ($N = 116$)
 **: concerning proof methods for the other part of the participants ($N = 118$).

4.6.2 Instruments

Students' Understanding of Proof

Table 4.1 gives an overview of the instruments used to assess the different aspects of participants' understanding of proof, including sample items and scale characteristics.

Table 4.1: Instruments employed for assessing participants' understanding of proof.

	(Content-wise specified) aspect of individual's understanding of proof	Number of items	Example	Scale	Cronbach's alpha
Concept-oriented focus	Knowledge about				
	proof principles*	16	<i>In a mathematical proof, proof steps must logically succeed each other.</i>	1 to 6 (Likert)	.83
	proof methods**	6	<i>Could the described approach be the basis for a correct mathematical proof?</i>	0 / 1 (dichot.)	.03
	Subjective conviction of/by				
	proof principles*	8	<i>I am convinced that a mathematical proof can only be valid if the proof steps logically succeed each other.</i>	1 to 6 (Likert)	.64
	proof methods**	6	<i>How convincing do you find the approach described?</i>	1 to 6 (Likert)	.05
	Beliefs about proof	16	<i>Proofs are particularly important for mathematics as a scientific discipline.</i>	1 to 6 (Likert)	.72
	Learning orientation about proof	7	<i>I would like to become better in constructing proofs.</i>	1 to 6 (Likert)	.91
Action-oriented focus	Knowledge about				
	proof principles*	6 purported proofs	<i>Is the purported proof a valid mathematical proof?</i>	0 / 1 (dichot.)	.51
	proof methods**	4 correct proofs	<i>Which proof method was used?</i>	MC 0 / 1 (dichot.)	.43

While some scales showed acceptable to good reliabilities, the scales concerning proof methods were excluded from further analyses as some scales did not reach a sufficient reliability.

Students' Learning Opportunities Regarding Proof in School

To assess participants' learning opportunities regarding proof in school (RQ2), they were asked to state how many proofs they had created themselves or treated in class during their time in school. Eleven central theorems based on the local (German) curricula had also been extracted and presented to the participants (e.g., theorem about the sum of angles in a triangle, binomial formulas, and theorem of the irrationality of $\sqrt{2}$). For each of the theorems, participants were asked to indicate how well they remembered a corresponding proof (see Table 4.2).

Table 4.2: Exemplary description of items for assessing participants' learning opportunities regarding proof in school (left column) together with the response options for each item (right column).

Scale	Range
Number of self-created proofs	○ 0 proofs
Number of proofs treated in lower secondary level	○ 1-2 proofs ○ 3-5 proofs
Number of proofs treated in upper secondary level	○ 6-10 proofs ○ 11-20 proofs
Please indicate to what extent you remember:	○ <i>I don't remember.</i>
• <i>Thales's theorem</i>	○ <i>I remember that the statement was discussed but not proven.</i>
• <i>Theorem of the irrationality of $\sqrt{2}$</i>	○ <i>I remember that it was proved.</i>
• ...	○ <i>I remember the proof.</i>

4.6.3 Statistical Analyses

The items for each (content-wise specified) aspect of participants' understanding of proof (see Table 4.1) were combined using mean scores. For action-oriented knowledge about proof principles, a sum score was calculated based on participants' judgements of the six purported proofs and rescaled to values from 1 to 6. This was done so that each score of the aspects of the understanding of proof ranges from 1 to 6 (actual range see Table 4.1).

In addition to the scores of each (content-wise specified) aspect, a composite score for describing students' understanding of proof were calculated. This composite score for students' understanding of proof is the mean of the mean-scores of all (content-wise specified) aspects of individual's understanding of proof. Since the content-wise

specified aspects knowledge about proof principles and subjective conviction of/by proof principles were only assessed for a subset of the participants, this composite score was only calculated for this group (* $N = 116$).

Characterization of Beginning University Students' Understanding of Proof (RQ1.1)

To answer RQ1.1 with H1.1, descriptive data for each (content-wise specified) aspect of participants' understanding of proof as well as the composite score for students' understanding of proof are presented.

Key Distinctions and Relations of the Conceptual Framework for Understanding of Proof (RQ1.2)

Pearson correlations *between* corresponding concept-oriented and action-oriented aspects were calculated (H1.2 (i)) to empirically confirm the distinction between a concept- and action-oriented focus (RQ1.2). This was done for the content-wise specified aspects knowledge about proof principles and subjective conviction of/by proof principles based on the available data. Further, Pearson correlations between the various aspects *within* either foci were analyzed. *Within* the concept-oriented focus, correlations between four (content-wise specified) aspects (knowledge about proof principles, subjective conviction of/by proof principles, beliefs about proof, learning orientation about proof) and *within* the action-oriented focus between two content-wise specified aspects (knowledge about proof principles, subjective conviction of/by proof principles) were calculated based on the available data (H1.2 (ii)). Correlations involving knowledge about proof principles or subjective conviction of/by proof principles could only be calculated for a subset of the sample due to data availability (* $N = 116$).

Students' Learning Opportunities Regarding Proof in School and their Understanding of Proof (RQ2)

To investigate the relation between students' learning opportunities in school regarding proof and their understanding of proof (RQ2), we first evaluated the number of self-created proofs and of proofs treated in lower or upper secondary level, which were combined into a mean score for treated proofs in secondary level at all. In addition, we evaluated how often participants selected the categories "I don't

remember”, “Remember discussion”, and “Remember proof/proven”²⁰ for the eleven theorems presented. For every single theorem, we evaluated if “Remember discussion” or “Remember proof/proven” was given as an answer. Finally, Pearson correlations were calculated between the six (content-wise specified) aspects of individual’s understanding of proof, the composite score for students’ understanding of proof, and the different frequencies for participants’ learning opportunities regarding proof in school as well as the score for remembering the proofs of the theorems (H2).

4.7 Results

4.7.1 Characterization of Beginning University Students’ Understanding of Proof (RQ1.1)

Table 4.3 shows the descriptive statistics of the six (content-wise specified) aspects of individual’s understanding of proof.

Table 4.3: Descriptive statistics for the (content-wise specified) aspects of individual’s understanding of proof.

(Content-wise specified) aspect of individual’s understanding of proof		<i>M</i>	<i>SD</i>	Range
<i>Concept-oriented focus</i>	Knowledge about proof principles*	4.49	0.67	2.63 - 5.94
	Subjective conviction of/by proof principles*	4.17	0.73	2.75 - 6.00
	Beliefs about proof	4.40	0.57	2.81 - 5.80
	Learning orientation about proof	4.47	1.04	1.29 - 6.00
<i>Action-oriented focus</i>	Knowledge about proof principles*	4.60	1.07	1.00 - 6.00
	Subjective conviction of/by proof principles*	3.80	0.85	2.00 - 6.00
	Composite score for individual’s understanding of proof* (Concept- and action-oriented knowledge about proof principles, subjective conviction of/by proof principles, concept-oriented beliefs about proof & learning orientation about proof)	4.29	0.56	3.09 - 5.79

Note: * for one part ($N = 116$) of the participants.

²⁰ The second response option (*I remember that the statement was discussed but not proven*) is referred to as “Remember discussion”. We use the term “Remember proof/proven” to refer to the combination of the two answers (*I remember that it was proved* and *I remember the proof*).

For all aspects, the mean value is above the theoretical scale mean of 3.5 and taking into account the standard deviations, most of the beginning university students achieve values above 3.5. Thus, the students show a tendency towards a moderate to good understanding of proof – in contrast to our hypothesis H1.1. In terms of knowledge about proof principles as one content-wise specified aspect of individual's understanding of proof, the participants scored descriptively higher for action-oriented knowledge about proof principles than for concept-oriented knowledge about proof principles, while the standard deviation for action-oriented knowledge about proof principles was far higher than for concept-oriented knowledge about proof principles. Ranges show that some participants achieved the highest possible value on the scale. The lowest part of the scale was not reached by any participant. In contrast, students scored higher for concept-oriented subjective conviction of/by proof principles than for action-oriented subjective conviction of/by proof principles with a slightly higher standard deviation for the action-oriented focus.

4.7.2 Key Distinctions and Relations of the Conceptual Framework for Understanding of Proof (RQ1.2)

Examining the distinction *between* a concept- and an action-oriented focus, correlations for knowledge about proof principles and for subjective conviction of/by proof principles were analyzed. Concept- and action-oriented knowledge about proof principles showed a significant positive, moderate correlation ($r = .34, p = .001$). This indicates that concept- and action-oriented knowledge about proof principles are positively related, but also substantially different. Similarly, concept- and action-oriented subjective conviction of/by proof principles showed a significant positive, small to moderate correlation ($r = .30, p = .001$). Both results are in line with H1.2 (i).

Results for the correlational analyses for relations *within* the two foci are shown in Table 4.4. While results highlight that correlations between the aspects *within* the two different foci were significant and positive, they are rather moderate in magnitude, indicating that the aspects are not only theoretically different but can also empirically be distinguished. For example, students' subjective conviction of/by proof principles and their knowledge about proof principles, both regarding an action-oriented focus, showed a correlation of $r = .66$. Similarly, the correlation for both variables with a concept-oriented focus was $r = .59$. Hence, the relation within the concept-oriented focus was not higher than those in the action-oriented focus contradicting H1.2 (ii).

Table 4.4: Correlations within the two foci: between the four concept-oriented and the two action-oriented (content-wise specified) aspects of the individual's understanding of proof.

	<i>Concept-oriented focus</i>			<i>Action-oriented focus</i>
	Knowledge about proof principles*	Subjective conviction of/by proof principles*	Beliefs about proof	Knowledge about proof principles*
	r_{Pearson} (p)	r_{Pearson} (p)	r_{Pearson} (p)	r_{Pearson} (p)
Subjective conviction of/by proof principles*	.59 ($<.001$)			.66 ($<.001$)
Beliefs about proof	.42 ($<.001$)	.39 ($<.001$)		-
Learning orientation about proof	.36 ($<.001$)	.35 ($<.001$)	.62 ($<.001$)	-

Note: * for one part ($N = 116$) of the participants.

4.7.3 Students' Learning Opportunities Regarding Proof in School and Their Understanding of Proof (RQ2)

Table 4.5 shows the relative frequencies of participants' self-reported learning opportunities regarding proof in school. Slightly more than half of the participants (53.2%) cannot recall creating any proofs themselves during their time in secondary school (Grades 5-12/13). About 27.4% created three or more proofs themselves, partially even more than 20 proofs. While the most frequently chosen category for the number of treated proofs at the lower secondary level is zero (35.2%), the mode is three to five (28.3%) at the upper secondary level.

Table 4.5: Percentages of participants' answers concerning the number of self-created proofs and of treated proofs in lower or upper secondary level (N = 234).

Number of proofs	Scale	Self-created proofs (%)	Treated proofs in lower secondary level (%)	Treated proofs in upper secondary level (%)
0		53.2	35.2	21.0
1-2		19.3	27.9	23.6
3-5		13.7	20.2	28.3
6-10		7.3	11.2	15.0
11-20		3.4	4.3	9.0
more than 20		3.0	1.3	3.0

Further, the relative frequencies of participants' recollections of eleven theorems assumed to be treated in school indicate that 27.4% of all participants did not remember the proof for any of the eleven theorems or that the theorem was proven in school (see Appendix Table 4.7, last column). Only 2.1% of the participants remembered all eleven theorems with proofs. However, there are participants who (according to their self-reports) had few learning opportunities regarding proof and those who had many learning opportunities during their school education (see Appendix Table 4.7).

To investigate the *relation between students' learning opportunities regarding proof in school and their understanding of proof*, Pearson correlations between the composite score for individuals' understanding of proof and the number of self-created proofs as well as the mean number of treated proofs in secondary level were calculated. Results did not show significant correlations, neither for the relation between the composite score and the number of self-created proofs ($r = -.04$, $p = .710$) nor for the composite score and the mean number of treated proofs in secondary level ($r = .09$, $p = .340$). Data thus indicates that neither the quantity of proofs nor the self-creation of proof itself in school is *the* key factor for explaining differences in their understanding of proof.

A further, closer look on the *relation between the number of self-created proofs and the six (content-wise specified) aspects of individual's understanding of proof* is presented in Table 4.6. Here, concept-oriented learning orientation about proof is the only aspect that showed a significant positive, weak correlation with the number of self-created proofs. Thus, an even more detailed analysis did not reveal a significant

correlation between participants' learning opportunities regarding proof in school and their understanding of proof.

Table 4.6: Correlations between number of self-created proofs and the six single (content-wise specified) aspects of individual's understanding of proof.

	<i>Concept-oriented focus</i>				<i>Action-oriented focus</i>	
	Knowledge about proof principles*	Subj. conviction of/by proof principles*	Beliefs about proof	Learning orient. about proof	Knowledge about proof principles*	Subj. conviction of/by proof principles*
	$r^{\text{Pearson}}(p)$	$r^{\text{Pearson}}(p)$	$r^{\text{Pearson}}(p)$	$r^{\text{Pearson}}(p)$	$r^{\text{Pearson}}(p)$	$r^{\text{Pearson}}(p)$
Number of self-created proofs	.07 (.429)	-.08 (.372)	.10 (.147)	.19 (.003)	.09 (.338)	.09 (.358)

Note: * for one part ($N = 116$) of the participants.

4.8 Discussion and Outlook

There has been substantial research on what is considered an acceptable proof in scientific mathematics and in mathematics education and what can be described as mathematicians' and learners' understanding of proof (e.g., Dawkins & Weber, 2017; Sommerhoff & Ufer, 2019; Weber & Mejía-Ramos, 2015). Still, a theoretical conception of an understanding of proof does not yet exist. By systematizing (i) different aspects that can be assigned to an understanding of proof, both from a disciplinary and an individual-psychological perspective on proof (e.g., Hanna & Knipping, 2020; Stylianou et al., 2015), and (ii) incorporating important perspectives and distinctions from prior research (e.g., Dawkins & Weber, 2017; Hamami & Morris, 2020; Stylianides et al., 2017), that is *philoscientific* vs. *socioscientific* and *concept-* vs. *action-oriented*, we have outlined and described a **framework for understanding of proof**. Moreover, we have provided empirical data from beginning university students substantiating the main distinctions within the framework, thus adding empirical credibility to the framework.

The framework distinguishes between a **disciplinary and individual-psychological perspective on proof and handling proof**, thus allowing to describe both separately. The framework can serve as a basis for examining, for example, how an individual's understanding of proof is grounded in and aligned to a disciplinary understanding of

proof in the context of mathematics education and the enculturation into mathematics more generally. Within the disciplinary perspective on proof, the *philoscientific background* is used for characterizing proofs from a normative perspective while the *socioscientific background* takes into account the social context. Aspects important from a disciplinary perspective and thus when considering a disciplinary understanding of proof are, for example, proof principles and proof functions (e.g., Dawkins & Weber, 2017; Yackel & Cobb, 1996).

Within the individual-psychological perspective on proof, a systematic distinction is made between aspects of individual's understanding of proof (e.g., knowledge about proof, beliefs about proof) regarding actions in concrete proof situations (*action-oriented focus*) or more generally and detached from a specific action situation (*concept-oriented focus*). This distinction arose from different conceptualizations and operationalizations in prior research, which was not always systematically considered and in some cases led to an action-oriented measurement (i.e. in a concrete action situations - e.g., Healy & Hoyles, 2000; Heinze & Reiss, 2003) while possibly results on concept-oriented knowledge about proof were desired. The distinction of both foci mirrors prior findings that students may have certain general knowledge at hand but are not sufficiently able to use it for proofs and proving in specific action situations (e.g., Schoenfeld, 1989).

4.8.1 Discussion of Research Questions

The presented conceptual framework allows to include and systematize findings from prior research on proof in mathematics education (e.g., Stylianides et al., 2017; Stylianou et al., 2009; Stylianou et al., 2015; Zaslavsky et al., 2012) as a starting point and foundation for future research. Moreover, it allows to examine the relations between different foci and aspects related to students' understanding of proof as well as their distinctions. The presented empirical study exploits and supports these possibilities, by giving first empirical support for the distinctions in the framework regarding the individual-psychological perspective based on data from $N = 234$ beginning university students (RQ1.2). Further, results allow a first insight of students' understanding of proof regarding single aspects related to the framework (RQ1.1).

To validate the distinction *between concept- and action-oriented aspects* (RQ1.2), correlations between concept- and action-oriented knowledge about proof principles and between concept- and action-oriented subjective conviction of/by proof principles

were calculated. As expected, both *between* correlations were significant, yet only moderate (H1.2 (i)). This gives empirical support that concept- and action-oriented aspects of an individual's understanding of proof are empirically distinguishable. While data shows a moderate relation between concept- and action-oriented aspects, the causal link between both remains unclear. A correlation based on the assumption that the acquisition of concept-oriented knowledge about proof has a positive effect on action-oriented knowledge about proof and vice versa seems plausible. Yet, the strength of these effects and the two possible mechanisms (that is, how the more general concept-oriented knowledge supports the acquisition of action-oriented knowledge for concrete proof situations and how action-oriented knowledge acquired in concrete proof situation can be generalized to concept-oriented knowledge) should be explored in future studies. Reflection opportunities might be helpful for generalizing action-oriented knowledge to concept-oriented knowledge.

Besides investigating the distinction between concept-oriented and action-oriented foci, the relations between single aspects of individual's understanding of proof was examined *within the concept-oriented* and *within the action-oriented focus* (RQ1.2). Correlations of different (content-wise specified) aspects (i.e., knowledge about proof principles, subjective conviction of/by proof principles, beliefs about proof, and learning orientation about proof within a concept-oriented focus; knowledge about proof principles and subjective conviction of/by proof principles within an action-oriented focus) appeared highly significant and indicated rather moderate relations as predicted by hypothesis H1.2 (ii) (Table 4.4). Thus, it appears that the aspects of individual's understanding of proof that could be distinguished theoretically and that were taken from prior research (Heinze & Reiss, 2003; Stylianou et al., 2015), could also empirically be separated, while at the same time a moderate correlation shows that these aspects are related. The hypothesis (H1.2 (ii)) that the correlation between concept-oriented aspects is stronger than between action-oriented aspects is not reflected in our data.

Descriptive statistics of the mean scores of the investigated (content-wise specified) aspects of individual's understanding of proof (RQ1.1) show relatively high values indicating a moderate to good understanding of proof (Table 4.3). This result deviates from our hypothesis (H1.1) and might be considered an initially positive result, since an individual's understanding of proof has been described as relevant for successful dealing with proof (Chinnappan et al., 2012; Ufer et al., 2008). However, keeping in

mind that the instruments address content already known from Grade 8 and that many students have difficulties in dealing with proof, even these relatively high results might not be sufficient and higher values desirable.

The data on *students' learning opportunities regarding proof in school* showed that university students start their studies with little school-related proof experience. More than half of the beginning university students could not recall creating a single proof during their entire schooling. 35% of the participants did not get to know any proofs in lower secondary class. In upper secondary class, 21% stated that they had not encountered any proof (Table 4.5). The data given by the beginning university students on the eleven central theorems supports these results and suggest rather little experience with proofs in school – or at least that they could not connect the “proofs” they did to what they interpret as “proofs” now. However, there are also students who, according to self-report, had many learning opportunities regarding proof in school.

The *correlation between beginning university students' learning opportunities regarding proof in school and their understanding of proof* (RQ2) was expected to be positive (H2), as more learning opportunities should in principle advance students' understanding of proof. Yet, results show no significant correlation between the composite score for individuals' understanding of proof either for the number of self-created proofs nor for the number of handled proofs on secondary level. Data thus suggest that students' self-reported prior school experiences regarding proof only play a minor role in explaining differences in their understanding of proof and that the number of such learning opportunities may be less relevant. While students show differences in their understanding of proof, the self-reported learning opportunities regarding proof in school do not appear to be an explanation for this. Possibly, the differences in their understanding of proof (and especially the rather unexpected high values) in students' understanding of proof can rather be explained by selection effects.

4.8.2 Limitations and Future Research

Insights from prior research on aspects and relations related to an understanding of proof were used to provide a conceptual framework for understanding of proof as a common ground for future research (e.g., Dawkins & Weber, 2017; Healy & Hoyles, 1998; Stylianides et al., 2017; Stylianou et al., 2015). Thus, it can be used to interpret and connect existing and future research results (e.g., Bieda et al., 2022; Melhuish, Vroom, et al., 2022; A. J. Stylianides & G. J. Stylianides, 2022) and allows their

interpretation in the context of an understanding of proof. In this way, for example, conclusions on how and when mathematical education forms an individual's understanding of proof become possible. However, the framework also advances multiple questions about an individual's understanding of proof, its relevance, and, for example, indications for operationalization, which will have to be answered by future research. Overall, our empirical study supports the idea that the systematic conceptual framework for understanding of proof has the potential to provide new insights for research on individual's understanding of proof.

However, it remains open how the formation and development of an individual's understanding of proof can be supported (e.g., Melhuish, Fukawa-Connelly, et al., 2022). Our data indicates that the number of proofs integrated into mathematics classes in school does not have a strong influence on students' understanding of proof (RQ2). Still further and more reliable information on how proofs are integrated into mathematics classes (e.g., through more information provided by the teacher) would be interesting, for example to examine which possibilities students had to reflect on proofs or whether the implementation of proofs explicitly addressed certain aspects of a person's understanding of proof (Buchbinder & McCrone, 2020). In our study, the measure for learning opportunities regarding proof in school is based on students' self-reports, which is a clear limitation of the study. As these measures may be biased, in particular by aspects of students' understanding of proof (i.e. those who belief that proofs are more important might better recall constructing proofs in school), more objective measures to reconstruct prior experiences would be valuable but appear hard to realize. Given that some aspects of individual's understanding of proof have already been identified as predictive for proof competence (e.g., Chinnappan et al., 2012; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2008), it would now be interesting to examine how single aspects of individual's understanding of proof have a positive effect on learning and handling regarding mathematical proofs.

Another step in validating the proposed framework and examining students' understanding of proof is the extension to other (content-wise specified) aspects of individual's understanding of proof. Due to poor reliabilities in our operationalization of aspects concerning *proof methods* as a content-wise specified aspect, we only evaluated the content-wise specified aspects knowledge about proof and subjective conviction of/by proof concerning *proof principles*. The poor reliabilities of the omitted scales may be explained by more abstract formulations of the items or

insufficient knowledge of the participants, which may not have systematically discussed these in school. Still, finding better ways to measure aspects with a focus on proof methods will be a future step to substantiate the results of this study, in particular regarding the empirical confirmation of the main distinctions in the framework.

Regarding an action-oriented focus in particular, only the action situation of proof validation was considered in the context of the presented study. Future research should thus expand to further concrete actions such as proof construction or proof comprehension (cf. Selden & Selden, 2017). Results may yield a better understanding of an individual's understanding of proof in general.

Even though empirically investigating further correlations of (content-wise specified) aspects – especially within the action-oriented focus – would be interesting at this point. The results of this study already indicate that it makes sense for the individual-psychological perspective on proof to make a distinction between the considered aspects and foci. The results thus strengthen the distinction between concept-oriented and action-oriented focus, which was based on unsystematic differences in prior research but was so far never explicitly accounted for (e.g., Heinze & Reiss, 2003). Thus, for further research it appears important (in accordance with the research interest) to distinguish whether a concept- or action-oriented focus be addressed. Therefore, one should use more differentiated instruments to even more clearly distinguish between concept- and action-oriented focus.

4.8.3 Outlook

The conceptual framework for understanding of proof presented in this paper provides a first approach to systematize previous research as well as future research on this topic and can thus serve as a basis for future research. Of course, the single aspects assigned to the individual-psychological perspective (but also to the disciplinary perspective) on proof are not exhaustive and merely serve as an exemplary list of important aspects researched in the past. The aspects can (and should) be changed or adapted depending on research interests, demonstrating at the same time the strength of the modular framework as a basis for future research. For example, those interested in developmental aspects and how understanding of proof may support future learning regarding proof, may deliberately focus on learners' learning orientation about proof. Others may be more interested in the interplay between learners' concept- and action-oriented knowledge about proof and how they influence each other, without requiring

a deeper look into learners' learning orientation about proof, their need for proof, or their subjective conviction of/by proof. Finally, others may want to focus on participants' knowledge not concerning proof principles but rather different representations of proof and how they influence a learners' conviction.

In addition to such selective investigations and characterizations of the understanding of proof in different phases of mathematical education, it would be interesting to investigate in future research how an individual's understanding of proof develops in the course of mathematical education. Such a longitudinal perspective does not only mean examining and characterizing single (content-wise specified) aspects in different phases of mathematical education, but also investigating correlations between these aspects in the course of mathematical education and thus a description of a development of an individual's understanding of proof as a whole. Correlations of single aspects of understanding of proof in different phases of mathematical education could provide indications of how individuals' understanding of proof is formed, how the aspects are longitudinally contingent to each other and which steps require support. Such developmental steps may be explained with detailed information on learning opportunities regarding proof (maybe given by teachers or the used material in mathematics classes). Especially for beginning university students it would be interesting to investigate to what extent the change of focus on mathematics as a proving discipline and corresponding learning opportunities regarding proof during the course of study is reflected in their understanding of proof (Nickerson & Rasmussen, 2009). Ideas for fostering individual's understanding of proof could also be generated from such investigations of relations in the future, highlighting the overall wide range of possibilities for future research based on the framework for understanding of proof presented here.

Appendix

Table 4.7: Information on the selection frequency of either answer category based on the eleven presented theorems. (Percentages of participants' answers).

Selection frequency \ Answer categories for each theorem	<i>I don't remember.</i>	<i>I remember that the statement was discussed but not proven.</i>	<i>I remember that it was proved. & I remember the proof.</i>
0	11.5 %	17.9 %	27.4 %
1	12.4 %	12.0 %	11.1 %
2	15.4 %	12.0 %	11.5 %
3	15.4 %	9.8 %	9.8 %
4	10.3 %	8.1 %	6.8 %
5	12.8 %	7.3 %	9.4 %
6	5.1 %	12.4 %	3.4 %
7	5.1 %	7.3 %	6.8 %
8	1.3 %	3.4 %	5.1 %
9	3.4 %	4.3 %	3.0 %
10	2.1 %	3.0 %	3.4 %
11	5.1 %	2.6 %	2.1 %
Total	100 %	100 %	100 %

Note: The displayed relative frequencies indicate the percentage of all participants that answered to the items. Thus, the numbers per column add up to 100%.

5 Studie 2: Beweisverständnis von Schülerinnen und Schülern im Verlauf der mathematischen Ausbildung

Der folgende Beitrag wurde am 29. März 2023 bei einer internationalen Fachzeitschrift eingereicht und befindet sich im Begutachtungsverfahren. Einzelne Teile der in diesem Beitrag vorgestellten Ergebnisse der quasi-längsschnittlichen Studie 2 (vgl. Abschnitt 3.3) wurden bereits im Rahmen der **45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (2022)** begutachtet und in den Proceedings veröffentlicht (vgl. Sporn et al., 2022).

What do Students Learn About Mathematical Proof? A Quasi-Longitudinal Study Examining Students’ Understanding of Proof

Femke Sporn, Daniel Sommerhoff, Aiso Heinze

Abstract

Learning mathematics in school includes more than calculations and the application of rules, it also involves the basic features of mathematics as a proving science. Thus, an understanding of how evidence is generated in mathematics is addressed in different stages of mathematics education. Such an understanding of the concept of mathematical proof has been investigated - even if only partially systematically - in prior research for different groups of age. However, limited information exists to describe such an individual’s understanding of proof when it comes to learners of different grade levels. Furthermore, there is little information on whether differences in students’ understanding of proof across grade levels can be identified in secondary mathematics education. In a study with $N = 456$ students from grades 8 to 11, we systematically investigated two central aspects of students’ understanding of proof:

knowledge about proof principles and need for proof. The results for knowledge about proof principles suggest a significant but small increase of this knowledge in higher grades with a generally rather low level of knowledge about proof principles. Students' need for proof also appears low and not related to their grade level. Overall, the results suggest possible implications for both research and school mathematics practice and indicate the need to foster students' understanding of proof.

5.1 Introduction

Mathematical proofs, as well as proof-related activities, are fundamental for mathematics as a proving discipline. Accordingly, proofs also play a role in mathematics education. School mathematics curricula worldwide thus comprise mathematical proof and related proof activities (e.g., CCSSI, 2010). Secondary school students are therefore expected to develop what can be called an **individual's understanding of proof** comprising knowledge, beliefs, and affective-motivational characteristics which provide information about if an individual has an adequate view of the concept of proof and related activities, specifically also including evidence(-generation) in mathematics as a scientific discipline (Sporn et al., 2021). Prior research in mathematics education has already considered, conceptualized, and investigated single aspects of students' understanding of proof and repeatedly reported difficulties and intraindividual differences between learners of different ages and even for high-attaining students (Healy & Hoyles, 1998, 2000; Heinze & Reiss, 2003; Reiss et al., 2001). The development of an adequate understanding of proof is not only relevant to learn about mathematics as a deductive system and how evidence is generated in mathematics (e.g., Hanna & Jahnke, 1996; Stylianides, 2007) but also because there is empirical evidence that an adequate individual's understanding of proof improves performance in proof related activities (e.g., Chinnappan et al., 2012; Ufer et al., 2008).

While so far no empirical data exists focusing on learners' understanding of proof across grades, it can be hypothesized that such an individual's understanding of proof develops in the course of learners' mathematics education, as they are repeatedly confronted with argumentative challenges (including mathematical proofs and dealing with proofs) and thus evidence generation in mathematics (Harel & Sowder, 2007). Although mathematical statements are justified and proven within mathematics education, characteristics, functions, etc. of proofs often remain implicit or are not

explicitly addressed (Thurston, 1995). However, it is so thus far unknown (i) how an individual's understanding of proof can be described across different grades, (ii) whether and how an individual's understanding of proof indeed develops over time, and (iii) whether or how single aspects of an individual's understanding of proof are interrelated. These insights would help obtain a more comprehensive idea of learner's understanding of proof. Ultimately, it would be possible to develop approaches on how to explicitly foster this understanding or how it could contribute to the successful dealing with mathematical proofs.

To address these questions, an empirical study investigated $N = 456$ students in grades 8 to 11. Based on the conceptual framework for individual's understanding of proof, we examined the aspects knowledge about proof and need for proof, as two important elements of students' understanding of proof.

5.2 Proof in Secondary Education

Proofs and related activities such as constructing and reading proofs play a role in school mathematics education (CCSSI, 2010; NCTM, 2000). In [Country], learners are repeatedly (in the sense of the spiral principle) confronted with mathematical proofs regarding various mathematical content areas. The teaching and learning of mathematical argumentation, reasoning, and proof in particular begins especially from grade 7 onwards within Euclidean geometry (e.g., Heinze & Kwak, 2002; Stylianides, 2007). That there exists no generally accepted definition of a “proof”, despite agreement on basic requirements and criteria for a mathematical proof in mathematical practice (Heinze & Reiss, 2003; Selden & Selden, 2003), is accompanied by differences regarding formal strictness and acceptability of a proof, depending on mathematical areas and communities (e.g., Reid & Knipping, 2010; Stylianides et al., 2017).

This illustrates the partially social nature of norms in mathematics, sometimes called socio-mathematical norms, which for each community specify what holds as an acceptable mathematical proof (e.g., Harel & Sowder, 2007; Hersh, 1993; Manin, 2010; Stylianides, 2007). It is reflected, for example, in different acceptance criteria applied by school students, university students, and mathematicians for validating mathematical proofs (Sommerhoff & Ufer, 2019). For the notion of proof in school mathematics, Stylianides (2007, S. 291) has proposed a conceptualization which

highlights criteria for proofs need to be acquired by students in order to deal with proofs in the mathematics classroom:

„*Proof* is a *mathematical argument*, a connected sequence of assertions for or against a mathematical claim, with the following characteristics:

1. It uses statements accepted by the classroom community (*set of accepted statements*) that are true and available without further justification;
2. It employs forms of reasoning (*modes of argumentation*) that are valid and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community; and
3. It is communicated with forms of expression (*modes of argument representation*) that are appropriate and known to, or within the conceptual reach of, the classroom community.”

Learning about mathematical proofs in school and the prevailing socio-mathematical norms can be considered an enculturation process (McCrone & Martin, 2010). Within the social setting of a class community, the teacher specifies what is considered as a valid mathematical proof (Yackel & Cobb, 1996) and influences corresponding negotiation processes through the offered learning opportunities (Martin et al., 2005). Thus, the formation of learner’s understanding of proof can be influenced and shaped by the social setting and the acceptance criteria present there (Heinze & Reiss, 2009; Lampert, 1992). Consequently, differences in individual’s understanding of proof among learners of different grades or different types of schools can be expected to result from the influence of (again, differently socialized) teachers (Jones & Herbst, 2012; G. J. Stylianides & A. J. Stylianides, 2009).

5.3 Students’ Understanding of Proof

Throughout secondary mathematics education, learners are expected to develop an understanding of proof. We consider an individual’s understanding of proof as an integration of relevant individual dispositions, such as knowledge, beliefs, and affective-motivational characteristics, which provide information about the extent to which an individual has an adequate view of the concept of mathematical proof and related activities (e.g., Raman, 2001). This in particular includes information about the specific character of evidence(-generation) in mathematics as a discipline. Developing such an adequate individual’s understanding of proof corresponds to the basic

experience of learning about “mathematics as a deductive system”, which Winter (1995) highlighted an important goal of mathematics education. Students should gain authentic insight into mathematics as a discipline and how evidence is generated in this field (Hanna & Jahnke, 1996; Stylianides, 2007).

Although evaluating an individual's understanding of proof is challenging, as there is no absolute agreement when proof should be accepted and considered as adequate, a relatively high degree of coherence and agreement exists on basic criteria for a mathematical proof (e.g., Heinze & Reiss, 2003; Selden & Selden, 2003). Accordingly, a common core of requirements for an understanding of proof can be identified and systematically assessed. For example, during their mathematics education in school students should learn that providing some confirming examples for a (mathematical) statement is not sufficient to prove that statement.

Results of various empirical studies suggest that it is challenging for learners to develop an adequate understanding of proof: Chazan (1993), for example, showed that high school students studying Euclidian geometry accepted deductive proofs only as evidence for the figures presented to them. Similarly, Fischbein (1982) found that only a quarter of the students in his study accepted the correctness of a proof and – at the same time – indicated that further checks of the validity of the statements were not necessary. Harel and Sowder's (1998) research on proof schemes as well as Author's (2019) research on acceptance criteria for mathematical proofs also suggest that a substantial group of learners need to improve their individual understanding of proof. Further, various empirical studies have repeatedly shown that learners (of different age/educational levels) have problems dealing with proofs (e.g., Balacheff, 1988; Bell, 1976; Healy & Hoyles, 1998, 2000; Küchemann & Hoyles, 1999). For example, Senk (1985) and Usiskin (1987) showed that less than one-third of high-school geometry students were able to construct mathematical proofs. Heinze and Reiss' (2003) findings on students' methodological knowledge suggest learners differ regarding their understanding of proof. As someone who does not know that giving some examples is not sufficient for a valid mathematical proof probably will also have difficulties in constructing valid proofs. Hence, a lack of adequate understanding of proof is a possible explanation for such problems. Some empirical studies show that even in the higher education context learners show only moderate performance in the context of mathematical proof and its validation. This may indicate an inadequate individual's

understanding of proof (Inglis & Alcock, 2012; Ko & Knuth, 2013; Sommerhoff & Ufer, 2019; Weber, 2010).

To summarize, (i) developing an individual's understanding of proof is relevant for students to acquire authentic insight into mathematics as a proving discipline and (ii) students' inadequate ideas about proof shown in prior research may explain students' difficulties in dealing with mathematical proof problems.

Mathematical argumentation, reasoning, and proof are part of mathematics curricula worldwide (e.g., CCSSI, 2010). In class, students are recurrently or regularly confronted with the characteristic way evidence is generated in mathematics. One can assume they gradually form an understanding of proof. Learning opportunities offered to and used by learners in the context of mathematical proofs may develop an individual's understanding of proof (G. J. Stylianides & A. J. Stylianides, 2009; Vieluf et al., 2020). However, to the best of our knowledge we are not aware of empirical studies on the development of an individual's understanding of proof – or even single aspects thereof – in the course of secondary education.

5.3.1 Conceptual Framework for Understanding of Proof

Prior research addresses individual's understanding of proof by investigating individuals' knowledge, beliefs, or affective-motivational characteristics regarding proof in different proof-related activities and different mathematical branches (e.g., Harel & Sowder, 1998; Miyazaki et al., 2017; Stylianou et al., 2015). Sporn et al. (under review) developed a conceptual framework for students' understanding of proof, which systematically describes and distinguishes aspects related to understanding of proof. Essentially, the framework distinguishes between an *individual-psychological* and a *disciplinary perspective on proof and handling proof*²¹(cf. Fig. 5.1).

²¹ The distinction between *proof* and *handling proof* is based on the distinction between proof as object and handling proof as process (Reid & Knipping, 2010). It is included in the framework for completeness and ultimately plays a role in operationalizing the single aspects of an individual's understanding of proof.

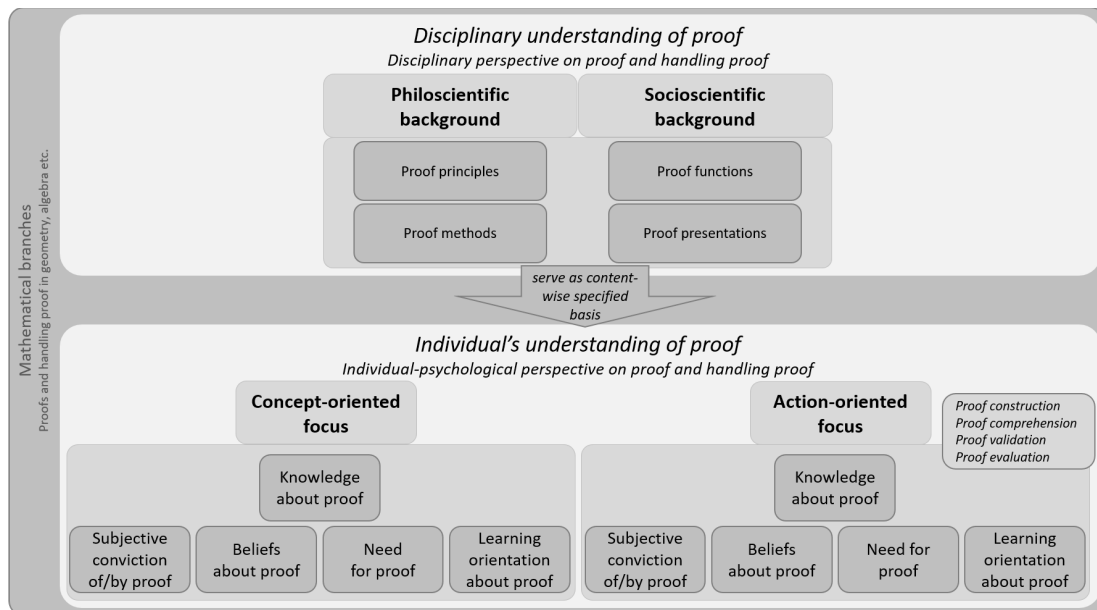


Fig. 5.1: Conceptual framework for understanding of proof.

An individual's understanding of proof comprises relevant individual dispositions which provide information about the extent to which an individual has an adequate view of the concept of proof and related activities (i.e., *knowledge about proof*, *subjective conviction of/by proof*, *beliefs about proof*, *need for proof*, and *learning orientation about proof*). Regarding this perspective, a central distinction considers the operationalization of these aspects related to an individuals' understanding of proof: aspects can be investigated with a *concept-oriented* as well as with an *action-oriented focus* (Sporn et al., 2021). Using a concept-oriented focus an individual's understanding of proof is investigated in the context of proof-related situations not referring to a specific proof that should be constructed or evaluated. Instead, students are asked for example for conditions for mathematical proofs in general. Comparatively, the action-oriented focus deals with an individual's understanding of proof in specific mathematical action in proof situations, for example the construction or validation of a specific proof. Prior research and empirical studies demonstrate the usefulness of this distinction between the two foci (Andersen, 2018; Healy & Hoyles, 1998; Heinze & Reiss, 2003; Schoenfeld, 1989). Vinner (1997) and A. J. Stylianides und G. J. Stylianides (2009) for example, have already suggested that such differences should be taken into account and empirical data also supports the usefulness to distinguish between both foci (Sporn et al., 2021).

As shown in Fig. 5.1, the individual-psychological perspective builds on a disciplinary perspective on proof and handling proof as this provides different content-wise specifications of an individual's understanding of proof by different disciplinary aspects (*proof principles*, *proof methods*, *proof functions*, *proof presentation*, cf. Sporn et al., under review). For example, the aspect *knowledge about proof* can be specified content-wise – for example concerning the disciplinary aspect *proof principles* as general necessary conditions describing what is (in-)valid independently of a special type of proof. A typical item to consider the content-wise specified aspect *knowledge about proof principles* could be: “*Giving a single example is not always sufficient to prove a mathematical statement.*” (cf. Sporn et al., under review).

5.3.2 Knowledge About Proof

Knowledge about proof is possibly the most important aspect of an individual's understanding of proof. Based on the above framework, it comprises all knowledge related to the concept of proof and related activities, especially including knowledge about proof principles, proof methods, proof functions, and proof presentations. Andersen (2018, S. 236) investigated knowledge about proof with a concept-oriented focus by asking “*What counts as an error or shortcoming in a proof?*”, and thus related to proofs in general without reference to a specific action situation. In contrast, Heinze und Reiss (2003), for example, investigated action-oriented knowledge about proof using specific mathematical action situation (proof validation) for their measurement. The methodological knowledge studied by Heinze und Reiss (2003) addresses certain rules and principles that have to be fulfilled for valid mathematical proofs. In the light of the framework, it can thus be described as knowledge about proof principles. Healy and Hoyles' (1998) research on knowledge about proof, among other things, addressed different proof functions as well as proof presentations. Summarizing, knowledge about proof can be and has already been considered both concept- and action-oriented but also with different content-wise specifications.

Different investigations of learners' knowledge about proof showed students' difficulties at different ages (e.g., Healy & Hoyles, 1998; Heinze & Reiss, 2003; Reiss et al., 2001; Stylianou et al., 2015). For example, students' inadequate action-oriented knowledge about proof principles is mirrored in the study by Recio und Godino (2001) where the majority of participants used empirical arguments when constructing a proof. As knowledge about proof has been identified as one prerequisite for, for

example, validating and constructing proofs (Heinze & Reiss, 2009; Pfeiffer, 2011; Selden & Selden, 2003) and thus, is named as important for mathematical argumentation and proof skills in many studies, (e.g., Chinnappan et al., 2012; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2008), having means to foster students' knowledge about proof is essential (Sommerhoff et al., 2021). The results of the study by G. J. Stylianides und A. J. Stylianides (2009), for example, suggest that it is possible to explicitly foster knowledge about proof principles. Overall, mathematics education in various learning opportunities address knowledge about proof, although it is probably addressed more implicitly in proof activities (Thurston, 1995). However, detailed information regarding different learning opportunities and how they address knowledge about proof is missing.

5.3.3 Need for Proof

Another aspect considered in prior research and which is part of an individual's understanding of proof is **need for proof**. It refers to a person's subjective need, for example, to construct or validate a mathematical proof (Winter, 1983; Zaslavsky et al., 2012). Similar to knowledge about proof, learners' need for proof also mirrors their understanding of proof and can be operationalized both in an concept-oriented (*"When I see a proof of a mathematical statement, I want to understand it."*) and action-oriented manner (Presentation of a mathematical statement – *"How much do you like to deal with this statement and create a proof?"*). Buchbinder und Zaslavsky (2008) considered such a subjective need for proof with an action-oriented focus. In contrast, some prior research also covers an objective need for proof (Zaslavsky et al., 2012), although this is often closely connected to knowledge that a mathematical statement requires a proof (e.g., Kunimune et al., 2008) and thus can be characterized as knowledge about proof.

Prior research has shown that learners "rarely saw the point of proving, and/or the need to prove, especially when the statement to be proved was given as a ready-made fact without any discovery by the learners" (Hadas et al., 2000, p. 128). Zaslavsky et al. (2012) examined five categories of intellectual need that may drive learners to prove. Following a later study by Harel (2013), the intrinsic desire for certainty and causality favors the development of a subjective need for proof (cf. Zaslavsky et al., 2012). As learners not seeing any reason or need for proof is mentioned as a possible reason why they do not engage in proof (Balacheff, 1991), the development of a subjective need

for proof could be improved by an objective need for proof, and thus by knowledge that proofs of mathematical statements are needed to ensure the validity of the statement (i.e., a knowledge about proof functions) (Zaslavsky et al., 2012). Zaslavsky (2005) highlighted a possibility to create instructional situations in which an intellectual (subjective) need for proof arises intrinsically. According to Jahnke (1978) only people who also know how to satisfy a proof can develop a need for proof. Thus, knowledge about how a proof is constructed (i.e., knowledge about proof methods or proof principles) can also have positive effects on need for proof. Hadas et al. (2000), Zaslavsky (2005), and G. J. Stylianides und A. J. Stylianides (2009), for example, provide approaches to foster an insight into the need for proof (and thus the knowledge about proof functions and finally the subjective need for proof).

5.4 Research Questions

Prior research has already investigated single aspects that can be assigned to an individual's understanding of proof. The framework in Fig. 5.1 suggests a systematization of different such aspects on a consistent theoretical basis, which allows a more detailed perspective. For example, no clear distinction has been made in prior research between concept- and action-oriented aspects, although the need for this distinction has been emphasized (e.g., A. J. Stylianides & G. J. Stylianides, 2009; Vinner, 1997). Moreover, it is thus far unknown how students' understanding of proof can be described in the course of secondary education and whether it increases steadily based on relevant learning opportunities and the recurrent confrontation with mathematical proofs in the context of school mathematics education. Previous research on learners' understanding of proof also does not provide insights into the relations between the single aspects of an individual's understanding of proof, which would allow for an even more detailed description of an individual's understanding of proof. In particular, information regarding students' understanding of proof and relations between single aspects in the course of secondary education can suggest whether, when, and how individual's understanding of proof could and should be supported during mathematics education (Harel & Sowder, 2007).

The present study examines two specific aspects of students' understanding of proof and focuses on knowledge about proof principles and need for proof. Each is measured with an action- and concept-oriented focus, to connect to different operationalisation

in prior research and to exploratively investigate possible differences between both foci. The study is guided by the following research questions:

- RQ1 How do students' concept- and action-oriented knowledge about proof principles and students' concept- and action-oriented need for proof can be described in the course of secondary education?

Hypothesis:

- H1a Even though knowledge about proof is often not addressed explicitly (Thurston, 1995), students at different grade levels are confronted with mathematical proofs in their school mathematics education and corresponding learning opportunities (curricular embedding - e.g., CCSSI, 2010; NCTM, 2000). Thus, the expectation is that students' knowledge about proof increases in the course of secondary education.

- H1b The expectation is that students' need for proof increases in the course of secondary education, as the increase of knowledge about proof (H1a) may have a positive effect on students' need for proof (Zaslavsky et al., 2012).

- RQ2 How are students' knowledge about proof principles and students' need for proof related either with concept- or action-oriented focus in the course of secondary education?

Hypothesis:

H2 The expectation is a positive correlation between knowledge about proof principles and need for proof for two reasons for both concept- and action-oriented. First, a high subjective need for proof can have an impact on how students use learning opportunities for learning about proof, and an intensified use of learning opportunities for proof can increase knowledge about proof principles. Second, according to Jahnke (1978) a need for proof can only be developed if knowledge about how to satisfy this need also exists.

Finally, changes in the connection of knowledge about proof and need for proof in the course of secondary education deemed possible, as consequence of changes of single aspects of an individual's understanding of proof in the course of mathematics education (RQ1).

In this regard it would also be interesting to observe the relevance of knowledge about proof principles and need for proof on students' performance in constructing proofs as the (typically) central activity. However, a sufficiently reliable and valid assessment of proof construction skills is quite intricate when examining learners in different grades and also time-consuming regarding testing time. To get a first insight into the relation to proof construction skills we decided to ask students for a self-assessed ability to construct proofs matching given mathematical proof tasks. This led to an additional explorative research question:

RQ3 How do students' concept- and action-oriented knowledge about
(explorative) proof principles as well as their concept- and action-oriented need for proof relate to their self-assessed ability to construct proofs in the course of secondary education?

H3a Two findings are conceivable regarding the relation between students' knowledge about proof principles and their self-assessed ability to construct proofs:

- i) There is a positive correlation between students' knowledge about proof principles and their self-assessed ability to construct proofs, as having high knowledge about proof contributes dealing with proofs (Heinze & Reiss, 2009; Selden & Selden, 2003).
 - ii) There is no correlation between students' knowledge about proof principles and their self-assessed ability to construct proofs. While multiple issues could be conceived as cause for this, students may particularly be unaware of their lack of knowledge about proof principles and overestimate themselves in their ability to successfully construct a proof (Kruger & Dunning, 1999; Marco, 2021).
- H3b The suggestion is a positive correlation regarding the relation between students' need for proof and their self-assessed ability to construct proofs, as students with a high need for proof have often used learning opportunities regarding proof and are therefore more likely to believe they can successfully deal with proofs (Jahnke, 1978).

For each hypothesis concept- and action-oriented foci were not further distinguished, as prior research did not allow for specific hypothesis in this regard. Based on the existing evidence, we expected similar result patterns for both foci.

5.5 Method

5.5.1 Sample and Procedure

A total of $N = 456$ students from eight secondary schools (seven academic track schools and one comprehension school) were surveyed in a quasi-longitudinal study using an online questionnaire during mathematics class. Data collection was supervised by the mathematics teachers, who received a briefing beforehand and were unaware of the questionnaire items. The questionnaires consisted of various scales on single aspects of an individual's understanding of proof. Two partially overlapping versions of the questionnaire were administered randomly among the students in each

class due to time constraints. All students answered the items on concept- and action-oriented knowledge about proof principles ($N = 456$). About half of the sample ($N' = 231$) was also surveyed about their need for proof and their self-assessed ability to construct proofs. The other half received other items not related to the research question of this study (and not reported in this paper). Table 5.1 shows the distribution of participants regarding grades and questionnaire versions.

Table 5.1: Sample and questionnaire versions of grades.

Grade	N	(N')
8	139	(68)
9	122	(63)
10	72	(39)
11	123	(61)

Note: N' is a subsample that received questionnaires on the subscales need for proof and self-assessed ability to construct proofs.

5.5.2 Instruments

Table 5.2 provides information on the instruments used for the study.

Table 5.2: Instruments employed for data collection.

	Aspect	Number of items	Example	Scale	Cronbach's alpha
<i>Concept-oriented focus</i>	Knowledge about proof principles (coK)	18	<i>In a mathematical proof, proof steps must logically succeed each other.</i>	1 to 6 (Likert type)	.75
	Need for proof (coN')	9	<i>When I see a mathematical statement, I want find a proof to know if the statement is true.</i>	1 to 6 (Likert type)	.79
<i>Action-oriented focus</i>	Knowledge about proof principles (aoK)	6 purported proofs	<i>Is the purported proof a valid mathematical proof?</i>	<input type="radio"/> Don't know <input type="radio"/> Yes <input type="radio"/> No	.60
	Need for proof (aoN')	11 math. statements	<i>How much do you like to work with this statement and create a proof?</i>	1 to 10 (Likert type)	.93
	Self-assessed ability to construct proofs (SACP')	11 math. statements	<i>Do you have a spontaneous idea how you would proceed to prove the statement?</i>	dichotomous: <input type="radio"/> No <input type="radio"/> Yes	.78

Note: Aspects marked with ' only presented to subsample.

To assess concept-oriented knowledge about proof principles (*coK*) students were asked to evaluate 18 (in-)valid statements about proof principles (see Table 5.2 for an example). Reliability was acceptable. For action-oriented knowledge about proof principles (*aoK*), the students were presented six purported proofs, each of which disregarded certain proof principles (see Fig. 5.2 for an example).

Ben has to prove the following proposition:		
The sum of three consecutive natural numbers is divisible by 3.		
Ben's purported proof:		
I know this from school. Our textbook contained a proof that this is valid for every natural number. There, it was shown that:		
$3 + 4 + 5 = 3 + 3 + 1 + 3 + 2 = 3 \cdot 3 + 3$		
This proves the proposition.		
Is Ben's purported proof a valid mathematical proof?		
<input type="radio"/>	Yes	<input type="radio"/>
		No
		<input type="radio"/>
		Don't know

Fig. 5.2: Item example used in the questionnaire for measuring action-oriented knowledge about proof principles.

Reliability was low (but acceptable), as the purported proofs contained different mathematical content. Students scored 1 point if they correctly judged the purported proof as invalid. In both other cases, participants scored 0 points.

The items asking for knowledge about proof principles covered only those proof principles taught to the students in school as determined by the curriculum. For example, no attention was paid to specific formalities or completeness of rather minor aspects since differences in the socio-mathematical norms of the different schools are to be expected here. However, to address the issue, the concept-oriented knowledge about proof principles (*coK*) was surveyed on a 6-point Likert scale so that students had the opportunity to differentiate their agreement or disagreement by degrees.

Concept-oriented need for proof (*coN'*) was assessed using statements students evaluated on a 6-point Likert scale. Reliability was acceptable. For action-oriented need for proof (*aoN'*) 11 mathematical statements were presented and students had to indicate to what extent they would like to work on the statement and create a proof. Reliability was good. These 11 mathematical statements were further used to collect data on students' self-assessed ability to construct proofs (*SACP'*) by probing students with a corresponding dichotomous question (see Table 5.2 for examples).

5.5.3 Statistical Analyses

For action-oriented knowledge about proof principles (*aoK*) a sum score was formed based on the judgments of the six purported proofs (S_{aoK} ; range: 0 to 6). For concept-oriented knowledge about proof principles (*coK*), action-oriented need for proof (*aoN'*), concept-oriented need for proof (*coN'*), and participants' self-assessment to construct proofs (*SACP'*) items were combined to a mean score (S_{coK} , $S_{aoN'}$, $S_{coN'}$, $S_{SACP'}$) and rescaled to a range from 0 to 6 for better comparability with S_{aoK} .

To describe students' knowledge about proof principles and their need for proof in the course of secondary education (RQ1), the descriptive data of S_{aoK} , S_{coK} , $S_{aoN'}$, and $S_{coN'}$ were considered for each grade. Additionally, a linear regression was conducted with either S_{aoK} , S_{coK} , $S_{aoN'}$, or $S_{coN'}$ as dependent variable and grade as independent variable. To answer RQ2, Pearson correlations were calculated between S_{coK} and $S_{coN'}$ as well as between S_{aoK} and $S_{aoN'}$. For RQ3, Pearson correlations were calculated between each of the four scores of students' understanding of proof (S_{aoK} , S_{coK} , $S_{aoN'}$, $S_{coN'}$) and $S_{SACP'}$. The analyses for RQ2 and RQ3 were conducted for the whole sample as well as separately for each grade.

5.6 Results

(RQ1) Knowledge About Proof Principles and Need for Proof in the Course of Secondary Education

Table 5.3 shows descriptive results for knowledge about proof principles as well as need for proof for each grade, both with a concept-oriented and action-oriented focus. Data reveal a slight step-by-step increase in concept- and action-oriented knowledge about proof principles from grades 8 to 11. Results for students' need for proof do not show an increase, either for a concept- or for an action-oriented focus. Overall, the standard deviations for the action-oriented focus are higher than for concept-oriented focus.

Table 5.3: Descriptive statistics (Mean and SD) for knowledge about proof principles as well as need for proof both with concept- and action-oriented focus for grades 8 to 11.

Grade	<i>Knowledge about proof principles</i>				<i>Need for proof</i>			
	<i>Concept-oriented</i>		<i>Action-oriented</i>		<i>Concept-oriented</i>		<i>Action-oriented</i>	
	$M_{S_{coK}}$	SD	$M_{S_{aoK}}$	SD	$M_{S_{coN'}}$	SD	$M_{S_{aoN'}}$	SD
8	3.23	0.70	0.89	1.08	3.31	1.23	2.55	1.70
9	3.29	0.72	0.98	1.20	2.80	1.22	2.59	1.60
10	3.51	0.77	1.01	1.29	2.49	1.13	2.00	1.49
11	3.58	0.80	1.33	1.39	3.10	1.56	2.58	1.47
Total	3.39	0.76	1.05	1.24	2.98	1.22	2.48	1.58

Note: Possible values for each score from 0 to 6; some results are only based on the subsample N' .

Considerable variation both on the class and school level can be observed when examining students' results more closely by taking into account individual classes and

schools (see Table 5.6). For example, there are classes in 8th grade that show mean values similar to classes in 11th grade. In particular, class means of concept-oriented knowledge about proof principles (*coK*) in 8th grade ranged from $M_{S_{coK}} = 2.82$ to $M_{S_{coK}} = 3.73$ (these two classes are at the same school), while class means for 11th grade ranged from $M_{S_{coK}} = 3.26$ to $M_{S_{coK}} = 3.80$.

We conducted linear regressions for S_{aoK} , S_{coK} , $S_{aoN'}$, or $S_{coN'}$ as dependent variable and grade as independent variable to investigate students' knowledge about proof principles and their need for proof in the course of mathematics education. Results for action-oriented knowledge about proof principles (*aoK*) showed a significant positive impact of grade ($\beta = .133$, $p_{aoK} = .004$). Results for concept-oriented knowledge about proof principles (*coK*) also showed a significant positive impact of grade ($\beta = .196$, $p_{coK} < .001$). In contrast, the linear regressions for action-oriented need for proof (*aoN'*) and concept-oriented need for proof (*coN'*) did not show a significant impact of grade ($\beta_{aoN'} = -.026$; $\beta_{coN'} = -.080$). Both regression models are not significantly better than a Null-Model ($p_{aoN'} = .699$; $p_{coN'} = .229$).

(RQ2 & RQ3) Relations of Knowledge About Proof Principles, Need for Proof, and Self-Assessed Ability to Construct Proofs

Table 5.4 shows Pearson correlations between students' knowledge about proof principles and need for proof either with an action- or concept-oriented focus. Results reveal no significant correlation between both aspects of students' understanding of proof, either with a concept- or with an action-oriented focus (S_{aoK} , S_{coK} , $S_{aoN'}$, $S_{coN'}$). A significant negative correlation between concept-oriented knowledge about proof principles (*coK*) and concept-oriented need for proof (*coN'*) exists only for 10th grade. In 11th grade, there is a significant positive correlation between action-oriented knowledge about proof principles (*aoK*) and action-oriented need for proof (*aoN'*).

Table 5.4: (RQ2) Pearson correlations between S_{coK} and $S_{coN'}$, as well as between S_{aoK} and $S_{aoN'}$.

Grade	$S_{coK} - S_{coN'}$	$S_{aoK} - S_{aoN'}$
	$r_{\text{Pearson}}(p)$	$r_{\text{Pearson}}(p)$
8	-.06 (.635)	-.11 (.371)
9	.05 (.715)	.19 (.128)
10	-.36 (.031)	-.15 (.366)
11	-.03 (.836)	.29 (.022)
Total	-.08 (.219)	.06 (.354)

Note: Results are only for subsample N'

Table 5.5 shows Pearson correlations between the aspects of students' understanding of proof (S_{coK} , S_{aoK} , $S_{coN'}$, $S_{aoN'}$) and their self-assessed ability to construct proofs ($S_{SACP'}$). Results reveal a significant relation only for need for proof, both concept- and action-oriented. These positive correlations appear systematically across all grades. There is no correlation between students' knowledge about proof principles and their self-assessed ability to construct proofs. Only in 11th grade a single negative correlation with concept-oriented knowledge about proof principles becomes significant.

Table 5.5: (RQ3) Pearson correlations between the single aspects of students' understanding of proof (S_{coK} , S_{aoK} , $S_{coN'}$, $S_{aoN'}$) and their self-assessed ability to construct proofs ($S_{SACP'}$).

Grade	$S_{SACP'}$	$S_{coK} - S_{SACP'}$	$S_{aoK} - S_{SACP'}$	$S_{coN'} - S_{SACP'}$	$S_{aoN'} - S_{SACP'}$
	$M(SD)$	$r_{\text{Pearson}}(p)$	$r_{\text{Pearson}}(p)$	$r_{\text{Pearson}}(p)$	$r_{\text{Pearson}}(p)$
8	2.46 (1.68)	.02 (.855)	-.03 (.789)	.42 (<.001)	.68 (<.001)
9	2.74 (1.55)	-.20 (.132)	.12 (.335)	.44 (<.001)	.51 (<.001)
10	2.44 (1.57)	-.02 (.921)	.12 (.472)	.56 (<.001)	.52 (<.001)
11	3.10 (1.66)	-.31 (.016)	.22 (.096)	.29 (<.022)	.46 (<.001)
Total	2.70 (1.63)	-.11 (.099)	.12 (.062)	.40 (<.001)	.55 (<.001)

Note: Some results are only for subsample N' .

5.7 Discussion

While research has produced a great deal of evidence that students of all age have difficulties with the concept of mathematical proof and proof related activities (e.g., Harel & Sowder, 1998; Selden, 2012; Sommerhoff & Ufer, 2019), so far little evidence exists to uncover the development of relevant aspects of students' understanding of proof in the course of secondary education. However, this is needed to better understand how students acquire an understanding of proof, which in turn may be the basis for effective support.

Based on a conceptual framework for understanding of proof (Sporn et al., under review), we investigated students' understanding of proof in grades 8 to 11 in a quasi-longitudinal empirical study. Students' knowledge about proof principles and their need for proof were considered as two aspects of their understanding of proof, additionally distinguished in a concept- and action-oriented focus. Exploratively, also their self-assessed ability to construct proofs was examined to evaluate the relationship between students' understanding of proof and their self-assessed ability to construct proofs.

(RQ1) Knowledge About Proof Principles and Need for Proof in the Course of Secondary Education

Research has so far often used cross-sectional approaches to investigate (aspects of) individuals' understanding of proof. Longitudinal information or grade-level comparisons can provide more detailed insight into students' understanding of proof and information about when and how fostering students' understanding of proof would be useful. Therefore, one aim of this quasi-longitudinal study was to describe students' knowledge about proof principles and their need for proof from grades 8 to 11. Regression analyses with S_{aoK} , S_{coK} , S_{aoN} , or S_{coN} as dependent variable and grade as independent variable showed a significant positive impact of grade on students' knowledge about proof principles. As mathematical proof—and thus (at least) implicitly also knowledge about proof—was taught in the course of secondary education, a significant increase in knowledge about proof principles over four years of schooling was expected and can be confirmed (H1). However, an increase of less than one standard deviation in four school years (Table 5.3) can hardly be interpreted as a great instructional success, especially regarding the importance of argumentation and proof in curricula. At the same time, the analyses for individual classes provide evidence that even in lower grades students can acquire substantial knowledge about proof principles (see Appendix, Table 5.6). Still, based on results of previous research (e.g., Heinze & Reiss, 2003), knowledge as a prerequisite for proof-related activities (e.g., Ufer et al., 2008), and learners' known difficulties in dealing with proof (e.g., Healy & Hoyles, 1998; Selden & Selden, 2008) students' knowledge levels are likely not sufficient and thus require new ways of supporting students' understanding of proof. University students' problems in dealing with proofs strengthens this impression, as not even those students that chose mathematics as a subject at university show sufficient understanding of proof (Alcock & Weber, 2005).

Students' need for proof not increasing in the course of secondary education suggests that the learning opportunities for proof in grades 8 to 11 have no effect on the subjective need, for example, to construct or validate a mathematical proof. However, since no information is available on the quantity and quality of learning opportunities and how they were implemented by the teachers, an interpretation of the results with regard to the learning opportunities in mathematics classes is hardly possible and further investigations are up to future research. Findings from this study, however, may suggest that (i) there are currently no learning opportunities for developing students' need for proof in mathematics classes at all, (ii) existing learning opportunities are not adequate for establishing students' need for proof, or (iii) adequate learning opportunities are not used by students in a successful manner. Combining the findings for RQ1 showing a weak increase of students' knowledge about proof and no development of students' need for proof, we can conclude that further research on effective learning opportunities for both aspects of students' understanding of proof is necessary (e.g., Hadas et al., 2000; G. J. Stylianides & A. J. Stylianides, 2017). Especially the question whether such learning opportunities are more effective when integrated in proof construction or validation activities (i.e., action-oriented) or disentangled by taking a meta-perspective (i.e., concept-oriented) would be interesting (Zaslavsky, 2005).

As the abovementioned results are from a quasi-longitudinal study, conclusions about a longitudinal development as well as regarding causality are only possible to a limited extent. Even though there is an increase in knowledge about proof principles on average, the results per class and year show a high variance (see Appendix, Table 5.6). For this reason, an actual longitudinal study would be interesting, for example, to see whether lower grade classes with high knowledge hold their high entry level or improve even further in the course of time. Thus, even though longitudinal studies are difficult to conduct, it would be interesting to investigate how these aspects develop in a genuine longitudinal design for secondary school students. This could then be combined with a specific analysis of learning opportunities in these classes to even make conclusions in this regard.

(RQ2) Relations of Knowledge About Proof Principles and Need for Proof

Findings for the correlation between knowledge about proof principles and the need for proof for students in different grades first of all provides theoretical insights

regarding the distinctness of and relation between the aspects in the framework for individual's understanding of proof (Fig. 5.1). Thus, a more detailed description of learners' understanding of proof is possible which may be relevant for future investigations on individuals' understanding of proof as well as for ideas on how to foster students' understanding of proof in mathematics education.

Contrary to our expectation, results did not show a significant correlation between students' knowledge about proof principles and their need for proof (H2; Table 5.4). While this confirms that a distinction between the aspects in the framework is not only theoretically but also empirically reasonable, students' knowledge about proof principles and their need for proof are not related as expected. Still, it appears reasonable to assume that some students may only handle proofs and acquire corresponding knowledge because their teacher requires it and not because they see the necessity of a proof in practice (Balacheff, 1988). It may be possible that the subjective need for proof either (i) has less impact on knowledge about proof principles than expected or that (ii) the participants simply do not have such a strong need for proof that it could have an impact on knowledge about proof principles via the amount of well-used learning opportunities. Thus, it might be useful to foster the students' need for proof. Such support may be achieved by providing insight into the necessity of proof for mathematical statements, for example, via strengthening knowledge about proof functions (Zaslavsky et al., 2012). Possibly demonstrating the students that they can benefit from a proof (De Villiers, 1990), by being sure that the statement is true (verification), by understanding why it is true even if they were already convinced (explanation), or by systematising the mathematical content (systematisation). Thus, it would be interesting to see to what extent knowledge about proof functions is related to a subjective need for proof and whether fostering this knowledge also has an impact on the knowledge about proof principles or whether there is also a need for separately and explicitly fostering knowledge about proof principles. For this, it might be useful to conduct studies with different learning opportunities and their impact (G. J. Stylianides & A. J. Stylianides, 2017).

Again, the quasi-longitudinal study limits the interpretation of the results. The fact that there is no systematic relation but that there are significant correlations (both negative and positive) for individual grades should examine more closely in future studies. In combination with more detailed information on learning opportunities, explanations for correlations in individual grades might be found.

(RQ3) Self-Assessed Ability to Construct Proofs

An inadequate individual's understanding of proof may explain students' reported difficulties in dealing with mathematical proofs (e.g., Chinnappan et al., 2012; Sommerhoff, 2017; Ufer et al., 2008). We therefore exploratively investigated the relationship of the two investigated aspects of students' understanding of proof and their self-reported assessment regarding proof construction. As analyses are based on self-assessed ability to construct proofs and not on a specific proof construction test, results should be interpreted as exploratory. Findings for RQ3 do not reveal significant correlations between students' knowledge about proof principles and their self-assessed ability to construct proofs (Table 5.5). Results may thus suggest that students are unaware of their lack of knowledge about proof principles and overestimate their ability to construct proofs (H3a_{ii} - Kruger & Dunning, 1999; Marco, 2021). Regarding students' need for proof, however, individuals with a high need for proof also showed a high self-assessed ability to construct proofs (H3b). Individuals with a high subjective need for proof may already have constructed proofs more frequently and be more familiar with this activity (Balacheff, 1991), thus also resulting in a more realistic and positive self-assessment. Overall, results of the explorative RQ3 indicate that students' need for proof may be an important driver of their proof construction skills. In contrast, knowledge may still be necessary, but not sufficient for such skills. (Jahnke, 1978). However, both the students' need for proof and their self-assessed ability to construct proofs are not objective measures, thus the answer of the explorative third research question does not allow to conclude on students' actual proof construction skills and can only give a first indication of a positive relation.

5.8 Outlook

Overall, the presented study provides insights into secondary school students' understanding of proof in the course of their mathematics education from grades 8 to 11. Results suggest fostering students' understanding of proof is useful. Based on the findings, it seems promising conducting longitudinal studies to further explore the development of students' proof understanding. Longitudinal cross-lagged-panel-designs can provide evidence for causal relations, which was not possible in our study. Especially the role of learning opportunities should be considered to generate more specific ideas for fostering students' understanding of proof. Finally, the more single

aspects of the individual's understanding of proof are considered in the context of such studies, the more detailed statements can be made about the construct as a whole.

Appendix

Table 5.6: Descriptive statistics for (concept- and action-oriented) knowledge about proof principles for grades 8 to 11 considering school and class.

Grade	School	Class (N/N')	<i>Knowledge about proof principles</i>			
			<i>Concept-oriented</i>		<i>Action-oriented</i>	
			$M_{S_{coK}}$	SD	$M_{S_{aoK}}$	SD
8	1	C (15/8)	3.21	0.83	1.00	1.25
		E (15/8)	3.12	0.61	1.07	1.28
		F (15)	3.16	0.67	1.40	1.06
	4	A (3/2)	2.82	0.44	0.00	0.00
		B (21/10)	3.73	1.01	0.62	1.24
		D (23/12)	3.16	0.53	0.83	0.83
	5	B (8/5)	2.84	0.57	0.75	0.46
		C (13/6)	3.24	0.52	0.23	0.44
	7	A (22/11)	3.20	0.53	1.41	1.14
9	1	E (17/8)	3.03	0.60	1.00	0.94
		F (15/9)	3.62	0.67	1.00	1.56
		G (11/7)	3.18	0.45	1.45	1.70
	3	A (13/8)	3.17	0.81	0.92	0.95
		C (4/2)	3.67	0.68	0.67	0.82
	4	F (14/8)	3.44	0.65	1.00	1.11
		G (20)	3.30	0.72	0.70	1.03
		A (17/10)	3.28	0.76	0.89	1.23
	7	B (9/4)	3.15	1.04	1.33	1.41
10	1	M (14/8)	3.80	1.00	0.79	0.89
		Q (4/2)	3.35	0.39	0.50	0.58
	3	B (8/5)	3.23	0.66	1.50	1.31
	6	B (12/7)	3.13	0.82	1.75	1.36
	9	A (20/10)	3.60	0.49	0.95	1.40
		D (10/6)	3.77	0.83	0.58	1.44
11	1	T (15/8)	3.80	0.86	0.93	1.16
		U (15/7)	3.75	0.81	1.33	1.18
	2	A (10/6)	3.55	0.76	1.10	0.99
		B (18/9)	3.66	0.68	0.94	1.16
	3	C (12/5)	3.31	0.54	1.17	1.47
		D (17/8)	3.77	0.79	2.29	1.57
	5	A (12/6)	3.32	0.80	0.50	0.80
	6	C (12/6)	3.61	1.11	2.17	1.47
		D (11/6)	3.26	0.80	1.36	1.80

Note: Classes in which only single students were investigated are not included in this table.

6 Studie 3: Förderung des Beweisverständnisses von Schülerinnen und Schülern

In Abschnitt 6.1 wird zunächst das zur Förderung des Beweisverständnisses von Schülerinnen und Schülern der 9. Klassenstufe entwickelte Unterrichtsmaterial vorgestellt. In Abschnitt 6.2 werden die Ergebnisse der auf den Materialien aufbauenden quasi-experimentellen Studie 3 (vgl. Abschnitt 3.4) dargestellt und diskutiert. Diese wurden im Rahmen der **46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (2023)** begutachtet und akzeptiert und werden Ende Juli 2023 in den Proceedings veröffentlicht.

6.1 Intervention zur Förderung des Beweisverständnisses

Die gesamte Intervention zur Förderung des Beweisverständnisses erstreckte sich über das zweite Schulhalbjahr im 9. Jahrgang und fand unter Leitung der jeweiligen Lehrkraft im regulären Mathematikunterricht statt. Insgesamt umfasste die Intervention fünf Unterrichtsstunden à 45 Minuten, die auf vier Zeitpunkte im Verlauf des zweiten Schulhalbjahres des 9. Jahrgangs verteilt waren [T1 – T4]. Dabei umfasste der erste Zeitpunkt [T1] eine Doppelstunde, also 90 Minuten, und die drei anderen Zeitpunkte [T2 – T4] jeweils eine Unterrichtsstunde à 45 Minuten.

Der Fokus der Intervention lag, wie bereits in Abschnitt 3.4 dargestellt, auf der Förderung des Wissens über Beweisprinzipien, da die Ergebnisse aus Studie 2 – übereinstimmend mit der internationalen Forschungslage (Healy & Hoyles, 1998; Heinze, 2004) – zeigten, dass dieses Wissen bei Lernenden der Sekundarstufe schwach bis moderat ausgeprägt ist. Im Rahmen der ersten Doppelstunde [T1] erfolgte eine kurze Motivation und Einführung in das Thema *Beweise im Fach Mathematik*. Es wurde die Leitfrage „In welchen Fällen handelt es sich um einen gültigen mathematischen Beweis und in welchen nicht?“ entwickelt. Durch die Erarbeitung

einer Antwort [T2 – T3] sowie der finalen Beantwortung der Leitfrage [T4] wird das Wissen der Schülerinnen und Schüler über Beweisprinzipien explizit adressiert (Hemmi, 2006, 2008). Um zu ermöglichen, dass neues Wissen über Beweise in vorhandenes Wissen der Lernenden integriert wird, wurden in allen Unterrichtsstunden Möglichkeiten zur Diskussion und Reflektion von Kriterien für die Gültigkeit eines mathematischen Beweises und der Bedeutung des sozialen Diskursrahmens für die Gültigkeit mathematischer Beweise integriert (Davis, 2000; Linn et al., 2013). Darüber hinaus wurde darauf geachtet, dass die Ergebnisse zur Erarbeitung der Beweisprinzipien in den einzelnen Stunden explizit gesichert und wiederholt werden (Hmelo-Silver et al., 2007). Abb. 6.1 stellt den schematischen Ablauf der Intervention dar.

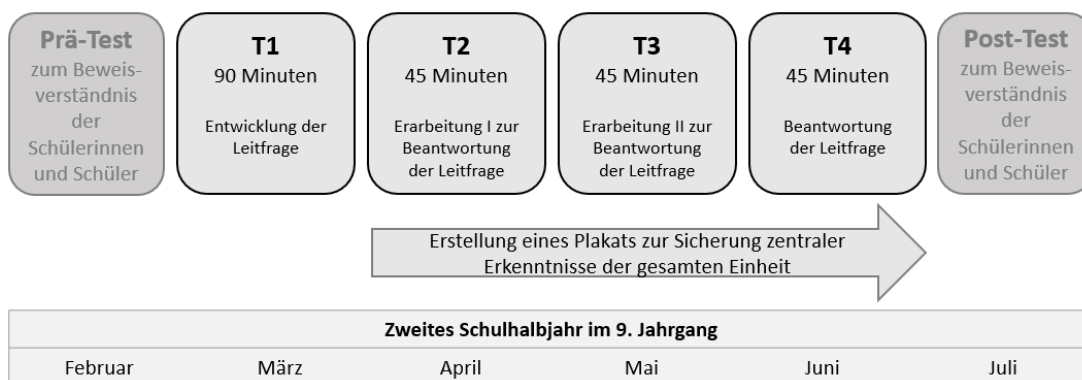


Abb. 6.1: Ablauf der Intervention zur Förderung des Beweisverständnisses.

Da die Unterrichtsstunden jeweils im Abstand von etwa vier Wochen über das Schulhalbjahr verteilt durchgeführt wurden, wurden die Ergebnisse der Unterrichtsstunden auf einem gemeinsamen Plakat festgehalten. Dafür wurde eine Aufbereitung der erarbeiteten Inhalte durch die Studienleitung vorgenommen: Die Ergebnisse der einzelnen Unterrichtsstunden wurden zunächst an der Tafel und auf den jeweiligen Arbeitsblättern der Unterrichtsstunde gesichert und im Anschluss an die Unterrichtsstunde an die Studienleitung weitergeleitet. Diese überprüfte die Inhalte zunächst auf fachliche Korrektheit und bereitete die Ergebnisse so auf, dass sie zu Beginn der folgenden Unterrichtsstunde in einer für die weiteren Inhalte anschlussfähigen Form auf dem Plakat gesichert werden konnten. So konnten die überprüften Inhalte genutzt werden, um einerseits zu Beginn einer jeweiligen Unterrichtsstunde an die Erkenntnisse der vorherigen Unterrichtsstunde zu erinnern und andererseits die neuen Inhalte daran anzuknüpfen. Das Plakat war während des

gesamten Schulhalbjahres (außer während des Post-Tests) für alle Schülerinnen und Schüler sichtbar im Klassenraum. Dies ermöglichte die beabsichtigte Nutzung der Erkenntnisse aus den Unterrichtsstunden der Intervention in anderen Unterrichtsstunden des regulären Mathematikunterrichts. So konnten die Lernenden die Inhalte der Intervention anwenden und üben und darüber hinaus die Sinnhaftigkeit dessen erfahren.

Da das Konzept mathematischer Beweise im Vordergrund stand und die Unterrichtsstunden über das Schulhalbjahr verteilt und nicht als geschlossene Einheit unterrichtet wurden, waren die mathematischen Inhalte, die in den Unterrichtsstunden der Intervention behandelt wurden, vielfältig. Es wurden sowohl Beweisversuche aus der Geometrie als auch aus der Arithmetik diskutiert.

Im Folgenden werden die im Rahmen der vier Zeitpunkte der Intervention [T1 – T4] verwendeten Materialien kurz vorgestellt, wobei die Lernziele sowie zentrale Entscheidungen begründet werden und damit auf die fokussierten Ansatzpunkte zur Förderung des individuellen Beweisverständnisses eingegangen wird.

[T1] Entwicklung der Leitfrage (90 min)

In der einleitenden Doppelstunde werden die Schülerinnen und Schüler zunächst an mathematisches Beweisen als Konzept herangeführt. Die Lernziele dieser Doppelstunde [T1] sind:

Die Schülerinnen und Schüler...

- 1.1 ...charakterisieren mathematische Beweise und deren Stellenwert in der Mathematik (*Wissen über Beweisfunktionen*).
- 1.2 ...markieren in einer mathematischen Aussage die Voraussetzungen und die Behauptung.

Zu Beginn der Unterrichtsstunde werden zwei verschiedene Begründungsansätze des Satzes „Die Summe der ersten n ungeraden aufeinanderfolgenden Zahlen ergibt n^2 .“ präsentiert (Abb. 6.2).

„Die Summe der ersten n ungeraden aufeinanderfolgenden Zahlen ergibt n^2 .“

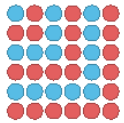
<p><u>Begründungsansatz 1</u></p> <p>Wir können die folgende Zeichnung betrachten:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Gezeigt sind die ersten 6 ungeraden Zahlen und es sind $6 \times 6 = 6^2$ Kreise gezeigt. Diese Zeichnung kann für ein beliebiges n erweitert werden.</p>	<p><u>Begründungsansatz 2</u></p> <p>Das gilt zum Beispiel für die ersten 2 ungeraden Zahlen, also 1 und 3, denn es gilt $1 + 3 = 4 = 2^2$.</p> <p>Auch für die ersten 5 ungeraden Zahlen gilt das, denn es gilt $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.</p> <p>Damit ist die Aussage auch für alle anderen n gezeigt.</p>
--	---

Abb. 6.2: Zwei verschiedene Begründungsansätze, die für den Einstieg in die Doppelstunde genutzt werden [T1].

Diese zwei Begründungsansätze sind so gestaltet, dass sie in der 9. Klassenstufe verständlich sind. Im Rahmen eines Unterrichtsgesprächs wird herausgearbeitet, dass es für eine mathematische Aussage mehrere Begründungsansätze geben kann. Begründungsansatz 2 kann nicht als gültiger mathematischer Beweis akzeptiert werden, da ein empirisch-induktives Argument genutzt wird. Die Lernenden erkennen, dass es Anforderungen für die Verifikation einer mathematischen Aussage gibt, die in einem mathematischen Beweis erfüllt sind. Anschließend werden mithilfe eines kurzen Videos verschiedene Funktionen von mathematischen Beweisen angesprochen. Nach zweimaligem Anschauen des Videos sollen die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung von Beweisen in der Mathematik und damit verschiedene Beweisfunktionen notieren und beschreiben. Die Schülerinnen und Schüler erkennen dadurch, dass Beweise verschiedene Funktionen haben können, wodurch eine Einsicht in die Notwendigkeit mathematischer Beweise und eine Motivation, sich mit mathematischen Beweisen auseinanderzusetzen, gestärkt werden soll (Jahnke & Ufer, 2015). Damit wird das Wissen der Lernenden über Beweisfunktionen adressiert (Lernziel 1.1). Darüber hinaus ist es möglich, dass dadurch auch affektiv-motivationale Aspekte, wie Einstellungen gegenüber Beweisen oder das Beweisbedürfnis der Schülerinnen und Schüler adressiert wird (Jahnke & Ufer, 2015; Zaslavsky et al., 2012). Bevor weiter über mathematische Beweise und deren Gültigkeit diskutiert werden kann, soll hinsichtlich der Begriffe *Voraussetzung* und *Behauptung* eine Klärung vorgenommen werden. Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten entsprechende Aufgaben zur Unterscheidung von Voraussetzungen und Behauptungen in mathematischen Aussagen (Lernziel 1.2 – Abb. 6.3). Damit ist

gesichert, dass diese Begriffe in den weiteren Unterrichtsstunden genutzt werden können.

<p>Aufgabenstellung</p> <p>1. Bestimme jeweils die Voraussetzung sowie die Behauptung der (eventuell falschen) Aussagen.</p> <p>Aussage 1: „Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl n ist ungerade.“</p> <p>Wenn _____ (Voraussetzung), dann _____ (Behauptung).</p> <p>Aussage 2: „Es gilt $1=2$, wenn man durch 0 teilen darf.“</p> <p>Wenn _____ (Voraussetzung), dann _____ (Behauptung).</p> <p>Aussage 3: „Jede durch 6 teilbare Zahl x ist gerade.“</p> <p>Wenn _____ (Voraussetzung), dann _____ (Behauptung).</p> <p>Aussage 4: „Jedes gleichschenklige Dreieck ABC ist gleichseitig.“</p> <p>Wenn _____ (Voraussetzung), dann _____ (Behauptung).</p> <p>2. Denke dir selbst eine mathematische Aussage aus und lasse deine Sitznachbarin/deinen Sitznachbarn die Voraussetzung und Behauptung deiner Aussage bestimmen.</p>
--

Abb. 6.3: Aufgaben eines Arbeitsblattes, die zur Klärung der Begriffe Voraussetzung und Behauptung genutzt werden [T1].

Auf der Grundlage, dass Beweise zentral für das Fach sind (*Beweisfunktionen*), nutzt die Lehrkraft drei verschiedene Begründungsansätze (zwei korrekte und einen fehlerhaften) für die Gauß'sche Summenformel, um zu motivieren, dass es Kriterien geben muss, anhand derer entschieden werden kann, in welchen Fällen es sich um einen gültigen mathematischen Beweis handelt und in welchen nicht. Damit ist die Problematisierung und damit auch die Leitfrage „In welchen Fällen handelt es sich um einen gültigen mathematischen Beweis und in welchen nicht?“ der Intervention motiviert, wobei die Erarbeitung solcher Kriterien in den folgenden Unterrichtsstunden der Intervention als Ausblick gegeben wird.

Ein weiteres Lernangebot zu mathematischen Beweisen stellt die Hausaufgabe dar. Hier sollen die Schülerinnen und Schüler einen Beweis konstruieren, wobei dieser in Form eines Beweispuzzles und damit unter Zuhilfenahme einzelner Beweisabschnitte zusammenzustellen ist (Abb. 6.4).

Aufgabenstellungen

1. **Erstelle** einen Beweis für die folgende Aussage:

„Die Innenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt 180° .“

Wähle dazu von den folgenden Aussagen/Argumenten die **aus**, die du benötigst, um einen korrekten Beweis zu erstellen und bringe sie in eine sinnvolle Reihenfolge. Du darfst auch deine eigenen Argumente benutzen.
Hinweis: Es müssen nicht alle Aussagen/Argumente verwendet werden.

Schreibe deinen Beweis auf der Rückseite sauber **auf**.

Zeichne in einem beliebigen Dreieck die zur Strecke AB parallele Gerade g durch C.	Dann ist $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma$ gerade die Innenwinkelsumme in dem Dreieck ABC.
Ich zeichne zwei beliebige Dreiecke, ein stumpfwinkliges und ein spitzwinkliges.	Zwischen g und der Geraden durch A und C liegt dann auch der Winkel α vor.
Auf die Geraden g, die Gerade durch A und B sowie die durch A und C kann der Wechselwinkelsatz angewendet werden.	Zwischen g und der Geraden durch B und C liegt dann auch der Winkel β vor.
Bezeichne mit α, β und γ die Innenwinkel eines Dreiecks ABC.	Für $n=3$ folgt mit der allgemeinen Formel für die Innenwinkelsumme $(3-2)180^\circ=180^\circ$.
Es ist $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.	Der Winkel auf einer Seite einer Geraden ist 180° groß.
Im Tafelwerk steht für n-Ecke die allgemeine Formel der Innenwinkelsumme, nämlich $(n-2)180^\circ$.	Auf die Geraden g, die Gerade durch A und B sowie die durch B und C kann der Wechselwinkelsatz angewendet werden.
Dass die Innenwinkelsumme nur etwa 180° beträgt, liegt an meinen Messungenauigkeiten.	Messe ich die Winkel in den gezeichneten Dreiecken und addiere ich die Werte, erhalte ich bei beiden Dreiecken ungefähr 180° .
Dein eigenes Argument.	

Abb. 6.4: Beweispuzzle als ein Teil der Hausaufgabe von [T1].

Darüber hinaus werden die Schülerinnen und Schüler gebeten, anzugeben, ob sie sich bei der Konstruktion des Beweises an gewissen Regeln orientiert haben, und zu notieren, worauf ihrer Meinung nach bei der Konstruktion mathematischer Beweise zu achten ist.

[T2] Erarbeitung I zur Beantwortung der Leitfrage (45 min)

Die Unterrichtsstunde beginnt mit der Erstellung des Plakats, um die Inhalte und Erkenntnisse aus [T1] sowie die zu beantwortende Leitfrage der Intervention zu wiederholen. Die in [T1] gesammelten und von der Studienleitung auf fachliche Korrektheit überprüften Beweisfunktionen werden auf dem Plakat gesichert. Zusätzlich wird die Unterscheidung in Voraussetzung und Behauptung mathematischer Aussagen als Wiederholung auf dem Plakat festgehalten. Auf dieser Grundlage wird die bereits in [T1] motivierte Leitfrage wiederholt und ebenfalls auf dem Plakat ergänzt. So wird das übergeordnete Ziel der drei verbleibenden Unterrichtsstunden der Intervention für die Schülerinnen und Schüler transparent gemacht, wobei die Lernziele von [T2] wie folgt lauten:

Die Schülerinnen und Schüler...

- 2.1 ...geben an, dass Beispiele (mit Ausnahme von Existenzaussagen) keine gültigen Argumente für einen mathematischen Beweis darstellen (*Wissen über Beweisprinzipien*).
- 2.2 ...geben an, dass eine Berufung auf eine höhere Autorität (z. B. Schulbuch, Lehrkraft, etc.) kein gültiges Argument für einen mathematischen Beweis darstellt (*Wissen über Beweisprinzipien*).

Um erste Antworten auf die Leitfrage zu erarbeiten, nutzt die Lehrkraft ein Arbeitsblatt (Abb. 6.5), mit dessen Hilfe die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass eine empirisch-induktive Argumentation in einem mathematischen Beweis nicht zulässig ist (Lernziel 2.1). Die Lernenden sichern dieses Wissen über Beweisprinzipien auf dem Arbeitsblatt.

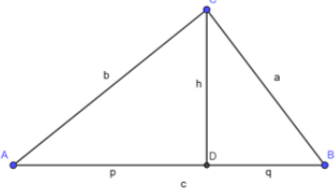
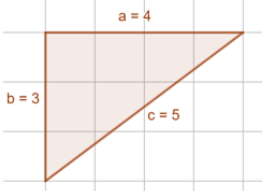
Gültiger Beweis	Ungültiger Beweis
<p>Betrachte ein beliebiges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C. Ist D der Schnittpunkt der Höhe über C mit der Strecke \overline{AB}, dann entstehen zwei neue Dreiecke, nämlich ADC und DBC.</p>  <p>Die drei Dreiecke ABC, DBC und ADC sind ähnlich nach dem WWW-Ähnlichkeitssatz. Dann folgt</p> $\frac{a}{q} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = cq$ $\frac{b}{p} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = cp$ <p>Damit folgt durch Addition und Ausklammern</p> $a^2 + b^2 = cq + cp = c \cdot (q + p) = c \cdot c = c^2.$ <p>Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.</p>	<p>Betrachte zwei rechtwinklige Dreiecke. Das erste Dreieck hat die Kathetenlängen 3 cm und 4 cm. Für die Hypotenuse ergibt sich aus der Grafik die Länge von 5 cm. Es gilt $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$, also der Satz des Pythagoras.</p>  <p>Das zweite Dreieck hat die Kathetenlängen 5 cm und 12 cm. In diesem Fall ergibt sich aus einer entsprechenden Grafik eine Länge von 13 cm für die Hypotenuse. Es gilt der Satz des Pythagoras, denn es ist</p> $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2.$ <p>Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.</p>

Abb. 6.5: Gültiger und ungültiger Beweis als Teil eines Arbeitsblattes zur Erarbeitung von Beweisprinzipien [T2].

Der zweite Teil des Arbeitsblattes fokussiert auf Situationen, in denen Beispiele für einen gültigen Beweis ausreichen, also auf Existenzaussagen. Beide Erkenntnisse werden explizit formuliert und an der Tafel bzw. auf dem Arbeitsblatt gesichert. Die Lehrkraft diskutiert im Anschluss an die erste Sicherung den Unterschied zwischen subjektiver Überzeugung von einem mathematischen Beweis und der Validität eines mathematischen Beweises. Damit ist ein Bezug zu den Beweisfunktionen hergestellt und die Lernenden erkennen, dass es im Sinne der Überzeugungsfunktion mathematischer Beweise auch Argumentationen geben kann, in denen empirische Argumente zwar individuell akzeptiert werden, aber trotzdem nicht von einem gültigen mathematischen Beweis gesprochen werden kann.

Anschließend werden im Sinne der Leitfrage mit Hilfe eines zweiten Arbeitsblattes weitere Argumente identifiziert, die für einen gültigen mathematischen Beweis nicht zugelassen sind. Dafür werden zwei weitere fehlerhafte Begründungen für den Satz des Pythagoras präsentiert (Abb. 6.6).

Adrian und Nina sollten die folgende Aufgabe bearbeiten: *Beweise den Satz des Pythagoras.*
Ihre Bearbeitungen sind unten abgebildet.

<p>Adrians Bearbeitung</p> <p>Ich muss zeigen, dass die Summe der Quadrate der Längen der Katheten gleich dem Quadrat der Länge der Hypotenuse ist, wenn das Dreieck rechtwinklig ist.</p> <p>Meine Mathelehrerin hat mir schon einmal gesagt, dass das gilt und ich damit rechnen darf.</p> <p>Also muss der Satz des Pythagoras richtig sein, denn sonst hätte sie ja nicht gesagt, dass ich damit in anderen Aufgaben rechnen kann.</p> <p>Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.</p>	<p>Ninas Bearbeitung</p> <p>Wenn das Dreieck rechtwinklig ist und ich die Katheten mit a und b bezeichne und die Hypotenuse mit c, dann muss ich also zeigen, dass $a^2 + b^2 = c^2$ ist.</p> <p>Die Aussage habe ich schon einmal in meinem Mathematikbuch als wichtige Formel gelesen, also muss die Aussage ja stimmen. Sonst würde das ja nicht in dem Buch für die Schule stehen.</p> <p>Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.</p>
--	--

Aufgabenstellung
1. **Begründe**, warum keine der Bearbeitungen einen gültigen Beweis für den Satz des Pythagoras darstellt.

Abb. 6.6: Ausschnitt eines Arbeitsblattes zur Erarbeitung von Beweisprinzipien [T2].

Beide Begründungen beziehen sich in ihrer Argumentation auf höhere Autoritäten (Lehrkraft bzw. Schulbuch). Die Schülerinnen und Schüler sollen begründen, warum beide Ansätze keinen gültigen Beweis für den Satz des Pythagoras darstellen (Lernziel 2.2). Auch diese Erkenntnisse bezüglich der Beweisprinzipien werden an der Tafel und auf dem Arbeitsblatt explizit formuliert und gesichert.

Die Lehrkraft fasst am Ende der Unterrichtsstunde gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern zusammen, dass eine Begründung, die empirisch-induktive Argumente oder eine Berufung auf eine höhere Autorität zur Argumentation verwendet, zwar individuell als überzeugend für die Gültigkeit der mathematischen Aussage angesehen werden kann, jedoch nicht als Teil eines gültigen mathematischen Beweises. Die Erarbeitung der Beweisprinzipien erfolgt somit zunächst handlungsorientiert, also in Verbindung mit einem konkreten mathematischen Beweis (z. B. Beweis zum Satz des Pythagoras) und einer damit verbundenen Beweisaktivität (z. B. Beweisvalidierung). So wird zunächst das handlungsorientierte Wissen über Beweisprinzipien adressiert, wobei letztlich stets das konzeptorientierte Wissen über Beweisprinzipien durch eine explizite Formulierung der Beweisprinzipien gelöst von einem konkreten Beweis angeregt wird (z. B. Hemmi, 2008). Im Rahmen einer Hausaufgabe werden die Schülerinnen und Schüler mit einem weiteren Argumentationsbeispiel konfrontiert und wenden die im Unterricht erworbenen Kenntnisse an.

[T3] Erarbeitung II zur Beantwortung der Leitfrage (45 min)

Die von der Studienleitung ggf. aufbereiteten Ergebnisse aus [T2] werden zunächst auf dem Plakat ergänzt. Dabei ergeben sich entsprechend der Erkenntnisse aus [T2] die folgenden Kriterien für die Gültigkeit eines mathematischen Beweises (sinngemäß): Werden empirisch-induktive Argumente oder eine Berufung auf eine höhere Autorität als Argument für die Begründung einer mathematischen Aussage genutzt, so kann es sich im Allgemeinen nicht um einen gültigen mathematischen Beweis handeln. Die Lehrkraft nutzt diese Situation, die Schülerinnen und Schüler die Erkenntnisse wiederholen zu lassen, erinnert in diesem Zusammenhang an die Leitfrage der Intervention und motiviert, im Folgenden weitere Kriterien für die Gültigkeit mathematischer Beweise zu identifizieren. Die Lernziele von [T3] lauten wie folgt:

Die Schülerinnen und Schüler...

- 3.1 ...definieren einen Zirkelschluss als einen fehlerhaften Argumentationsversuch, in dem eine zu beweisende Aussage als Argument herangezogen wird.
- 3.2 ...geben an, dass eine zirkuläre Argumentation (Zirkelschluss) bzw. Aussagen, die noch nicht bekannt oder bewiesen sind, keine gültigen Argumente für einen mathematischen Beweis darstellen (*Wissen über Beweisprinzipien*).

Anhand eines Ausschnitts aus einer Rede von Donald Trump, erarbeiten die Schülerinnen und Schüler unter Anleitung der Lehrkraft, was eine zirkuläre Argumentation ist. Im Anschluss übertragen sie dies als einen Zirkelschluss auf mathematische Beweise und sichern eine Definition des Zirkelschlusses (Lernziel 3.1). Mit Hilfe eines Arbeitsblattes zu möglichen fehlerhaften zirkulären Argumentationen wird gesichert, dass zirkuläre Argumentationen für einen mathematischen Beweis nicht zugelassen sind bzw. dass Argumentationsbeispiele, die die Behauptung als Argument verwenden und damit einen Zirkelschluss aufweisen, keine gültigen mathematischen Beweise darstellen. Daraus wird verallgemeinert abgeleitet, dass noch nicht bekannte oder bewiesene Aussagen nicht als Argument in einem

mathematischen Beweis zulässig sind (Lernziel 3.2) (Abb. 6.7). Dadurch wird erneut das Wissen der Schülerinnen und Schüler über Beweisprinzipien explizit adressiert.

3. **Gib** eine zirkuläre Begründung für den Satz des Pythagoras **an** (Zirkelschluss).
Hinweis: Es handelt sich dabei dann nicht um einen gültigen mathematischen Beweis.

4. **Markiere** in der folgenden Begründung für den Satz des Pythagoras das zirkuläre Argument.

Begründung für den Satz des Pythagoras
 Betrachte das Dreieck ABC mit den Kathetenlängen a und b sowie der Hypotenusenlänge c. Da in einem rechtwinkligen Dreieck das Quadrat über die Hypotenuse genauso groß ist wie die Summe der Quadrate über die Katheten, gilt $a^2 + b^2 = c^2$. Damit ist die Behauptung und der Satz des Pythagoras bewiesen.

5. **Konstruiere** in deinem Heft mit den Argumenten aus dem Beweispuzzle zur *Innenwinkelsumme von Dreiecken* eine Begründung mit einem zirkulären Argument (Zirkelschluss).

Notiere die Regel für nicht-zugelassene Argumente in mathematischen Beweisen, die ihr als Klasse gemeinsam formuliert habt.

Abb. 6.7: Ausschnitt eines Arbeitsblattes zur Erarbeitung von Beweisprinzipien [T3].

Diese Ergebnisse werden expliziert und gelöst von konkreten Argumentationsbeispielen an der Tafel und auf dem Arbeitsblatt dieser Unterrichtsstunde gesichert. Auch hier erfolgt die Erarbeitung der Beweisprinzipien zunächst handlungsorientiert, also in Verbindung mit einem konkreten mathematischen Beweis. So wird zunächst das handlungsorientierte Wissen über Beweisprinzipien adressiert, wobei letztlich stets das konzeptorientierte Wissen über Beweisprinzipien durch eine explizite Formulierung der Beweisprinzipien gelöst von einem konkreten Beweis angeregt wird.

[T4] Beantwortung der Leitfrage (45 min)

Zu Beginn der letzten Unterrichtsstunde [T4] werden die bisher in [T2] und [T3] erarbeiteten Kriterien für die Gültigkeit mathematischer Beweise anhand eines Quiz wiederholt (sinngemäß: empirisch-induktive Argumentation, Verweis auf höhere Autorität, zirkuläre Argumente oder noch nicht bewiesene/bekannte Argumente sind keine gültigen Argumente für einen mathematischen Beweis. Sobald ein Argumentationsversuch auf einen dieser Typen von Argumenten basiert, kann es sich nicht mehr um einen gültigen mathematischen Beweis handeln.). Die von der Studienleitung ggf. aufbereiteten Ergebnisse aus [T3] werden zunächst auf dem Plakat ergänzt. Dabei ergeben sich entsprechend der Erkenntnisse aus [T3] die folgenden Kriterien für die Gültigkeit eines mathematischen Beweises (sinngemäß): Wird die Behauptung als Argument (Zirkelschluss) oder andere noch nicht bekannte bzw. bewiesene Aussagen als Argument für die Begründung einer mathematischen Aussage genutzt, so kann es sich dabei nicht mehr um einen gültigen mathematischen Beweis handeln. Die Lehrkraft nutzt diese Situation, die Schülerinnen und Schüler die bisherigen Erkenntnisse bezüglich der Kriterien für die Gültigkeit mathematischer Beweise wiederholen zu lassen, erinnert in diesem Zusammenhang an die Leitfrage der Intervention und motiviert, im Folgenden weitere solcher Kriterien zu identifizieren. Die Lernziele von [T4] lauten wie folgt:

Die Schülerinnen und Schüler...

- 4.1 ...geben an, dass die Berücksichtigung aller in [T2] und [T3] erarbeiteten Kriterien noch keine endgültige Sicherheit für die Gültigkeit eines mathematischen Beweises darstellen.
- 4.2 ...geben anhand des Kriteriums der Lückenlosigkeit von Beweisen an, dass die Gültigkeit eines mathematischen Beweises kontextabhängig ist und (in der mathematischen Praxis) nicht allgemein festgelegt werden kann.
- 4.3 ...beantworten die Leitfrage der Intervention.

Die Lehrkraft verwendet ein Arbeitsblatt, um die Lückenlosigkeit von Beweisen zu diskutieren. Dabei wiederholen die Schülerinnen und Schüler bei der Betrachtung zweier gültiger mathematischer Beweise zunächst die bisher erarbeiteten Kriterien für

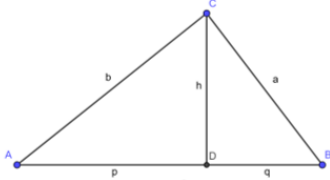
die Gültigkeit mathematischer Beweise und kommen zu dem Schluss, dass beide Beweise alle in [T2] und [T3] erarbeiteten Kriterien erfüllen, es damit also keinen Grund gibt, davon auszugehen, dass die Beweisversuche ungültig sind (Abb. 6.8).

Aufgabenstellung

1. Gib die beiden untenstehenden Beweisversuche von Chris und Kim in deinen eigenen Worten **wieder**.

Beweisversuch von Chris, 9. Klasse

Betrachte ein beliebiges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C. Ist D der Schnittpunkt der Höhe über AB mit c, dann entstehen zwei neue Dreiecke, nämlich ADC und DBC.



Die drei Dreiecke ABC, ADC und DBC sind ähnlich nach dem WWW-Ähnlichkeitssatz. Dann folgt

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow b^2 = cp$$

$$\frac{a}{q} = \frac{c}{a} \Leftrightarrow a^2 = cq.$$

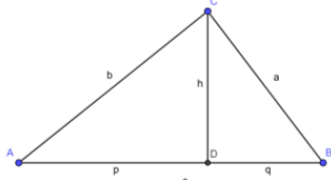
Damit folgt durch Addition und Ausklammern

$$a^2 + b^2 = cq + cp = c \cdot (q + p) = c \cdot c = c^2.$$

Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.

Beweisversuch von Kim, 12. Klasse

Betrachte ein beliebiges Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C. Ist D der Schnittpunkt der Höhe über AB mit c, dann entstehen zwei neue Dreiecke, nämlich ADC und DBC.



Die drei Dreiecke ABC, DBC und ADC sind ähnlich und es folgt

$$b^2 = cp$$

und

$$a^2 = cq.$$

Damit folgt durch Addition und Ausklammern

$$a^2 + b^2 = cq + cp = c \cdot (q + p) = c \cdot c = c^2.$$

Damit ist der Satz des Pythagoras bewiesen.

2. **Überprüfe**, ob die beiden Beweisversuche den in den letzten Stunden erarbeiteten Kriterien für gültige mathematische Beweise entsprechen und **entscheide begründet**, ob beide Beweisversuche gültig sind.

Abb. 6.8: Ausschnitt eines Arbeitsblatts zur Wiederholung der Kriterien für die Gültigkeit mathematischer Beweise und Diskussionsgrundlage der Lückenlosigkeit sowie Kontextabhängigkeit mathematischer Beweise [T4].

Nach der Überprüfung der Kriterien sollen die Schülerinnen und Schüler Unterschiede der Beweisversuche nennen und beginnen damit, eine durch die Lehrkraft geleitete Diskussion über Lücken in mathematischen Beweisen und der Abhängigkeit des Kontextes (sozialer Diskursrahmen und vorhandenes Wissen in Phase der

mathematischen Ausbildung; in diesem Fall die Klassenstufe) für die Gültigkeit mathematischer Beweise (Lernziel 4.2). Die Ergebnisse der Diskussion werden an der Tafel und auf dem Arbeitsblatt gesichert. Da es sich bei dieser Unterrichtsstunde um die letzte der Intervention handelt, werden diese Erkenntnisse auch unmittelbar auf dem Plakat ergänzt, wobei die Lehrkraft diese Ergänzung nutzt, um die Leitfrage abschließend zu beantworten: Es wird zusammengefasst, dass bei Vorhandensein der für einen mathematischen Beweis als ungültig identifizierten Typen von Argumenten klar entschieden werden kann, dass es sich nicht um einen gültigen mathematischen Beweis handeln kann (auch wenn bspw. eine Argumentation mit Berufung auf eine höhere Autorität davon überzeugen kann, dass die mathematische Aussage gültig ist). Erfüllt ein Beweisversuch die erarbeiteten Kriterien, so kann trotzdem nicht final entschieden werden, ob es sich um einen gültigen mathematischen Beweis handelt, da die Akzeptanz eines Beweisversuchs als gültigen mathematischen Beweis vom Kontext und beispielsweise dem dort geforderten Ausmaß an Lückenlosigkeit abhängig ist. Damit ist es möglich anhand von Kriterien zu bestimmen, in welchen Fällen es sich um einen ungültigen mathematischen Beweis handelt. In welchen Fällen es sich (in der mathematischen Praxis) um einen gültigen mathematischen Beweis handelt, kann jedoch nicht allgemein festgestellt bzw. formuliert werden (Lernziel 4.1). Die Schülerinnen und Schüler notieren diese Erkenntnisse auf ihrem Arbeitsblatt.

Wie bereits zu Beginn der Intervention stellt erneut eine Hausaufgabe zur Konstruktion eines Beweises ein weiteres Lernangebot dar. Die Schülerinnen und Schüler konstruieren mithilfe eines Beweispuzzles einen Beweis. Auch in diesem Fall werden die Schülerinnen und Schüler gebeten, anzugeben, ob sie sich bei der Konstruktion des Beweises an gewissen Regeln orientiert haben, und zu notieren, worauf ihrer Meinung nach bei der Konstruktion mathematischer Beweise zu achten ist.

6.2 Ergebnisse der Interventionsstudie

Fostering Students' Knowledge About Proof

Femke Sporn, Daniel Sommerhoff, Aiso Heinze

Abstract

Empirical research has underlined difficulties regarding knowledge about proof for learners of all ages. As knowledge about proof can indicate an individual's understanding of proof, it is thus mandatory to find means to support students effectively. In an intervention study with 61 9th grade students, we examined to what extent it is possible to foster students' understanding of proof by explicitly addressing knowledge about proof principles. The intervention covered five lessons integrated in regular mathematics classes distributed over a half school year. The positive effect suggests that the intervention could foster students' knowledge about proof principles using only a short amount of time. However, the results also raise questions regarding the explicit formulation of rules and criteria for mathematical proof.

6.2.1 Introduction

In their mathematics education, learners are repeatedly confronted with argumentative challenges, mathematical proofs, and related activities. Thus, it can be assumed that learners (are expected to) form an understanding of proof throughout their schooling, which can be understood as an understanding of the way evidence is generated in mathematics (Sporn et al., 2022). Individual's understanding of proof has various aspects and, for example, includes learners' knowledge about proof and their need for proof. Building an adequate understanding of proof is relevant for learners (i) because they are expected to learn about mathematics as a deductive system and how evidence is generated in mathematics as well as (ii) because there is repeated evidence that an adequate individual's understanding of proof improves performance in handling proof (e.g., Chinnappan et al., 2012). Still, prior research indicates that learners of different ages show an inadequate understanding of proof (e.g., Healy & Hoyles, 2000).

Currently, there is still insufficient knowledge on how an individual's understanding of proof (or single aspects of it) is formed throughout mathematics education, which factors influence its formation, and how it can be explicitly supported. It seems likely

that the learning opportunities regarding mathematical proof throughout mathematics education and regarding various proof activities, such as validating or constructing mathematical proofs, play a role in building an individual's understanding of proof. Opportunities for reflection on and discussions about proof in mathematics are also possible, likely especially useful learning opportunities (e.g. Davis, 2000). However, there is insufficient information on such learning opportunities and their impact so far. Since learners repeatedly show difficulties in their proof performance and an inadequate understanding of proof, our focus was on designing and evaluating a teaching intervention aiming to foster 9th grade students' understanding of proof. We focused on students' knowledge about proof (as one aspect of their understanding of proof) to investigate to what extent such an intervention is indeed effective in fostering students' knowledge about proof and thus their understanding of proof.

6.2.2 Theoretical Background

Learning Opportunities Regarding Mathematical Proof in Secondary Education

Reasoning and proving are integrated in mathematics curricula worldwide (e.g., CCSS, 2010). Often, proofs are explicitly focused on in geometry classes from grades 7 and 8 onwards. Thus, learners repeatedly encounter learning opportunities for mathematical proof. While there is a lack of empirical evidence if and to what extent those learning opportunities impact on learner's understanding of proof in specific, it can be assumed that the formation of an individual's understanding of proof is positively affected by such (different) learning opportunities regarding mathematical proof (Sporn et al., 2022).

An objective evaluation of such learning opportunities and, thus, also of the (learning) output is only possible to a limited extent since a generally accepted definition of a valid mathematical proof is missing in mathematical practice (Stylianides et al., 2017). In particular, the social context (e.g., a course) and the norms and criteria established therein – possibly initiated by the teacher and oriented to the mathematics standards – are of a certain influence (Sommerhoff & Ufer, 2019). Thus, a specific argumentation might be considered a valid mathematical proof in one context and, at the same time, be rejected in another context (e.g., Inglis et al., 2013).

Students' Knowledge About Proof (Principles) as one Aspect of Their Understanding of Proof

While there are certain social aspects related to the norms and criteria for mathematical proof, there are also many aspects of mathematical proof that are widely agreed upon and which learners should learn, including also knowledge about the way evidence is generated in mathematics (i.e., *knowledge about proof*). This includes criteria that must be fulfilled for a valid mathematical proof independently of the social context (e.g., the argumentation must be based on already proven statements). Such criteria, that a mathematical proof must definitely fulfill, can be summarized as *proof principles*.

As part of the formation of an individual's understanding of proof, learners build up *knowledge about proof principles*, which has been addressed, for example, by Heinze and Reiss' (2003) research on proof scheme, proof structure, and chain of conclusions, and which has shown that 8th grade learners have difficulties regarding proof principles. The findings of Sporn et al. (2022) suggest that students' knowledge about proof principles may develop slightly positively over the course of mathematics education. However, it is not yet known, which kinds of learning opportunities explicitly allow to foster students' knowledge about proof principles, and thus to what extent these allow to specifically support students' development of understanding of proof.

Prior research shows two different ways of operationalization (Sporn et al., 2021): (i) knowledge about proof principles in an explicit and general form, that is without reference to a specific proof-related action situation (*concept-oriented knowledge about proof principles*; e.g., Heinze und Reiss (2003)), and (ii) knowledge about proof principles with a focus on a specific mathematical action situation regarding proof, for example, the construction or validation of a specific proof (*action-oriented knowledge about proof principles*; e.g., Andersen (2018)). That a distinction between the two foci is theoretically and also empirically meaningful for investigating knowledge about proof principles was shown by Sporn et al. (2021). Fig. 6.1 shows an example item for an action-oriented focus on knowledge about proof principles. Here, students are required to validate a purported proof that does not follow the established proof principles (i.e., proof by authority).

Ben has to prove the following proposition:			
The sum of three consecutive natural numbers is divisible by 3.			
Ben's purported proof:			
I know this from school. Our textbook contained a proof that this is valid for every natural number. There, it was shown that:			
$3 + 4 + 5 = 3 + 3 + 1 + 3 + 2 = 3 \cdot 3 + 3$			
This proves the proposition.			
Is Ben's purported proof a valid mathematical proof?			
<input type="radio"/>	Yes	<input type="radio"/>	No
<input type="radio"/>		<input type="radio"/>	Don't know

Fig. 6.1: Example item used in the study for measuring action-oriented knowledge about proof principles (translated; Sporn et al., 2022).

In comparison, evaluating the statement *“If the most important mathematicians in a field consider a statement to be true, then it can be considered valid, even if there is no complete proof yet.”* addresses concept-oriented knowledge of proof principles.

6.2.3 Research Questions

Since (i) prior research has highlighted students difficulties regarding their knowledge about proof principles (e.g., Healy & Hoyles, 2000) and that the desired development of students' knowledge about proof principles in school could not be verified (Sporn et al., 2022) and (ii) research and information on whether, how exactly, and how effectively their knowledge about proof principles can be fostered is missing, the question arises whether it is possible to explicitly foster students' (concept- and action-oriented) knowledge about proof principles. To examine this question, learning opportunities regarding mathematical proof were developed that induce, for example, explicit discussion and reflection on proof principles. In the context of an intervention, the aim was to investigate whether these learning opportunities have a positive effect on students' (concept- and action-oriented) knowledge about proof principles as well as their justifications regarding the acceptability of proofs. The research questions thus focused on: (RQ1) How does an intervention on mathematical proof and proof principles affect the concept- and action-oriented knowledge about proof principles of 9th grade students? (RQ2) How does an intervention on mathematical proof and proof principles foster 9th grade students' ability to use criteria aligned with proof principles to justify their judgments of incorrect purported proofs?

Regarding RQ1, it was expected that discussing and reflecting on proof principles during the intervention would lead to an explicit formulation of proof principles, thus directly addressing a concept-oriented knowledge about proof principles and thus causing increased knowledge (H1.1). By elaborating and explicitly reflecting on these criteria while working on specific proofs, it was expected that action-oriented

knowledge about proof principles would improve (H1.2). Regarding RQ2, students were expected to judge purported proofs using criteria aligned with proof principles more often (H2), as these were explicitly introduced to students in the intervention.

6.2.4 Method

Study Design & Sample

In total, 61 students from four 9th grade classes of a German Gymnasium participated in a quasi-experimental intervention study with an intervention and a control group. A questionnaire was used to assess their concept- and action-oriented knowledge about proof principles at the beginning of the second half of 9th grade (pre-test). Two of the four classes received an intervention on mathematical proof (intervention group; $N_{\text{Int}} = 30$). Both other classes received no specific intervention (control group; $N_{\text{Con}} = 31$). At the end of the second half of the 9th grade, students' concept- and action-oriented knowledge about proof principles was assessed (post-test), again.

Design of the Intervention on Mathematical Proof

The intervention included five lessons (one double lesson (T1) and three single lessons (T2-T4); each of which included additional homework), which were distributed over the second half of the school year with in-between intervals of about 3-4 weeks. The intervention focused, for example, on discussing and reflecting on proof principles based on the treatment of different (purported) proofs and thus focused on students' knowledge about proof principles. Proofs for mathematical statements were selected, which are part of the 9th grade curriculum anyway. At T1, the focus was on the role of proof in mathematics and on the distinction between premises and conclusion. Students were supposed to become familiar with proofs (as objects - cf. Reid & Knipping, 2010) quite consciously and their need for proof was encouraged. Problematization took place at the end of T1: students developed the central question whether and how to decide when a purported proof can be judged as a valid or invalid mathematical proof. Answering this question was the focus of the three single lessons T2-T4. At T2 and T3, the focus was on reflecting on proof principles (based on proof scheme, proof structure, and chain of conclusions; Heinze und Reiss (2003)). Students used purported proofs to elaborate in which cases one can be sure to say that a purported proof is invalid (i.e., when proof principles were not followed) and then abstracted the proof principles in explicit and general terms (i.e., argumentation should not be based on experience; using only single examples to show an assertion is not

sufficient, etc.). Like this, students elaborated on the proof principles (action-oriented focus on knowledge about proof principles) and formulated them in explicit and general terms (concept-oriented focus on knowledge about proof principles) (knowledge integration, see Linn et al., 2013). Following up on the problematization from T1, the aim at T4 was to clarify if or when it can be decided that a purported proof represents a valid mathematical proof. For this, the insights on proof principles from T2 and T3 were integrated by stating that while there is no way of judging the acceptability of a proof absolutely, there is at least no reason to judge a purported proof as invalid if all proof principles are followed (e.g., Davis, 2000). Again, students used purported proofs to discuss and reflect on proof principles with the aim of finding a general formulation on the fact that it finally depends on the social context when a purported proof is judged as a valid mathematical (i.e., depending on prior knowledge, one course may require more intermediate steps in the proof than another course to accept it; Yackel und Cobb (1996)). At the end of each lesson, the results were saved on the whiteboard and sent to the project team. The results were checked for correctness, and the beginning of the following intervention lesson was slightly adapted to these results (for example the wording of the respective class is used; e.g., *“The purported proof is invalid, if it is based on the statement of a book.”*). Results were also saved on a poster in the classroom to have the elaborated explicit formulations available at any time and to repeat them before continuing with the new content. The poster was visible to the students throughout the school year (except at the time of the post-test). The teachers of the intervention group were provided with the same materials and received very detailed instructions on how to implement each lesson. The control group did not receive any additional materials but followed the regular mathematics curriculum.

Items & Analyses

The employed questionnaires were based on prior studies (see Sporn et al., 2022). At the beginning and at the end of the intervention, an (identical) questionnaire was used, which included 18 statements on concept-oriented knowledge about proof principles. These included valid and invalid statements about proof principles, which had to be evaluated on a 6-point Likert scale (“Not true at all” (1) to “Totally true” (6)). The 18 statements were combined to a mean score S_{coK} and rescaled to a range from 0 to 6 for better comparability. Action-oriented knowledge about proof principles was assessed by asking students to validate six purported proofs in each of which certain proof

principles were disregarded. Fig. 6.1 shows an item example. For each judgment, students scored 1 point if they correctly judged the purported proof to be invalid. In each other case, they scored 0 points. A sum score was formed from the judgments of the six purported proofs (S_{aoK} ; range: 0 to 6). In addition, students were asked to provide a justification for their judgment about the validity in an open text box for each purported proof. For the justification of their judgment, students scored 1 point if they justified the correct judgment (i.e., *invalid purported proof*) using criteria aligned with proof principles. They scored 0 points if they justified their judgment in a way that was not aligned with proof principles or if they made an incorrect judgment (i.e., *valid purported proof*). Again, a sum score was formed ($S_{aoK-Justification}$; range: 0 to 6). To answer the research questions, ANCOVAs were calculated for each of the three scores (S_{coK} , S_{aoK} , $S_{aoK-Justification}$).

6.2.5 Results

Fig. 6.2 shows the descriptive results of the intervention and control group regarding the three scores (S_{coK} , S_{aoK} , $S_{aoK-Justification}$) in the pre- and post-test. The graphs indicate cross-over interactions for each score, implying that the intervention group achieved better learning results than the control group.

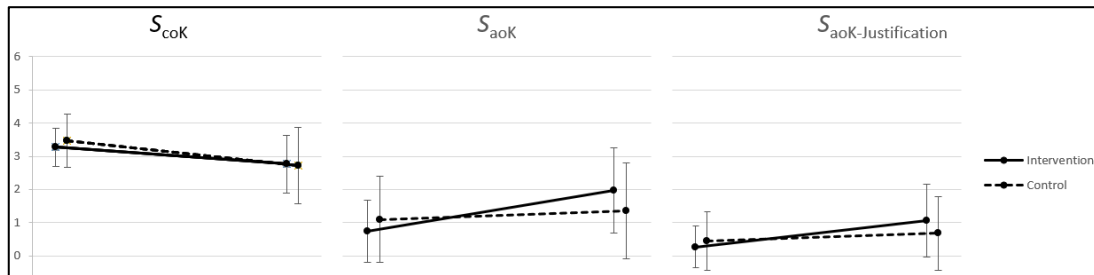


Fig. 6.2: Descriptive results (Mean, SD) for S_{coK} , S_{aoK} , $S_{aoK-Justification}$.

Descriptive data for S_{coK} show a (non-significant) decrease for both groups. The ANCOVA for S_{coK} shows that after adjusting for the pre-test, post-test S_{coK} does not differ statistically significantly between both groups ($F(1, 59) = 0.11$, $p = .744$, $\eta_p^2 = .002$). Although the students were encouraged to explicitly formulate proof principles as part of the intervention, this does not seem to have impacted their concept-oriented knowledge about proof principles. While S_{aoK} was low in the pre- and post-test, the intervention appears to have a positive effect, at least for some students. The ANCOVA for S_{aoK} shows a significant difference between both groups ($F(1, 58) = 5.82$, $p = .019$) in the post-test with a medium to large effect ($\eta_p^2 = .091$) in

favor of the intervention group. The ANCOVA for $S_{\text{aoK-Justification}}$ shows similar results: again, the intervention group scored significantly higher than the control group ($F(1, 58) = 5.91, p = .018, \eta_p^2 = .092$) in the post-test. Thus, with intervention, students were more likely to evaluate the incorrect purported proofs correctly as invalid and were also more likely to do so based on criteria aligned with proof principles.

6.2.6 Discussion & Outlook

Prior research has repeatedly shown that learners have shortcomings regarding multiple aspects of their understanding of proof (e.g., Chinnappan et al., 2012), for example regarding their knowledge about proof (Heinze & Reiss, 2003). It thus appears essential to find ways to effectively foster such knowledge about proof and by this students' understanding of proof. As information about how to foster students' knowledge about proof (principles) is currently missing, an intervention on mathematical proof (principles) was designed and evaluated. By using specific mathematical action situations regarding proof to elaborate on proof principles (action-oriented focus on knowledge about proof principles) and by developing formulations of proof principles in explicit and general terms (concept-oriented knowledge about proof principles), 9th grade students were encouraged to discuss and reflect on proofs (Davis, 2000; Linn et al., 2013).

Contrary to expectations, empirical results show no significant difference between both groups regarding their concept-oriented knowledge about proof principles in the post-test (H1.1). As elaborating and formulating proof principles in explicit and general terms appears to be a reasonable approach to support concept-oriented knowledge about proof principles, it remains unclear why no effects could be observed. For further insights, either qualitative approaches would be needed or longitudinal studies with more measurement points, which would allow observing direct and cross-lagged effects between time points to better understand the longitudinal relations between gains action- and concept-oriented knowledge. Moreover, the results may also indicate measurement issues regarding concept-oriented knowledge, as students were possibly not able to see the equivalence of the formulations of proof principles in the tests and their formulations in classroom. As students created their own formulations for proof principles (verified as correct) in class, they may not have recognized that they corresponded to the statements presented in the questionnaire. Thus, such an item format may not be useful for assessing

concept-oriented knowledge about proof principles specified in the context of the intervention. Prompting learners for proof principles in an open item may be more appropriate (Andersen, 2018). Even though action-oriented knowledge about proof principles is low in the pre- and post-test (corresponding to results of prior research, e.g., Heinze & Reiss, 2003), a ANCOVA shows a significant positive effect of the intervention on the action-oriented knowledge about proof principles, as expected (H1.2). Thus, even a relatively short intervention (albeit over a longer period of time) including, for example, some encouraging opportunities for discussion and reflection on proof principles, seems to have a medium to large effect on students' action-oriented knowledge about proof principles. This suggests that fostering students' knowledge about proof is possible within half of a school year. Regarding RQ2, as expected, the intervention students are significantly better at using criteria aligned with proof principles to justify their judgments of incorrect purported proofs. This supports the results on the significant positive effect of the intervention, and shows that students from the intervention group are more likely to be able to formulate criteria aligned with proof principles. This result may also indicate that they learned the proof principles, even if not in the form of the statements presented in the questionnaire for concept-oriented knowledge about proof principles.

As with every research, the presented study has some limitations, for example regarding the number of participants and the restriction to one school in one country. Further, it was not possible to control instruction in the control group. Albeit these limitations, empirical data suggests that it is useful for students to explicitly elaborate proof principles within discussion and reflection using different (purported) proofs and within various proof activities. Further research is necessary to examine, if other learning opportunities might lead to (even higher) effects on students' knowledge about proof and which modifications (length, arrangement of the sessions, methods, etc.) of the current intervention could be made to also foster concept-oriented knowledge. Furthermore, it would be interesting to investigate, to what extent such an increase in knowledge has an impact on students' performance in handling proof.

7 Diskussion und Ausblick

Die übergreifenden Forschungsfragen dieser Arbeit (Abb. 3.1) lassen sich den drei Abschnitten I) Theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis, II) Empirische Untersuchungen zum Beweisverständnis von Lernenden und III) Individuelles Beweisverständnis im Kontext von Lerngelegenheiten und Prädiktivität zuordnen und wurden in den drei empirischen Studien dieser Arbeit auf unterschiedliche Weise spezifiziert. In Abschnitt 7.1 wird das auf theoretischer Basis entwickelte Rahmenmodell zum Beweisverständnis sowie die Ergebnisse der drei empirischen Studien in den Gesamtkontext der übergreifenden Forschungsfragen eingefügt, diskutiert und in den Forschungsstand eingeordnet. Anschließend werden in Abschnitt 7.2 Limitationen dargelegt und in Abschnitt 7.3 ein Ausblick auf offene Forschungsfragen sowie praktische Implikationen gegeben.

7.1 Diskussion der Ergebnisse

I) Theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis

Das aus Theorie und bisheriger Forschung im Bereich mathematischer Beweise entwickelte Rahmenmodell zum Beweisverständnis wurde in Abschnitt 3.1 vorgestellt und in den ersten Artikel dieser Arbeit integriert (s. Kapitel 4). Mit dem Modell wurde eine Systematisierung dessen vorgenommen, was in der bisherigen Forschung wiederholt als Beweisverständnis benannt und jeweils in einzelnen Teilen untersucht wurde (z. B. Hanna & Jahnke, 1996; Heinze & Kwak, 2002; Reiss et al., 2001). Bisher gab es jedoch keine systematische Integration der einzelnen Aspekte eines Beweisverständnisses, das von einer gemeinsamen theoretischen Basis abgeleitet ist. Alle Unterscheidungen, die im Rahmenmodell Berücksichtigung fanden, ließen sich theoretisch begründen (vgl. Kapitel 2) sodass die **übergreifende Forschungsfrage 1.1**, wie sich ein theoretisches Rahmenmodell basierend auf bisherigen theoretischen und empirischen Forschungsergebnissen darstellen lässt, damit beantwortet ist. Sicherlich wären bei der Entwicklung des Rahmenmodells zum

Beweisverständnis auch andere Darstellungen und Differenzierungen denkbar bzw. weitere oder andere Aspekte begründet integrierbar gewesen. Daher wird bei dem hier vorgestellten Rahmenmodell kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben und es ist durchaus vorstellbar, dass auch weitere Aspekte eines Beweisverständnisses je nach Forschungsinteresse berücksichtigt werden können.

Die empirischen Ergebnisse in Bezug auf die **übergreifende Forschungsfrage 1.2**, ob sich Unterscheidungen im theoretischen Rahmenmodell zum Beweisverständnis empirisch stützen lassen, legen nahe, dass die vorgeschlagenen Differenzierungen auch empirisch gestützt werden können. So zeigen die Ergebnisse der Studien 1 und 2, dass sich die Unterscheidung zwischen einem konzept- und einem handlungsorientierten Fokus im Rahmen des individuellen Beweisverständnisses empirisch abbildet und somit bei einer Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses berücksichtigt werden sollte. Damit wird beispielsweise die bereits von A. J. Stylianides und G. J. Stylianides (2009) und Vinner (1997) erhobene – in vielen Studien jedoch nicht bedachte (z. B. Healy & Hoyles, 1998; Ufer et al., 2008) – Forderung adressiert, auch die deklarative Form des Wissens über Beweise zu berücksichtigen. Darüber hinaus kann diese Konzeptualisierung zukünftige Forschung für die unter anderem von Sommerhoff (2017) genannte Herausforderung sensibilisieren, Wissen über Beweise zu erfassen, ohne es bei der Messung mit der Leistung im Validieren oder Konstruieren von Beweisen zu konfundieren. Durch die Berücksichtigung des konzept- und handlungsorientierten Fokus bei der Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses kann besser gestützt werden, dass die aus einer empirischen Untersuchung abgeleiteten Aussagen zum individuellen Beweisverständnis auch zur verwendeten Operationalisierung des Beweisverständnisses passen. Beispielsweise haben Ufer et al. (2009) handlungsorientiertes Wissen über Beweise bei Schülerinnen und Schülern der 8. Klassenstufe erhoben und versuchten – unter anderem – daraus Aussagen über ein (konzeptorientiertes) Wissen über Beweise unabhängig von der in der Erhebung gegebenen Handlungssituation abzuleiten. Die in Studie 1 und Studie 2 generierte Evidenz zur Unterscheidung beider Fokusse legt in diesem Fall aber nahe, bei der Interpretation von empirischen Ergebnissen die Art und Weise der Operationalisierung zu berücksichtigen (vgl. G. J. Stylianides & A. J. Stylianides, 2009), wodurch weitreichende Interpretationen deutlicher erkennbar werden. Über die beiden Fokusse hinaus kann auch die theoretisch begründete Differenzierung der einzelnen Aspekte

des individuellen Beweisverständnisses durch die empirischen Ergebnisse der Studien 1 und 2 gestützt werden. Dies zeigt sich insbesondere in den zwar systematischen, jedoch eher schwachen Korrelationen, die für eine Differenzierung der Aspekte sprechen. Damit sollte auch diese Unterscheidung bei einer Konzeptualisierung eines Beweisverständnisses und damit auch bei dessen Operationalisierung Berücksichtigung finden.

Die Reliabilitäten der für die drei empirischen Studien entwickelten Skalen zum individuellen Beweisverständnis deuten darauf hin, dass es grundsätzlich möglich ist, einzelne Aspekte sowohl konzept- als auch handlungsorientiert zu operationalisieren. Wie bereits von Heinze und Reiss (2003) in ihrer Interviewstudie betont, wird auch im Rahmen dieser Arbeit deutlich, dass die Art der Operationalisierung des konzeptorientierten Wissens über Beweise relevant ist. So zeigen sich in Studie 3 beispielsweise keine signifikanten Unterschiede zwischen der Interventionsgruppe und der Kontrollgruppe im konzeptorientierten Wissen über Beweisprinzipien, obwohl das konzeptorientierte Wissen über Beweisprinzipien im Rahmen der Interventionsstunden explizit adressiert wurde (s. Kapitel 6). Das konzeptorientierte Wissen wurde mit geschlossenen Items erhoben, die feste Formulierungen vorsahen. Es ist möglich, dass die Lernenden im Rahmen der Intervention ein Wissen über Beweisprinzipien aufbauen konnten, sich dies aber in den vorgegebenen geschlossenen Items nicht widerspiegelt, da in den Unterrichtsstunden der Intervention möglicherweise andere Formulierungen verwendet wurden. Eine offene Formulierung der Items könnte möglicherweise mehr Aufschluss über das Wissen über Beweise bzw. einen Wissenszuwachs geben (vgl. Heinze & Reiss, 2003). Bei der inhaltlichen Spezifizierung individueller Aspekte auf Beweismethoden in Studie 1 zeigten sich geringe Reliabilitäten. Diese können auf die abstrakte Formulierung der Items oder auf unzureichende Kenntnisse der Studierenden bezüglich Beweismethoden zurückgeführt werden, die möglicherweise damit zu begründen sind, dass Beweismethoden in der Schule nicht systematisch behandelt werden. Die in den Studien 1 und 2 zum Teil geringeren Reliabilitäten des handlungsorientierten Wissens über Beweise lassen sich durch Unterschiede in den mathematischen Inhalten erklären, die in den zu validierenden Beweisversuchen adressiert werden. Dies unterstreicht, dass sich ein Beweisverständnis in verschiedenen mathematischen Teilgebieten unterschiedlich ausgeprägt sein kann, was ggf. bei der Operationalisierung eines Beweisverständnisses zu berücksichtigen ist (Dawkins & Weber, 2017).

Insgesamt liefert die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte, theoretisch fundierte und teilweise empirisch abgesicherte Konzeptualisierung des Beweisverständnisses eine umfassende Strukturierung desselben, Hinweise auf zentrale Differenzierungen im Rahmen des Beweisverständnisses sowie auf eine darauf aufbauende Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses für Lernende der Klassenstufe 8 bis zum Studienbeginn. Darüber hinaus konnte gezeigt werden, dass die in dieser Arbeit genutzten Operationalisierungen des individuellen Beweisverständnisses basierend auf dem theoretischen Rahmenmodell geeignet sind, um Unterschiede und Veränderungen des individuellen Beweisverständnisses aufzuzeigen (**übergreifende Forschungsfrage 1.3**). Zwar lässt sich aufgrund der Ergebnisse der quasi-längsschnittlichen Studie 2 nicht mit Sicherheit sagen, ob die sehr geringen Unterschiede im individuellen Beweisverständnis über die vier Schuljahre darauf zurückzuführen sind, dass (i) die Schülerinnen und Schüler durchgängig über ein schwach ausgeprägtes individuelles Beweisverständnis verfügen und die Lerngelegenheiten in der Schule nicht zum Aufbau eines adäquaten Beweisverständnisses beitragen, oder ob (ii) die auf Basis des Rahmenmodells entwickelten Testinstrumente nicht geeignet sind, das individuelle Beweisverständnis der Schülerinnen und Schüler adäquat zu erfassen. Ein Vergleich der Ergebnisse des Beweisverständnisses der Studierenden zu Beginn ihres Studiums (Studie 1) mit den Ergebnissen der Schülerinnen und Schüler (Studie 2), legt jedoch nahe, dass sich mithilfe der Testinstrumente durchaus Unterschiede im individuellen Beweisverständnis messen lassen. Schlussendlich zeigen vor allem die Unterschiede im individuellen Beweisverständnis zwischen Interventions- und Kontrollgruppe in Studie 3, dass das Modell geeignet ist, um Veränderungen im individuellen Beweisverständnis zu zeigen. Untersuchungen zur Veränderung und Entwicklung des individuellen Beweisverständnisses sind somit auf der Basis des entwickelten Rahmenmodells möglich, wobei die Sensitivität der Skalen, insbesondere des Wissens über Beweise, je nach Forschungsinteresse ggf. noch weiter erhöht werden könnte bzw. müsste.

II) Empirische Untersuchungen zum Beweisverständnis von Lernenden

Das theoretische Rahmenmodell zum Beweisverständnis dient als zentrale Grundlage der drei empirischen Studien dieser Arbeit und ein individuelles Beweisverständnis von Lernenden kann auf dieser Basis (wie zuvor beschrieben) operationalisiert und systematisch untersucht werden. Dass Lernende über ein adäquates individuelles

Beweisverständnis verfügen sollten, wurde bereits in Kapitel 2 dargestellt (z. B. KMK, 2012; Winter, 1995). Darüber hinaus wurde deutlich, dass sozio-mathematische Normen und damit die Abhängigkeit vom Diskursrahmen eine wichtige Rolle bei der Ausbildung des individuellen Beweisverständnis bei Lernenden spielen können (z. B. Dawkins & Weber, 2017; Lai & Baldinger, 2021; Yackel & Cobb, 1996). Dies ist vor allem bei der Bewertung des individuellen Beweisverständnisses zu berücksichtigen. Für die drei Studien wurden die Items zur Erfassung des individuellen Beweisverständnisses daher so konzipiert, dass sie Anforderungen an mathematische Beweise adressieren, über die in der Mathematik ein Konsens angenommen werden kann (Heinze & Reiss, 2003; Selden & Selden, 2003). Um ein individuelles Beweisverständnis in verschiedenen Phasen der mathematischen Ausbildung untersuchen und vergleichen zu können, wurde darüber hinaus bei der Wahl der Fachinhalte sowie der Wortwahl darauf geachtet, dass die Items ab Klassenstufe 8 jahrgangsübergreifend eingesetzt werden können.

Die Ergebnisse der empirischen Studien zeigten einen Unterschied im individuellen Beweisverständnis zwischen den Studierenden zu Beginn ihres Studiums (Studie 1) und den Schülerinnen und Schülern der Klassenstufen 8 bis 11 (Studie 2) zugunsten der Mathematikstudierenden, was jedoch aufgrund der Positivselektion der Stichprobe in Studie 1 zu erwarten war (z. B. Kosiol et al., 2019). Vor dem Hintergrund, dass die Items für den Einsatz ab Klassenstufe 8 entwickelt wurden, sind die Ergebnisse insgesamt als ernüchternd zu bewerten. Es ergab sich ein Unterschied von weniger als einer Standardabweichung innerhalb von vier Schuljahren, der den signifikanten Zuwachs an Wissen über Beweisprinzipien in Studie 2 relativiert. Der Effekt der aktuell dargebotenen schulischen Lerngelegenheiten scheint gering – potenziell da mathematisches Argumentieren und Beweisen selten oder nur kurz auf einer Metaebene jenseits eines spezifischen Beweises thematisiert wird (Grundey, 2015; Harel & Sowder, 2007). Darüber hinaus gibt es Schülerinnen und Schüler der Klassenstufe 8, die vergleichbare Ergebnisse im individuellen Beweisverständnis zeigen wie Studierende zu Beginn ihres Studiums. Somit sprechen die Ergebnisse der Studien 1 und 2 einerseits dafür, dass sich das individuelle Beweisverständnis von Lernenden nur als schwach bis moderat beschreiben lässt, was die eher moderaten Befunde der bisherigen Forschung stützt (vgl. Abschnitte 2.3.1 und 2.3.2) und Ansatzpunkte für Fördermaßnahmen liefert. Insbesondere im Hinblick auf den Übergang von der Schule in die Hochschule sollten die Lernenden am Ende ihrer

schulmathematischen Ausbildung über ein Beweisverständnis verfügen, das ihnen den herausfordernden Schritt im Enkulturationsprozess in die wissenschaftliche Kultur der Mathematik erleichtert (vgl. Abschnitt 2.2.3). Andererseits zeigte sich durch diese vergleichbaren Ergebnisse von Lernenden deutlich unterschiedlicher Klassenstufen eine enorme Spannweite im individuellen Beweisverständnis der Lernenden. Diese Spannweite macht es schwierig, eine Entwicklung des individuellen Beweisverständnisses einzuschätzen und im Verlauf zu beschreiben (**übergreifende Forschungsfrage 2.1**).

Die Betrachtung verschiedener Aspekte und die Unterscheidung eines konzept- und handlungsorientierten Fokus bei der Operationalisierung ermöglicht die korrelative Untersuchung einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses (**übergreifende Forschungsfrage 2.2**). Bei den Studierenden zeigten sich erwartungskonform signifikante positive Zusammenhänge zwischen allen untersuchten Aspekten des individuellen Beweisverständnisses (Wissen über Beweise, subjektive Überzeugung von und durch Beweise, Einstellungen gegenüber Beweisen, Lernmotivation bezüglich Beweisen – Abschnitt 4.7). In Studie 2 zeigte sich jedoch entgegen den Erwartungen in keiner Klassenstufe ein positiver Zusammenhang zwischen dem Wissen über Beweise und dem Beweisbedürfnis (Abschnitt 5.6). Möglicherweise ist das Beweisbedürfnis bei den Schülerinnen und Schülern so gering, dass sie die Lernangebote zum mathematischen Beweisen nicht in der Form nutzen, dass es sich auf das Wissen über Beweise auswirkt (Jahnke, 1978). In der Literatur wird zur Steigerung des Beweisbedürfnisses die Förderung des Wissens über Beweise vorgeschlagen (Zaslavsky et al., 2012). So ist wiederum möglich, dass das Wissen über Beweise zu gering ist, um sich im Beweisbedürfnis zu manifestieren. Es ist auch möglich, dass die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über Beweise nur deshalb erwerben, weil die Lehrkraft sie dazu auffordert und nicht weil sie die Notwendigkeit mathematischer Beweise erkennen (Balacheff, 1988). Damit wird deutlich, dass sich verschiedene Erklärungen für den nicht signifikanten Zusammenhang von Wissen über Beweise und Beweisbedürfnis bei den Lernenden darstellen und diskutieren lassen. Insgesamt kann also die Betrachtung von Zusammenhängen einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses zu dessen Beschreibung beitragen. Damit können ein differenzierteres Bild des individuellen Beweisverständnisses und Ansatzpunkte für die Analyse seiner inneren Struktur und Förderung gewonnen werden. Im Rahmen dieser Arbeit können allerdings keine Aussagen über kausale

Zusammenhänge und – aufgrund des quasi-längsschnittlichen Untersuchungsdesigns – auch nicht über die individuelle Entwicklung des Beweisverständnisses getroffen werden. Über die ersten Einblicke aus dieser Arbeit hinaus ist entsprechend spezifisch in diesem Bereich weitere Forschung und empirische Evidenz notwendig.

Insgesamt legen die Ergebnisse der Studien 1 und 2 nahe, dass es sich lohnt, die Entwicklung eines individuellen Beweisverständnisses im Verlauf der mathematischen Ausbildung zu untersuchen, unter anderem um zu erkennen, welche Fördermaßnahmen zu welchem Zeitpunkt sinnvoll sein könnten (Harel & Sowder, 2007). Gleichzeitig zeigen die theoretische Konzeptualisierung sowie die empirischen Ergebnisse, dass es die vielen Aspekte des individuellen Beweisverständnisses sehr schwer machen, das individuelle Beweisverständnis von Lernenden vollumfänglich empirisch im Längsschnitt zu untersuchen, da große Stichproben mit Multimatrix-Designs für die Datenerhebungen nötig wären. Aber auch weitere Untersuchungen von Zusammenhängen einzelner Aspekte können helfen, einen oder einige wenige Aspekte zu identifizieren, auf die sich die Längsschnittuntersuchung konzentrieren sollte, und so die Vielfalt des individuellen Beweisverständnisses durch die vielen Aspekte in empirischen Verlaufsuntersuchungen zu adressieren. Auch wenn echte längsschnittliche Studiendesigns attraktiv wirken, bedarf es aktuell noch mehr Studien, wie die hier präsentierten, die Planungsgrundlage einer längsschnittlichen Betrachtung sind.

III) Individuelles Beweisverständnis im Kontext von Lerngelegenheiten und Prädiktivität

Für den Aufbau eines adäquaten individuellen Beweisverständnisses im Rahmen der mathematischen Ausbildung können im Sinne des Angebots-Nutzungs-Modells vor allem die Lerngelegenheiten (und deren Nutzung) innerhalb von Lernumgebungen verantwortlich gemacht werden (vgl. Helmke, 2017 - Abschnitt 2.3.3). Die eher schwachen empirischen Ergebnisse bezüglich des individuellen Beweisverständnisses der Lernenden (Studien 1 und 2) deuten darauf hin, dass die (potenziell wenigen) Lerngelegenheiten in der Schule aktuell nicht so gestaltet zu sein scheinen, dass sie zum erfolgreichen Aufbau eines Beweisverständnisses beitragen (**übergreifende Forschungsfrage 3.1**) (Harel & Sowder, 2007). Dabei ist einerseits vorstellbar, dass die Lernangebote nicht geeignet sind, um ein adäquates individuelles Beweisverständnis aufzubauen. Eine zentrale Verantwortung hierfür liegt bei den Lehrpersonen, die möglicherweise Schwierigkeiten haben, in diesem Bereich effektive

Lerngelegenheiten anzubieten (z. B. Hemmi et al., 2010; Knuth, 2002). Andererseits ist es möglich, dass die Lernenden die Lernangebote nicht adäquat nutzen (Helmke, 2017; Seidel, 2014), wobei auch hier zunächst eine Teilverantwortung bei der Lehrperson liegt, Lernangebote so zu gestalten, dass sie von den Lernenden auch angenommen werden. Die enorme Spannweite, die sich im individuellen Beweisverständnis bei den Lernenden in Studie 1 und 2 zeigte, lässt vermuten, dass es deutliche Unterrichtseffekte gibt: Möglicherweise gibt es einige Lehrkräfte, die das Wissen über Beweise im Mathematikunterricht adressieren und andere eher nicht (z. B. Heinze & Reiss, 2004; Stylianou et al., 2009).

Dass sich bei den Studierenden kein signifikanter Zusammenhang zwischen der Quantität der Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen als selbstberichtete Schulerfahrungen und ihrem individuellen Beweisverständnis zeigt (s. Kapitel 4), könnte darauf zurückzuführen sein, dass für den Aufbau eines adäquaten Beweisverständnisses nicht zwangsläufig die Quantität, sondern die Qualität der Lernangebote entscheidend ist. So machte Grundey (2015) bereits deutlich, dass Beweise häufig ohne Anknüpfung an Erfahrungen der Lernenden oder Vorwissen der Lernenden oder nur implizit behandelt werden. Auch Hemmi (2006, 2008) postuliert, dass es einer expliziten Thematisierung mathematischer Beweise im Mathematikunterricht bedarf, wobei Möglichkeiten zur Reflexion und Diskussion über Beweise im Fach Mathematik hier unterstützend wirken können (Davis, 2000). Dass ein individuelles Beweisverständnis mithilfe von Lerngelegenheiten, die mathematische Beweise explizit thematisieren, gezielt adressiert werden kann, zeigte sich im Rahmen von Studie 3.

In Studie 3 stand die Förderung des individuellen Beweisverständnisses im Fokus. Dass eine solche Förderung sinnvoll ist, ist damit zu begründen, dass Lernende einerseits über ein adäquates Beweisverständnis verfügen sollten (vgl. Abschnitt 2.4), andererseits aber die bisherige Forschung alters- und inhaltsübergreifend (vgl. Abschnitt 2.3.1) und darüber hinaus auch die Ergebnisse der Studien 1 und 2 Schwierigkeiten der Lernenden im Bereich mathematischer Beweise gezeigt haben. Beispielsweise könnte die Förderung affektiv-motivationaler Aspekte im Bereich mathematischer Beweise dazu beitragen, dass sich Lernende regelmäßig mit Beweisen auseinandersetzen und dadurch ihre Fertigkeiten und ihr Wissen verbessern (Roesken et al., 2011). Eine solche Förderung könnte sich positiv im individuellen Beweisverständnis der Lernenden widerspiegeln. Inwiefern eine gezielte Förderung

einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses bei Lernenden tatsächlich möglich ist, wurde im Rahmen der **übergreifenden Forschungsfrage 3.2** betrachtet. Der Fokus lag dabei auf dem Wissen über Beweisprinzipien, da sich eine Förderung des Wissens über Beweise auch positiv auf affektiv-motivationale Aspekte der Lernenden auswirken kann (Jahnke & Ufer, 2015), was wiederum den Lernerfolg im weiteren Verlauf positiv beeinflussen kann (Zaslavsky et al., 2012). Im Rahmen von Studie 3 konnte gezeigt werden, dass eine gezielte Förderung mit Hilfe von nur fünf Interventionsstunden verteilt über das zweite Halbjahr des 9. Jahrgangs möglich ist (vgl. Kapitel 6.2). Obwohl Beweisprinzipien in den Interventionsstunden explizit thematisiert wurden (Hemmi, 2008), zeigte sich jedoch, dass im Post-Test nur für das handlungsorientierte Wissen über Beweisprinzipien ein signifikanter Unterschied zwischen Kontroll- und Interventionsgruppe gezeigt werden konnte. Eine mögliche Erklärung dafür, dass sich kein vergleichbarer Effekt für das konzeptorientierte Wissen über Beweisprinzipien zeigte, wurde oben bereits im Zusammenhang mit möglichen Schwächen in der Art der Operationalisierung des konzeptorientierten Wissens über Beweisprinzipien diskutiert. Dass das handlungsorientierte Wissen über Beweisprinzipien durch die Intervention ansteigt, ist dennoch als Erfolg zu bewerten. Betrachtet man darüber hinaus mögliche Zusammenhänge mit anderen Aspekten des Beweisverständnisses, so kann beispielsweise eine Förderung des Wissens über Beweise das Beweisbedürfnis der Lernenden stärken (Jahnke & Ufer, 2015; Zaslavsky et al., 2012), was letztlich die Nutzung der Lernangebote durch die Lernenden stärken könnte, da die Nützlichkeit von Beweisen deutlicher wird (Brunner, 2013). Da Fertigkeiten im Bereich mathematischer Beweise nur eingeschränkt durch die eigenständige Auseinandersetzung mit handlungsorientierten Aufgaben erworben werden können (Hmelo-Silver et al., 2007), lässt eine gezielte Förderung des Wissens über Beweise hoffen, dass sich auch eine Verbesserung im Bereich der Fertigkeiten zeigt.

Inwiefern ein adäquates individuelles Beweisverständnis tatsächlich zum Erfolg im Bereich der Beweisaktivitäten beitragen kann, wurde im Rahmen der (explorativen) **übergreifenden Forschungsfrage 3.3** untersucht. Diesbezüglich zeigte sich in Studie 2 kein Zusammenhang zwischen dem Wissen über Beweisprinzipien und den selbsteingeschätzten Fähigkeiten in der Beweiskonstruktion. Vielmehr lässt sich vermuten, dass sich die Schülerinnen und Schüler ihres mangelnden Wissens über Beweise nicht bewusst zu sein scheinen und sich hinsichtlich ihrer Fertigkeiten

überschätzen (Kruger & Dunning, 1999; Marco, 2021 - vgl. Abschnitt 5.7). Ergebnisse bisheriger Forschung legen dennoch nahe, dass ein adäquates individuelles Beweisverständnis zum Erfolg im Umgang mit mathematischen Beweisen beitragen kann (z. B. Chinnappan et al., 2012; Reiss et al., 2001; Ufer et al., 2008). Die Tatsache, dass auch Studierende noch unzureichende Fertigkeiten aufweisen und daher Schwierigkeiten im Umgang mit mathematischen Beweisen haben (Hemmi, 2006; Kempen, 2019; Moore, 1994; Weber, 2001), lässt vermuten, dass ihr individuelles Beweisverständnis noch nicht ausreicht, um zum Erfolg bei Beweisaktivitäten beizutragen. Dass sich hingegen ein moderater bis starker signifikanter Zusammenhang zwischen dem Beweisbedürfnis und den selbsteingeschätzten Fertigkeiten zeigt, unterstreicht die Bedeutung der Einsicht in die Notwendigkeit mathematischer Beweise für den Lernerfolg und damit für die Förderung vom Wissen über Beweise (Zaslavsky et al., 2012).

7.2 Limitationen

Wie zuvor dargestellt, haben die empirischen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit eine Beantwortung aller gestellten übergreifenden Forschungsfragen ermöglicht. Allerdings gibt es wie bei allen empirischen Studien Limitationen, die bei der Interpretation der Ergebnisse zu berücksichtigen sind und Ausgangspunkt für die weiterführende Forschung bilden können. Spezifische Limitationen der einzelnen Studien, die bereits in den Kapiteln 4, 5 und 6 benannt wurden – beispielsweise die Beschränkungen bei der Stichprobenwahl – werden dabei im Folgenden nicht noch einmal fokussiert. Stattdessen werden übergreifende Limitationen hervorgehoben.

Die **Operationalisierung** des individuellen Beweisverständnisses hatte zur Folge, dass nicht alle Aspekte, die dem Rahmenmodell theoretisch begründet zugeordnet werden können, auch in den empirischen Studien berücksichtigt werden konnten. Da das Rahmenmodell in Abb. 3.2 insgesamt fünf Aspekte (Wissen über Beweise, subjektive Überzeugung von und durch Beweise, Einstellungen gegenüber Beweisen, subjektives Beweisbedürfnis sowie Lernmotivation bezüglich Beweisen) vorsieht, die sowohl konzept- als auch handlungsorientiert betrachtet und darüber hinaus auch hinsichtlich der vier fachlichen Aspekte (Beweisprinzipien, Beweisfunktionen, Beweispräsentationen, Beweismethoden) inhaltlich spezifiziert werden können, musste hier eine Auswahl getroffen werden. Außerdem wurde bei der

Operationalisierung mit einem handlungsorientierten Fokus beispielsweise in allen Untersuchungen die Beweisvalidierung genutzt und das Beweisverstehen, die Beweisevaluierung und die Beweiskonstruktion zunächst nicht untersucht. Darüber hinaus wurde keine Differenzierung hinsichtlich der mathematischen Teilgebiete vorgenommen. Obwohl davon auszugehen ist, dass sich ein Beweisverständnis im Kontext der Geometrie von einem Beweisverständnis im Kontext der Algebra unterscheiden kann (Healy & Hoyles, 2000; Heinze, 2004), wurde dies bei der Operationalisierung und Auswertung der Daten nicht systematisch berücksichtigt, da dies den Rahmen der den Lernenden zumutbaren Testzeit überschritten hätte. Insgesamt sind durch diese exemplarische und damit eingeschränkte Betrachtung des individuellen Beweisverständnisses einerseits nur eingeschränkte Aussagen zur empirischen Absicherung des Modells möglich (übergreifende Forschungsfrage 1.2). So zeigte sich zwar, dass die Unterscheidung zwischen einem konzept- und einem handlungsorientierten Fokus auch empirisch darstellbar ist, allerdings wurde dies nur für die Aspekte Wissen über Beweisprinzipien, subjektive Überzeugung von und durch Beweise sowie subjektives Beweisbedürfnis gezeigt. Weitere Aspekte und inhaltliche Spezifizierungen dieser wären diesbezüglich in weiteren Studien zu untersuchen. Andererseits ist diese Einschränkung durch die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses bei den erzielten Ergebnissen zu einem individuellen Beweisverständnis von Lernenden zu berücksichtigen (übergreifende Forschungsfragen 2.1 und 2.2). Darüber hinaus wäre eine Absicherung des jeweiligen fachlichen Beweisverständnisses und damit der sozio-mathematischen Normen in dem vorliegenden Diskursrahmen hilfreich gewesen, um die **Bewertung** des individuellen Beweisverständnisses abzusichern (Dawkins & Weber, 2017). Dies hätte jedoch eine eigenständige unabhängige Studie impliziert, da zur Erfassung des Diskursrahmens Daten von einer Vielzahl an Personen (Lehrkräfte, Dozierende) sowie Unterrichtsbeobachtungen notwendig gewesen wären. Die Untersuchung weiterer Aspekte des individuellen Beweisverständnisses und ihrer Zusammenhänge unter Berücksichtigung verschiedener mathematischer Teilgebiete sowie der jeweiligen sozio-mathematischen Normen könnte in diesem Zusammenhang mehr Sicherheit für die Interpretation der Ergebnisse, aber auch weitere Einsichten geben.

Die im Rahmen der empirischen Untersuchungen des Beweisverständnisses angegebenen **Korrelationen** (sowohl einzelner Aspekte des individuellen Beweisverständnisses als auch konzept- und handlungsorientierter Unterscheidungen)

liefern zwar erste Hinweise auf Zusammenhänge einzelner Aspekte und tragen somit zu einem differenzierteren Einblick in das Beweisverständnis der Lernenden bei, lassen jedoch keine **kausalen Schlussfolgerungen** zu. Beispielsweise könnte ein unzureichendes konzeptorientiertes Wissen über Beweisprinzipien zum einen eine Erklärung dafür sein, dass bei der Konstruktion eines mathematischen Beweises eine Beweiskette nicht eingehalten wird und somit ein unzureichendes handlungsorientiertes Wissen über Beweise vorliegt. Zum anderen könnte sich der Aufbau eines handlungsorientierten Wissens über Beweise aber auch positiv auf den Aufbau eines adäquaten konzeptorientierten Wissens über Beweise auswirken. Solche kausalen Erkenntnisse könnten differenziertere Aussagen über das Beweisverständnis von Lernenden sowie gezieltere Fördermaßnahmen ermöglichen. Zur Entwicklung des individuellen Beweisverständnisses liefert die quasi-längsschnittliche Studie 2 zwar einen guten ersten Eindruck, Rückschlüsse auf längsschnittliche Entwicklungen und Kausalitäten sind jedoch nicht möglich, was die Beschreibung eines individuellen Beweisverständnisses im Verlauf einschränkt. Damit bleibt offen, ob die Unterschiede im individuellen Beweisverständnis zwischen den Lernenden unterschiedlicher Ausbildungsphasen durch bestimmte Lerngelegenheiten zum mathematischen Beweisen zu erklären sind.

Um die Ergebnisse zum individuellen Beweisverständnis und dessen Entwicklung besser interpretieren zu können, wären schließlich detaillierte Informationen zur **Lernumgebung zum Beweisen** hilfreich. Es fehlen aktuell beispielsweise Informationen darüber, welche Lernangebote die Lernenden erhalten sowie welche Kenntnisse und welche Überzeugungen die Lehrpersonen im Bereich des mathematischen Beweises bzw. bezüglich des Unterrichtens in diesem Bereich haben. Entsprechend können keine Aussagen darüber gemacht werden, wodurch ein individuelles Beweisverständnis erfolgreich aufgebaut werden kann. Die diesbezüglich in Studie 1 erhobene Informationen lassen nur eine eingeschränkte Interpretation der Ergebnisse zu, da es sich um selbstberichtete schulische Vorerfahrungen zur Quantität der Lerngelegenheiten handelt. Informationen aus der Sicht der Lehrpersonen oder zu den verwendeten Unterrichtsmaterialien und Schulbüchern wären hier hilfreich, um besser beschreiben zu können, wodurch die Entwicklung eines individuellen Beweisverständnisses beeinflusst wird. Es ist jedoch zu beachten, dass solche Informationen retrospektiv nur schwer zu erheben sind,

beispielsweise durch Lehrkräftewechsel oder Durchmischung der Klassen, und daher nur im Rahmen eines echten Längsschnitts vertretbar erhoben werden können.

7.3 Ausblick und Fazit

Da trotz der Relevanz für Forschung und Praxis bisher keine theoretisch fundierte Konzeptualisierung des mathematischen Beweisverständnisses in der Forschungsliteratur zu existieren scheint, wurde in dieser Arbeit ein theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis entwickelt und empirisch validiert. Fehlende Informationen darüber, wie sich ein individuelles Beweisverständnis von Lernenden im Verlauf der mathematischen Ausbildung beschreiben lässt, wurden im Rahmen der drei empirischen Studien dieser Arbeit adressiert. Darüber hinaus wurden Unterrichtsmaterialien zur gezielten Förderung des individuellen Beweisverständnisses entwickelt und evaluiert. Die vorliegende Arbeit leistet damit einen Beitrag sowohl für die Forschung als auch für die Praxis.

7.3.1 Implikation für die Forschung

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte theoretische Rahmenmodell zum Beweisverständnis bietet eine gemeinsame Basis für zukünftige Forschung in diesem Bereich. Da die Erkenntnisse der bisherigen Forschung bei der Entwicklung berücksichtigt wurden, wird die Vergleichbarkeit sowie die Einordnung bisheriger wie zukünftiger Forschungsergebnisse in einen Gesamtkontext des Beweisverständnisses erleichtert. Systematische Untersuchungen des Beweisverständnisses und dessen Entwicklung werden möglich, wobei Operationalisierungen ausgehend vom Rahmenmodell vorgenommen werden können. Beispielsweise ermöglicht die Berücksichtigung von Unterschieden im fachlichen Beweisverständnis, und damit von unterschiedlichen sozio-mathematischen Normen (Dawkins & Weber, 2017; Yackel & Cobb, 1996) sowie die Berücksichtigung eines konzept- und handlungsorientierten Fokus bei der Operationalisierung eines individuellen Beweisverständnisses, differenziertere Aussagen über das individuelle Beweisverständnis. Gleichzeitig kann je nach Forschungszielen das Rahmenmodell leicht adaptiert (bspw. durch einen Aspekt ergänzt) und hinsichtlich der verschiedenen Unterscheidungen mehr oder weniger differenziert betrachtet werden.

Auch wenn ein stärker systematisches Vorgehen bei der Untersuchung des Beweisverständnisses durch das theoretische Rahmenmodell erleichtert wird, wurde bereits in Abschnitt 7.2 deutlich, dass über die präsentierten Studien hinaus weitere empirische Absicherungen der theoretisch begründeten Unterscheidungen im Rahmenmodell notwendig sind. So könnten beispielsweise Untersuchungen des individuellen Beweisverständnisses vorgenommen werden, die neben Beweisprinzipien weitere inhaltliche Spezifizierungen (Beweisfunktionen, Beweismethoden, Beweispräsentationen) berücksichtigt werden. Validierungen durch Expertinnen und Experten könnten die Entwicklung weiterer Operationalisierungen des individuellen Beweisverständnisses unterstützen und absichern.

Mithilfe des Modells und darauf basierend entwickelten Operationalisierungen können weitere empirische Untersuchungen zur Beschreibung des individuellen Beweisverständnisses (im Verlauf der mathematischen Ausbildung) durchgeführt werden. Bei einer gezielten Betrachtung der Wirkungszusammenhänge einzelner Aspekte könnte es möglich sein, einen zentralen Aspekt oder einige wenige zentrale Aspekte des individuellen Beweisverständnisses zu identifizieren, deren Untersuchung ausreicht, um zentrale Aussagen über das individuelle Beweisverständnis als Gesamtkonstrukt zu machen und einen Gesamteindruck zu erhalten. Die Untersuchung des individuellen Beweisverständnisses in einem längsschnittlichen Untersuchungsdesign würde Aussagen zur Entwicklung ermöglichen, wobei durch geeignete Forschungsdesigns kausale Zusammenhänge fokussiert werden können. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte quasi-längsschnittliche Studie deutete bereits an, dass eine solche Untersuchung lohnenswert sein kann. Schließlich könnte ein Cross-Lagged-Panel-Design sinnvoll sein, um Zusammenhänge zwischen einzelnen Aspekten im Verlauf systematisch zu untersuchen. Hier könnten beispielsweise zwei als zentral identifizierte Aspekte des individuellen Beweisverständnisses betrachtet werden. Werden zusätzlich die Lernumgebungen zum Beweisen (Qualität und Quantität der Lernangebote, Wissen und Überzeugungen der Lehrpersonen etc.) systematisch betrachtet, kann letztlich spezifiziert werden, zu welchem Zeitpunkt und in welcher Form eine Förderung des individuellen Beweisverständnisses sinnvoll ist. Ein möglicher Ansatzpunkt für die Untersuchung der Lernumgebungen wäre die Frage, inwieweit Beweise und damit assoziierte Aktivitäten in Mathematikschulbüchern, als zentrale Determinante des Mathematikunterrichts und damit der Lernangebote, vorkommen. Darüber hinaus

bleibt offen, ob Herausforderungen beim Lehren mathematischer Beweise (Heinze & Reiss, 2004; Stylianou et al., 2009) mithilfe von Unterrichtskonzepten, die die Ausbildung eines individuellen Beweisverständnisses der Lernenden fokussieren, adressiert werden können und ob sich ein Fortbildungsbedarf für Lehrpersonen ableiten lässt.

In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass eine gezielte Förderung des Wissens über Beweisprinzipien durch eine Kurzintervention in Klassenstufe 9 möglich ist. Aufbauend darauf sollten jedoch im Rahmen zukünftiger Forschung untersucht werden, wie sich diese Effekte im Vergleich zu anderen Maßnahmen darstellen. Wird darüber hinaus auf den Zusammenhang mit Fertigkeiten im Bereich der Beweisaktivitäten fokussiert, lässt sich die Bedeutung eines adäquaten individuellen Beweisverständnisses für den Erfolg im Umgang mit Beweisen beschreiben (Reiss et al., 2001; Ufer et al., 2008). Dies wurde exemplarisch im Rahmen der dritten Studie dieser Arbeit umgesetzt und die Fertigkeiten der Lernenden im Bereich der Beweiskonstruktion untersucht. Die Auswertung der Ergebnisse steht aktuell noch aus.

7.3.2 Implikation für die Praxis

Dass sich im Rahmen dieser Arbeit einerseits zeigte, dass Lernende in den verschiedenen Phasen der mathematischen Ausbildung über ein eher schwach bis moderat ausgeprägtes individuelles Beweisverständnis zu verfügen scheinen und gleichzeitig aus der Forschung bekannt ist, dass sie im Bereich mathematischer Beweise inhalts- und altersübergreifend Schwierigkeiten zeigen, legt nahe, dass diesbezüglich ein Förderbedarf besteht. Insbesondere, um den Übergang von der Schule in die Hochschule als zentralen Schritt im Enkulturationsprozess in die Argumentationskultur der Mathematik zu erleichtern, aber auch im Sinne der Winterschen Grunderfahrung sowie der curricularen Verankerung mathematischer Beweise (z. B. KMK, 2012) sollten Lehrende darauf achten, dass Schülerinnen und Schüler im Rahmen der mathematischen Ausbildung ein adäquates Beweisverständnis aufbauen. Mögliche Ansätze zur Förderung des individuellen Beweisverständnisses liefert (neben den in Abschnitt 2.3.4 angesprochenen Maßnahmen zur Förderung) die in dieser Arbeit entwickelte Intervention, die eine explizite Diskussion und Reflexion von Beweisprinzipien im Zusammenhang mit mathematischen Beweisen anregt.

Schließlich erscheint die Unterscheidung zwischen einem fachlichen Beweisverständnis und einem individuellen Beweisverständnis nicht nur aus

theoretischer Sicht sinnvoll, sondern kann darüber hinaus für die Praxis genutzt werden. Zum einen kann durch eine gezielte Absprache von Normen bezüglich der Gültigkeit mathematischer Beweise im Rahmen der mathematischen Ausbildung eine verbindliche Orientierungsgrundlage geschaffen werden, die ein Anknüpfen im weiteren Verlauf der mathematischen Ausbildung oder bei einem Wechsel einer Lehrperson erleichtern kann. Eine explizite Thematisierung der sozio-mathematischen Normen im bestehenden Diskursrahmen und deren Transparenz kann den Lernenden helfen, ein adäquates individuelles Beweisverständnis aufzubauen (Dawkins & Weber, 2017; Neuhaus-Eckhardt, 2022; Yackel & Cobb, 1996). Lernende sollten erfahren, dass mathematische Beweise nicht willkürlichen Regeln folgen. Im Rahmen der mathematischen Ausbildung sollte sowohl explizit über Beweise diskutiert und reflektiert werden (Davis, 2000; Hemmi, 2006, 2008) als auch ein Einblick in den Prozess mathematischen Beweisens gegeben werden (Kuntze, 2005; Reiss et al., 2006; Reiss & Renkl, 2002), um Fertigkeiten erfolgreich zu entwickeln (Hmelo-Silver et al., 2007). Die Tatsache, dass auch Studierende noch Schwierigkeiten im Beweisverständnis zeigen, unterstreicht die Notwendigkeit einer expliziten Thematisierung mathematischer Beweise, die über das alleinige Erlernen durch Nachahmung hinausgeht. Insbesondere die Einsicht in die Notwendigkeit des Beweisens und damit das Kennenlernen verschiedener Beweisfunktionen kann hierfür geeignet sein (Jahnke & Ufer, 2015; Zaslavsky et al., 2012).

7.3.3 Fazit

Insgesamt stellt die Arbeit sowohl eine theoretische als auch eine empirische Basis für zukünftige Forschung zum Beweisverständnis von Lernenden dar und ist Ausgangspunkt für eine gezielte Förderung. So wird durch das theoretische Rahmenmodell zum Beweisverständnis deutlich, dass Lernende nicht nur kognitive Grundlagen bezüglich mathematischer Beweise erwerben müssen, sondern mathematische Beweise auch hinsichtlich ihrer affektiv-motivationalen Merkmale bewerten und sich deren Relevanz bewusst sein müssen. Dies muss sowohl konzeptorientiert, d.h. abstrakt und unabhängig von spezifischen mathematischen Beweisen, als auch handlungsorientiert und damit in Verbindung mit einem konkreten Argumentationsbeispiel, also in Kombination mit einer Beweisaktivität, erfolgen. Das theoretische Rahmenmodell dient somit nicht nur der theoretischen Fundierung, sondern definiert konkrete (Lern-)Ziele im Kontext eines mathematischen Beweisverständnisses, die in dieser Granularität bisher fehlten.

Abbildungsverzeichnis

Abb. 2.1: Phasenmodell des Beweisens von Boero (1999) (nach Reiss und Ufer, 2009).	7
Abb. 2.2: Drei Aspekte zur praxisorientierten Definition eines mathematischen Beweises (Stylianides, 2007).	11
Abb. 2.3: Übergreifende Forschungsfragen zum theoretischen Rahmenmodell zum Beweisverständnis.....	30
Abb. 2.4: Übergreifende Forschungsfragen zum Beweisverständnis von Lernenden.	31
Abb. 2.5: Übergreifende Forschungsfragen zum individuellen Beweisverständnis im Kontext von Lerngelegenheiten und Prädiktivität.....	32
Abb. 3.1: Übersicht der übergreifenden Forschungsfragen der Arbeit und wie diese mithilfe der empirischen Studien dieser Arbeit adressiert werden.....	34
Abb. 3.2: Theoretisches Rahmenmodell zum Beweisverständnis (englischsprachige Version s. Kapitel 4).	36
Abb. 3.3: Beispiel einer handlungsorientierten Operationalisierung aus Ufer et al. (2009).	40
Abb. 3.4: Die grün markierten Aspekte des individuellen Beweisverständnisses sind diejenigen, die im Rahmen der Studie 1 fokussiert und in dieser Arbeit betrachtet wurden. Die hellgrünen Markierungen im fachlichen Beweisverständnis machen deutlich, dass die fokussierten Aspekte des individuellen Beweisverständnis inhaltlich auf Beweisprinzipien und Beweismethoden spezifiziert wurden.	44
Abb. 3.5: Die vier in Studie 1 fokussierten Forschungsfragen, die als Spezifizierung der übergreifenden Forschungsfragen dieser Arbeit zu verstehen sind (vgl. Abb. 3.1). Die Kennzeichnung (*) weist darauf hin, dass die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses in dieser Studie die in Abb. 3.4 markierten Aspekte umfasst. Der grundsätzliche Gedanke der übergreifenden Forschungsfrage bleibt bei der Spezifizierung erhalten.	45
Abb. 3.6: Die blau markierten Aspekte des individuellen Beweisverständnisses sind diejenigen, die im Rahmen der Studie 2 fokussiert und in dieser Arbeit betrachtet wurden. Die hellblaue Markierung im fachlichen Beweisverständnis macht deutlich, dass die fokussierten Aspekte des individuellen Beweisverständnis inhaltlich auf Beweisprinzipien spezifiziert wurden.....	47

Abb. 3.7: Die fünf in Studie 2 fokussierten Forschungsfragen, die als Spezifizierung der übergreifenden Forschungsfragen dieser Arbeit zu verstehen sind (vgl. Abb. 3.1). Die Kennzeichnung (*) weist darauf hin, dass die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses in dieser Studie die in Abb. 3.6 markierten Aspekte umfasst. Der grundsätzliche Gedanke der übergreifenden Forschungsfrage bleibt bei der Spezifizierung erhalten.	48
Abb. 3.8: Ablauf der quasi-experimentellen Studie.	51
Abb. 3.9: Die gelb markierten Aspekte des individuellen Beweisverständnisses sind diejenigen, die im Rahmen der Studie 3 fokussiert und in dieser Arbeit betrachtet wurden. Die hellgelbe Markierung im fachlichen Beweisverständnis macht deutlich, dass die fokussierten Aspekte des individuellen Beweisverständnis inhaltlich spezifiziert wurden.	52
Abb. 3.10: Die zwei Forschungsfragen, die in Studie 3 fokussiert wurden und als Spezifizierung der übergreifenden Forschungsfragen dieser Arbeit zu sehen sind (vgl. Abb. 3.1). Die Kennzeichnung (*) weist darauf hin, dass die Operationalisierung des individuellen Beweisverständnisses in dieser Studie die in Abb. 3.9 markierten Aspekte umfasst. Der grundsätzliche Gedanke der übergreifenden Forschungsfrage bleibt bei der Spezifizierung erhalten.	53
Fig. 4.1: Conceptual framework for understanding of proof.	64
Fig. 4.2: Action-oriented item used by Healy & Hoyles (1998) focusing on validation of Ceri's purported proof (presentation of the item adjusted by authors).	67
Fig. 4.3: (Content-wise specified) aspects of the conceptual framework for understanding of proof surveyed with the two questionnaires. *: concerning proof principles for one part of the participants (N = 116) **: concerning proof methods for the other part of the participants (N = 118).	73
Fig. 4.4: Item example used in the study for measuring concept-oriented beliefs about proof.	75
Fig. 4.5: Item example used in the study for measuring action-oriented knowledge about proof principles.	75
Fig. 5.1: Conceptual framework for understanding of proof.	97
Fig. 5.2: Item example used in the questionnaire for measuring action-oriented knowledge about proof principles. 106	106
Abb. 6.1: Ablauf der Intervention zur Förderung des Beweisverständnisses.	118
Abb. 6.2: Zwei verschiedene Begründungsansätze, die für den Einstieg in die Doppelstunde genutzt werden [T1].	120
Abb. 6.3: Aufgaben eines Arbeitsblattes, die zur Klärung der Begriffe Voraussetzung und Behauptung genutzt werden [T1].	121
Abb. 6.4: Beweispuzzle als ein Teil der Hausaufgabe von [T1].	122
Abb. 6.5: Gültiger und ungültiger Beweis als Teil eines Arbeitsblattes zur Erarbeitung von Beweisprinzipien [T2].	124

Abb. 6.6: Ausschnitt eines Arbeitsblattes zur Erarbeitung von Beweisprinzipien [T2].	125
Abb. 6.7: Ausschnitt eines Arbeitsblattes zur Erarbeitung von Beweisprinzipien [T3].	127
Abb. 6.8: Ausschnitt eines Arbeitsblattes zur Wiederholung der Kriterien für die Gültigkeit mathematischer Beweise und Diskussionsgrundlage der Lückenlosigkeit sowie Kontextabhängigkeit mathematischer Beweise [T4].	129
Fig. 6.1: Example item used in the study for measuring action-oriented knowledge about proof principles (translated; Sporn et al., 2022).	134
Fig. 6.2: Descriptive results (Mean, SD) for S_{coK} , S_{aoK} , $S_{aoK-Justification}$	137

Tabellenverzeichnis

Table 4.1: Instruments employed for assessing participants' understanding of proof.	74
Table 4.2: Exemplary description of items for assessing participants' learning opportunities regarding proof in school (left column) together with the response options for each item (right column).	76
Table 4.3: Descriptive statistics for the (content-wise specified) aspects of individual's understanding of proof.	78
Table 4.4: Correlations within the two foci: between the four concept-oriented and the two action-oriented (content-wise specified) aspects of the individual's understanding of proof.	80
Table 4.5: Percentages of participants' answers concerning the number of self-created proofs and of treated proofs in lower or upper secondary level (N = 234).	81
Table 4.6: Correlations between number of self-created proofs and the six single (content-wise specified) aspects of individual's understanding of proof.	82
Table 4.7: Information on the selection frequency of either answer category based on the eleven presented theorems. (Percentages of participants' answers).	89
Table 5.1: Sample and questionnaire versions of grades.	104
Table 5.2: Instruments employed for data collection.	105
Table 5.3: Descriptive statistics (Mean and SD) for knowledge about proof principles as well as need for proof both with concept- and action-oriented focus for grades 8 to 11.	107
Table 5.4: (RQ2) Pearson correlations between S_{coK} and $S_{coN'}$ as well as between S_{aoK} and $S_{aoN'}$	109
Table 5.5: (RQ3) Pearson correlations between the single aspects of students' understanding of proof (S_{coK} , S_{aoK} , $S_{coN'}$, $S_{aoN'}$) and their self-assessed ability to construct proofs ($S_{SACP'}$).	109
Table 5.6: Descriptive statistics for (concept- and action-oriented) knowledge about proof principles for grades 8 to 11 considering school and class.	115

Literaturverzeichnis

- Aberdein, A. (2009). Mathematics and Argumentation. *Foundations of Science*, 14(1-2), 1-8. <https://doi.org/10.1007/s10699-008-9158-3>
- Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *The Journal of Mathematical Behavior*, 24(2), 125-134.
- Andersen, L. E. (2018). Acceptable gaps in mathematical proofs. *Synthese*, 197(1), 233-247. <https://doi.org/10.1007/s11229-018-1778-8>
- Andriessen, J. (2006). Arguing to learn. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of: The learning sciences* (pp. 443-459). Cambridge University Press.
- Azrou, N. (2017). Meta-mathematical knowledge about proof. In *CERME 10*. Dublin, Ireland.
- Azzouni, J. (2004). The derivation-indicator view of mathematical practice. *Philosophia Mathematica*, 12(2), 81-106.
- Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high-school level. In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Proceedings of the Second UCSMP international conference on mathematics education*. (pp. 284-297). NCTM.
- Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 173-192). Kluwer Academic Publisher.
- Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM*, 40(3), 501-512. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0103-2>
- Balacheff, N. (2010). *Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective*. Springer.
- Bandura, A. (1976). *Lernen am Modell. Ansätze zu einer sozial-kognitiven Lerntheorie* (1st ed.). Klett.
- Bell, A. W. (1976). A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7(1/2), 23-40.
- Bender, P., & Jahnke, H. (1992). Intuition and rigor in mathematics instruction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 7, 259-264.
- Bieda, K. N., Bieda, K. N., Conner, A., Kosko, K. W., Staples, M., & SpringerLink. (2022). *Conceptions and Consequences of Mathematical Argumentation, Justification, and Proof* (1st 2022. ed.). Springer International Publishing : Imprint: Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-80008-6>
- Bieda, K. N., & Lepak, J. (2014). Are You Convinced? Middle-Grade Students' Evaluations of Mathematical Arguments. *School Science and Mathematics*, 114(4), 166-177. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/ssm.12066>
- Biehler, R., & Kempen, L. (2016). Didaktisch orientierte Beweiskonzepte—Eine Analyse zur mathematikdidaktischen Ideenentwicklung. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 1(37), 141-179.

- Bittinger, M. L. (1968). *The effect of a unit in mathematical proof on the performance of college mathematics majors in future mathematics courses*. Dissertation, Purdue University.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7(8).
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (2010). Argumentation and proof: A contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. In M. M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-209). Brasilien: PME.
- Brunner, E. (2013). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I: mögliche Erklärungen für systematische Bearbeitungsunterschiede und leistungsförderliche Aspekte*. Waxmann Verlag.
- Buchbinder, O., & McCrone, S. (2020). Preservice teachers learning to teach proof through classroom implementation: Successes and challenges. *The Journal of Mathematical Behavior*, 58, 100779.
- Buchbinder, O., & Zaslavsky, O. (2008). Uncertainty: A driving force in creating a need for proving. *International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), Study*, 19.
- Buff, A., Reusser, K., & Pauli, C. (2010). Die Qualität der Lernmotivation in Mathematik auf der Basis freier Äusserungen: Welches Bild präsentiert sich bei Deutschschweizer Schülerinnen und Schülern im 8. und 9. Schuljahr? In K. Reusser, C. Pauli, & M. Waldis (Eds.), *Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität. Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht* (pp. 253-278). Waxmann.
- Cabassut, R., Conner, A., Işçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N., & Morselli, F. (2012). Conceptions of proof–In research and teaching. In G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 169-190). Springer.
- CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof? *Journal of humanistic mathematics*, 1(1), 33-60.
- CCSSI. (2010). *Common core state standards for mathematics*. National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359-387.
- Chinnappan, M., Ekanayake, M. B., & Brown, C. (2012). Knowledge use in the Construction of Geometry Proof by Sri Lankan Students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(4), 865-887. <https://doi.org/10.1007/s10763-011-9298-8>
- Dana-Picard, T. N. (2023). Computer Assisted Proofs and Automated Methods in Mathematics Education. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science*, 375, 2-23. <https://doi.org/10.4204/eptcs.375.2>
- Davis, E. A. (2000). Scaffolding students' knowledge integration: prompts for reflection in KIE. *International Journal of Science Education*, 22(8), 819-837. <https://doi.org/10.1080/095006900412293>

- Dawkins, P. C., & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 123-142. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9740-5>
- De Guzmán, M., Hodgson, B. R., Robert, A., & Villani, V. (1998). Difficulties in the passage from secondary to tertiary education. In *Proceedings of the international Congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 747-762). Documenta Mathematica Berlin.
- De Villiers, M. (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.
- Di Martino, P., & Gregorio, F. (2019). The mathematical crisis in secondary–tertiary transition. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 825-843.
- Dreyfus, T. (1999). Why Johnny can't prove. *Educational Studies in Mathematics*, 38, 85-109.
- Dreyfus, T., Nardi, E., & Leikin, R. (2012). Forms of proof and proving in the classroom. In G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 191-213). Springer.
- Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of mathematics*, 3(2), 9-24.
- Fischer, A., Heinze, A., & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule–Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium*, 245-264.
- Fischer, R., & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik: eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln* (1 ed.). BI-Wissenschaftsverlag.
- Fujita, T., & Jones, K. (2003). Critical review of geometry in current textbooks in lower secondary schools in Japan and the UK. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Honolulu: PME.
- Geisler, S., Rach, S., & Rolka, K. (2023). The relation between attitudes towards mathematics and dropout from university mathematics—the mediating role of satisfaction and achievement. *Educational Studies in Mathematics*, 1-23.
- Geisler, S., & Rolka, K. (2021). “That wasn't the math I wanted to do!”—Students' beliefs during the transition from school to university mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19, 599-618.
- Giaquinto, M. (2005). Mathematical activity. In P. Macosu, K. F. Jorgensen, & S. A. Pedersen (Eds.), *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics* (pp. 75-87). Springer.
- Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *The American Mathematical Monthly*, 107(1), 1-14.
- Grundey, S. (2015). *Beweisvorstellungen und eigenständiges Beweisen: Entwicklung und vergleichend empirische Untersuchung eines Unterrichtskonzepts am Ende der Sekundarstufe*. Springer.
- Gueudet, G. (2008). Investigating the secondary–tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6>
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 127-150.

- Hamami, Y., & Morris, R. L. (2020). Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators. *ZDM*, 52(6), 1113-1126. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01159-5>
- Hanna, G. (1989). More than formal proof. *For the Learning of mathematics*, 9(1), 20-23.
- Hanna, G. (1997). The ongoing value of proof. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 18(2-3), 171-185.
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 5-23. <https://doi.org/10.1023/A:1012737223465>
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2010). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 85-100). Springer US.
- Hanna, G., & De Villiers, M. (2012a). Aspects of proof in mathematics education. In G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 1-10). Springer.
- Hanna, G., & De Villiers, M. (2012b). *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*. Springer Nature.
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 421-438. <https://doi.org/10.1007/BF01273374>
- Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-908). Springer.
- Hanna, G., & Knipping, C. (2020). Proof in Mathematics Education, 1980-2020: An Overview. *Journal of Educational Research in Mathematics*(Special Issue), 1-13.
- Harel, G. (2013). Intellectual need. In K. Leatham (Ed.), *Vital directions for mathematics education research* (pp. 119-151). Springer.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, E. Kaput, E. Dubinsky, & T. Dick (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (pp. 234-283). American Mathematical Society.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). Information Age.
- Healy, L., & Hoyles, C. (1998). *Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey*. Institute of Education, University of London.
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 396-428. <https://doi.org/10.2307/749651>
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer.
- Heinze, A. (2004). Schülerprobleme beim Lösen von geometrischen Beweisaufgaben-eine Interviewstudie. *ZDM*, 36(5), 150-161.
- Heinze, A. (2010). Mathematicians' individual criteria for accepting theorems and proofs: An empirical approach. In G. Hanna, H. N. Jahnke, & H. Pulte (Eds.), *Explanation and proof in mathematics* (pp. 101-111). Springer.
- Heinze, A., & Kwak, J. Y. (2002). Informal prerequisites for informal proofs. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(1), 9-16. <https://doi.org/10.1007/BF02655688>

- Heinze, A., & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 1-10). Bellaria, Italy.
- Heinze, A., & Reiss, K. (2004). The teaching of proof at the lower secondary level—a video study. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 36(3), 98-104. <https://doi.org/10.1007/BF02652777>
- Heinze, A., & Reiss, K. (2007). Reasoning and proof in the mathematics classroom. *Analysis*, 27(2-3), 333-357.
- Heinze, A., & Reiss, K. (2009). Developing argumentation and proof competencies in the mathematics classroom. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and Learning Proof Across the Grades: A K-16 perspective* (pp. 191-203). Routledge.
- Heinze, A., Reiss, K., & Franziska, R. (2005). Mathematics achievement and interest in mathematics from a differential perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(3), 212-220. <https://doi.org/10.1007/s11858-005-0011-7>
- Helmke, A. (2017). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts* (Vol. 7). Kallmeyer.
- Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice*. Stockholm University.
- Hemmi, K. (2008). Students' encounter with proof: the condition of transparency. *ZDM*, 40(3), 413-426. <https://doi.org/10.1007/s11858-008-0089-9>
- Hemmi, K., Lepik, M., & Viholainen, A. (2010). Upper secondary school teachers' views of proof and proving: an explorative cross-cultural study. MAVI16, The 16th Conference of Mathematical Views,
- Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399. <https://doi.org/10.1007/BF01273372>
- Heublein, U., Hutzsch, C., Schreiber, J., Sommer, D., & Besuch, G. (2010). Ursachen des Studienabbruchs in Bachelor-und in herkömmlichen Studiengängen. *Ergebnisse einer bundesweiten Befragung von Exmatrikulierten des Studienjahres*, 8(2).
- Hilbert, D. (1931). Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre. *Mathematische Annalen*, 104(1), 485-494. <https://doi.org/10.1007/BF01457953>
- Hilbert, T. S., Renkl, A., Kessler, S., & Reiss, K. (2008). Learning to prove in geometry: Learning from heuristic examples and how it can be supported. *Learning and Instruction*, 18(1), 54-65. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.10.008>
- Hirst, K., Meacock, S., & Ralha, E. (2004). Student expectations of studying mathematics at university. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA27)* (Vol. 1, pp. 295-302). Citeseer.
- Hmelo-Silver, C. E., Duncan, R. G., & Chinn, C. A. (2007). Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning: a response to Kirschner, Sweller, and. *Educational psychologist*, 42(2), 99-107.
- Hoyles, C., & Healy, L. (2007). Curriculum change and geometrical reasoning. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school* (pp. 79-115). Brill.
- Hsieh, F.-J., Horng, W.-S., & Shy, H.-Y. (2012). From exploration to proof production. In G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 279-303).

- Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 358-390.
- Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Weber, K., & Alcock, L. (2013). On Mathematicians' Different Standards When Evaluating Elementary Proofs. *Topics in Cognitive Science*, 5(2), 270-282. <https://doi.org/10.1111/tops.12019>
- Jahnke, H. N. (1978). *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik: Beweisen als didaktisches Problem* Universität Bielefeld.
- Jahnke, H. N. (2009). Hypothesen und ihre Konsequenzen—ein anderer Blick auf die Winkelsummensätze (7.-13. Klasse). *Praxis der Mathematik für die Schule*, 51, 26-30.
- Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 331-355). Springer Spektrum.
- Jones, K., & Herbst, P. (2012). Proof, proving, and teacher-student interaction: Theories and contexts. In G. Hanna & M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (pp. 261-277). Springer, Dordrecht.
- Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2017). *Algebra in the early grades*. Routledge.
- Kempen, L. (2019). *Begründen und Beweisen im Übergang von der Schule zur Hochschule: Theoretische Begründung, Weiterentwicklung und Evaluation einer universitären Erstsemesterveranstaltung unter der Perspektive der doppelten Diskontinuität*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Kirsten, K. (2021). *Beweisprozesse von Studierenden: Ergebnisse einer empirischen Untersuchung zu Prozessverläufen und phasenspezifischen Aktivitäten*. Springer Fachmedien Wiesbaden.
- Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics magazine*, 64(5), 291-314.
- KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)*. Wolters Kluwer München.
- KMK. (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*.
- Knipping, C. (2002). Die Innenwelt des Beweisens im Mathematikunterricht: Vergleiche von französischen und deutschen Mathematikstunden. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34, 258-266.
- Knuth, E., Zaslavsky, O., & Ellis, A. (2019). The role and use of examples in learning to prove. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 256-262. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.06.002>
- Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of mathematics teacher education*, 5, 61-88.
- Ko, Y.-Y., & Knuth, E. J. (2013). Validating proofs and counterexamples across content domains: Practices of importance for mathematics majors. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 20-35.
- Ko, Y.-Y., & Rose, M. K. (2022). Considering Proofs: Pre-Service Secondary Mathematics Teachers' Criteria for Self-Constructed and Student-Generated Arguments. *The Journal of Mathematical Behavior*, 68, 100999.
- Kosiol, T., Rach, S., & Ufer, S. (2019). (Which) mathematics interest is important for a successful transition to a university study program? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17, 1359-1380.

- Kotelawala, U. (2009). A survey of teacher beliefs on proving. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. De Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 250-255). National Taiwan Normal University: Department of Mathematics.
- Kruger, J., & Dunning, D. (1999). Unskilled and unaware of it: how difficulties in recognizing one's own incompetence lead to inflated self-assessments. *Journal of personality and social psychology*, 77(6), 1121-1134.
- Küchemann, D., & Hoyles, C. (1999). The Longitudinal Proof Project. *A Longitudinal Study of Mathematical Reasoning: Student Development and School Influences*.
- Kunimune, S., Fujita, T., & Jones, K. (2008). "Why do we have to prove this?" Fostering students' understanding of 'proof' in geometry in lower secondary school. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education* (pp. 877-980). National Taiwan Normal University.
- Kuntze, S. (2005). "Wozu muss man denn das beweisen?" Vorstellungen zu Funktionen des Beweisens in Texten von Schülerinnen und Schülern der 8. Jahrgangsstufe. *mathematica didactica*, 28, 48-70.
- Kuntze, S. (2008). Fostering geometrical proof competency by student-centred writing activities. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 289-296). Mexiko: PME.
- Lai, Y., & Baldinger, E. E. (2021). Authority Relations and the Tertiary-to-Secondary (Dis) Continuity. *For the Learning of mathematics*, 41(2), 26-31.
- Lampert, M. (1992). Practices and problems in teaching authentic mathematics. *Effective and responsible teaching: The new synthesis*, 295-314.
- Leder, G. C., Pehkonen, E., & Törner, G. (2002). *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education*. Springer.
- Leiß, D., & Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In W. Blum, C. Drüke-Noe, R. Hartung, & O. Köller (Eds.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (6. ed., pp. 33-50). Cornelsen.
- Lin, F.-L. (2000). Making Sense of Mathematics Teacher Education. *Journal of mathematics teacher education*, 3, 183-190.
- Linn, M. C. (2000). Designing the knowledge integration environment. *International Journal of Science Education*, 22(8), 781-796.
- Linn, M. C., Eylon, B.-S., & Davis, E. A. (2013). The knowledge integration perspective on learning. In M. C. Linn, E. A. Davis, & P. Bell (Eds.), *Internet environments for science education* (pp. 57-74). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lockwood, E., Caughman, J. S., & Weber, K. (2020). An essay on proof, conviction, and explanation: Multiple representation systems in combinatorics. *Educational Studies in Mathematics*, 103, 173-189.
- MacLane, S. (1981). Mathematical models: A sketch for the philosophy of mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 88(7), 462-472.
- Manin, Y. I. (2010). *A course in mathematical logic for mathematicians* (2nd ed.). Springer.
- Marco, N. (2021). The effects of a proof comprehension test on comprehending proofs without words. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 222-229). Thailand: PME.

- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. In Á. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 173-204).
- Martin, T. S., McCrone, S. M. S., Bower, M. L. W., & Dindyal, J. (2005). The Interplay of Teacher and Student Actions in the Teaching and Learning of Geometric Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-6698-0>
- McCrone, S. M. S., & Martin, T. S. (2010). Formal Proof in High School Geometry: Student Perceptions of Structure, Validity, and Purpose. Teaching Proving by Coordinating Aspects of Proofs with Students' Abilities. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 Perspective* (pp. 204-221). Routledge.
- Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009a). Argumentative and Proving Activities in Mathematics Education Research. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. De Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 88-93).
- Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009b). What are the argumentative activities associated with proof? *Research in Mathematics Education*, 11(1), 77-78. <https://doi.org/10.1080/14794800902732258>
- Melhuish, K., Fukawa-Connelly, T., Dawkins, P. C., Woods, C., & Weber, K. (2022). Collegiate mathematics teaching in proof-based courses: What we now know and what we have yet to learn. *The Journal of Mathematical Behavior*, 67, 100986.
- Melhuish, K., Vroom, K., Lew, K., & Ellis, B. (2022). Operationalizing authentic mathematical proof activity using disciplinary tools. *The Journal of Mathematical Behavior*, 68, 101009.
- Miyazaki, M., Fujita, T., & Jones, K. (2017). Students' understanding of the structure of deductive proof. *Educational Studies in Mathematics*, 94, 223-239.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27(3), 249-266.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking* (1 ed.). Mathematical Association of America.
- Neuhaus-Eckhardt, S. (2022). *Beweisverständnis von Studierenden: Zusammenhänge zu individuellen Merkmalen und der Nutzung von Beweislesestrategien*. Waxmann.
- Nickerson, S. D., & Rasmussen, C. (2009). Enculturation to proof: a Pragmatic and Theoretical Investigation. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. De Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 118-123).
- Oepke, M., & Eberle, F. (2016). Deutsch-und Mathematikkompetenzen–wichtig für die (allgemeine) Studierfähigkeit? In J. Kramer, M. Neumann, & U. Trautwein (Eds.), *Abitur und Matura im Wandel: Historische Entwicklungslinien, aktuelle Reformen und ihre Effekte* (pp. 215-252). Springer.
- Osborne, J. (2009). Learning to Argue, Arguing to Learn: The Role of Argument in Teaching and Learning Science and Technology. In *International handbook of research and development in technology education* (pp. 431-442). Brill.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41.

- Pfeiffer, K. (2011). *Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: observations from proof validation and evaluation performances*. National University of Ireland.
- Pinto, A., & Karsenty, R. (2020). Norms of proof in different pedagogical contexts. *For the Learning of mathematics*, 40(1), 22-27.
- Rach, S., & Heinze, A. (2017). The transition from school to university in mathematics: Which influence do school-related variables have? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15, 1343-1363.
- Raman, M. (2001). Beliefs about Proof in Collegiate Calculus. In R. Speiser (Ed.), *Proceedings of the Twenty Second Annual Meeting, North American Chapter for the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Recio, A. M., & Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83-99.
- Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, learning and teaching*. Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.
- Reiss, K., Heinze, A., Kuntze, S., Kessler, S., Rudolph-Albert, F., & Renkl, A. (2006). Mathematiklernen mit heuristischen Lösungsbeispielen. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Eds.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (pp. 194-210). Waxmann.
- Reiss, K., Hellmich, F., & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel & J. Doll (Eds.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (pp. 51-64). Beltz.
- Reiss, K., Klieme, E., & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* 4, 97-104.
- Reiss, K., & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34, 29-35.
- Reiss, K., & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus. *Jahresbericht Der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, 111(4), 155-177.
- Reutersward, E., & Hemmi, K. (2011). Upper secondary school teachers' views of proof and the relevance of proof in teaching mathematics. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *7 Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 253-262). University of Rzeszów.
- Roesken, B., Pepin, B., & Toerner, G. (2011). Beliefs and beyond: Affect and the teaching and learning of mathematics. *ZDM*, 43(4), 451-455.
- Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 338-355.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education*, 196(2), 1-38.
- Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: Theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM*, 49, 307-322.
- Seidel, T. (2014). Angebots-Nutzungs-Modelle in der Unterrichtspsychologie. Integration von Struktur-und Prozessparadigma. *Zeitschrift für Pädagogik*, 60(6), 850-866.

- Selden, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (Vol. 15, pp. 391-420). Springer
- Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- Selden, A., & Selden, J. (2008). Overcoming students' difficulties in learning to understand and construct proofs. In M. P. Carlson & C. Rasumussen (Eds.), *Making the connection: research and teaching in undergraduate mathematics education* (pp. 95-110). Mathematical Association of America.
- Selden, A., & Selden, J. (2013). *The Genre of Proof*. Tennessee Technological University.
- Selden, A., & Selden, J. (2017). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. In R. Göller, R. Biehler, R. Hochmuth, & H.-G. Rück (Eds.), *Proceedings of the Conference on Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline* (pp. 339-345).
- Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 123-151. <https://doi.org/10.1007/BF01274210>
- Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *The mathematics teacher*, 78(6), 448-456.
- Sommerhoff, D. (2017). *The Individual Cognitive Resources Underlying Students' Mathematical Argumentation and Proof Skills* LMU München.
- Sommerhoff, D., Kollar, I., & Ufer, S. (2021). Supporting Mathematical Argumentation and Proof Skills: Comparing the Effectiveness of a Sequential and a Concurrent Instructional Approach to Support Resource-Based Cognitive Skills. *Frontiers in Psychology*, 11, 1-18. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.572165>
- Sommerhoff, D., & Ufer, S. (2019). Acceptance criteria for validating mathematical proofs used by school students, university students, and mathematicians in the context of teaching. *ZDM*, 51(5), 717-730. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01039-7>
- Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I. (2016). Validieren von Beweisen – Probleme von Studierenden und die Rolle von mathematischen und übergreifenden Voraussetzungen. In I. I. f. M. u. I. d. P. H. Heidelberg (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (Vol. 3, pp. 1127-1130). WTM-Verlag.
- Sporn, F., Sommerhoff, D., & Heinze, A. (2021). Beginning university mathematics students' proof understanding. In M. Inprasitha, N. Changsri, & N. Boonsena (Eds.), *Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 102-110). Thailand: PME.
- Sporn, F., Sommerhoff, D., & Heinze, A. (2022). Students' Knowledge About Proof and Handling Proof. In C. Fernández, S. Llinares, Á. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 27-34). Alicante, Spain: PME.
- Sporn, F., Sommerhoff, D., & Heinze, A. (under review). Describing Student's Understanding of Proof - A Holistic Theory-based Framework and First Empirical Evidence on its Key Aspects.

- Stein, H. (1988). Logos, logic, and Logistiké: Some philosophical remarks on the Nineteenth Century transformation of mathematics. In W. Aspray & P. Kitcher (Eds.), *History and philosophy of modern mathematics* (Vol. 11, pp. 238-259).
- Stein, M. (1985). Didaktische Beweiskonzepte. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 17(4), 120-133.
- Stein, M. (1986). *Beweisen: eine Analyse des Beweisprozesses und der ihn beeinflussenden Faktoren auf der Grundlage empirischer Untersuchungen zum Argumentationsverhalten von 11-13 jährigen Schülern, ausgehend von einer systematisierenden Auseinandersetzung mit didaktischen Konzeptionen und empirischen Forschungsansätzen zum Beweisen*. Franzbecker.
- Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule: Muster und Strukturen–Gleichungen–funktionale Beziehungen*. Springer.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Stylianides, A. J., Bieda, K. N., & Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. In Á. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education*.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 237-253.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2022). Introducing students and prospective teachers to the notion of proof in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100957.
- Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning-and-proving. *For the Learning of mathematics*, 28(1), 9-16.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314-352.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2017). Research-based interventions in the area of proof: the past, the present, and the future. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 119-127.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the Teaching and Learning of Proof: Taking Stock and Moving Forward. In J. Cai (Ed.), *First Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). Reston, VA: NCTM.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Knuth, E. J. (2009). *Teaching and learning proof across the grades*. Routledge New York.
- Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships Between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(1), 91-134. <https://doi.org/10.1007/s40753-015-0003-0>
- Tabach, M., Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D., Dreyfus, T., & Levenson, E. (2010). Verbal Justification - is it a Proof? Secondary School Teachers' Perceptions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8(6), 1071-1090. <https://doi.org/10.1007/s10763-010-9230-7>
- Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 5-24. <https://doi.org/10.1007/BF03217474>
- Tall, D., & Mejia-Ramos, J. P. (2010). *The long-term cognitive development of reasoning and proof*. Springer.

- Tebaartz, P. C., & Lengnink, K. (2015). Was heißt „mathematischer Beweis“?–Realisierungen in Schülerdokumenten. In A. Budke, M. Kuckuck, M. Meyer, F. Schäbitz, K. Schlüter, & G. Weiss (Eds.), *Fachlich argumentieren lernen. Didaktische Forschungen zur Argumentation in den Unterrichtsfächern* (pp. 105-122). Waxmann.
- Thurston, W. P. (1995). On Proof and Progress in Mathematics. *For the Learning of mathematics*, 15(1), 29-37.
- Törner, G. (2003). Mathematical Beliefs — A Search for a Common Ground: Some Theoretical Considerations on Structuring Beliefs, Some Research Questions, and Some Phenomenological Observations. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (Vol. 31, pp. 73-94). Kluwer Academic Publishers.
- Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 30(1), 30-54.
- Ufer, S., Heinze, A., & Reiss, K. (2008). Individual Predictors of Geometrical Proof Competence. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 361-368). Morelia, Mexico: PME.
- Usiskin, Z. (1987). Resolving the continuing dilemmas in school geometry. In M. M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12: 1987 Yearbook* (pp. 17-31). National Council of Teachers of Mathematics.
- Vieluf, S., Praetorius, A.-K., Rakoczy, K., Kleinknecht, M., & Pietsch, M. (2020). Angebots-Nutzungs-Modelle der Wirkweise des Unterrichts: ein kritischer Vergleich verschiedener Modellvarianten. *Zeitschrift für Pädagogik. Beiheft*, 66(1), 63-80.
- Vinner, S. (1997). The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning. *Educational Studies in Mathematics*, 34(2), 97-129.
- Vito, V. (2020). Some notes on diagram chasing and diagrammatic proofs in category theory. *arXiv preprint arXiv:2010.12534*.
- Vollstedt, M., Heinze, A., Gojdka, K., & Rach, S. (2014). Framework for Examining the Transformation of Mathematics and Mathematics Learning in the Transition from School to University: An Analysis of German Textbooks from Upper Secondary School and the First Semester. *Transformation-a fundamental idea of mathematics education*, 29-50.
- Waldis, M., Grob, U., Pauli, C., & Reusser, K. (2010). Der Einfluss der Unterrichtsgestaltung auf Fachinteresse und Mathematikleistung. In K. Reusser, C. Pauli, & M. Waldis (Eds.), *Unterrichtsgestaltung und Unterrichtsqualität. Ergebnisse einer internationalen und schweizerischen Videostudie zum Mathematikunterricht* (pp. 209-251). Waxmann.
- Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 101-119. <https://doi.org/10.1023/A:1015535614355>
- Weber, K. (2003). Students' difficulties with proof. *MAA Research sampler*, 8.
- Weber, K. (2006). Investigating and teaching the processes used to construct proofs. *Research in collegiate mathematics education. VI*, 197-232.
- Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 431-459.
- Weber, K. (2010). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical thinking and learning*, 12(4), 306-336.

- Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 289-314.
- Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational Studies in Mathematics*, 56(2), 209-234.
- Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2014). Mathematics majors' beliefs about proof reading. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 45(1), 89-103. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.790514>
- Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2015). On relative and absolute conviction in mathematics. *For the Learning of mathematics*, 35(2), 15-21.
- Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 4(1), 59-95. <https://doi.org/10.1007/BF03339229>
- Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4(2). <https://doi.org/10.1515/dmvm-1996-0214>
- Wittmann, E. C. (1985). Objekte-Operationen-Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *Mathematik lehren*, 3(11), 7-11.
- Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Ed.), *Mathematikdidaktik - Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (pp. 237-258). Cornelsen.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.
- Yackel, E., Rasmussen, C., & King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *The Journal of Mathematical Behavior*, 19(3), 275-287.
- Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 297-321.
- Zaslavsky, O. (2018). Genericity, conviction, and conventions: Examples that prove and examples that don't prove. *Advances in mathematics education research on proof and proving: An international perspective*, 283-298.
- Zaslavsky, O., & Knuth, E. (2019). The complex interplay between examples and proving: Where are we and where should we head? *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 242-244. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.10.001>
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I., & Winicki-Landman, G. (2012). The Need for Proof and Proving: Mathematical and Pedagogical Perspectives. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study* (Vol. 15, pp. 215-229). Springer Netherlands.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von der Beratung durch die Betreuerinnen und Betreuer meines Projekts, in Inhalt und Form selbstständig verfasst habe. Die Arbeit ist unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft entstanden. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Die vorliegende Arbeit wurde weder im Ganzen noch in Teilen an einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegt. Teile dieser Arbeit wurden bereits in Form von Zeitschriftenartikeln publiziert oder wurden zur Publikation eingereicht. Mir wurde kein akademischer Grad entzogen.

Kiel, den 12.06.2023

Femke Sporn